

SINTEZE LYCEUM

CONSTANTIN IONESCU-TIU

GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU PENTRU ADMITERE ÎN FACULTATE

EDITURA ALBATROS



Referenți:

Dr. ing. MIHAIL POPESCU
Cercetător VALERIU ȘT. UDRESCU

Coperta colecției de
ANDREI OLSUFIEV

BUCUREȘTI • 1976



SINTEZE
LYCEUM

CONSTANTIN IONESCU-ŢIU

GEOMETRIE PLANĂ ŞI ÎN SPAŢIU PENTRU ADMITERE ÎN FACULTATE

Cuvînt înainte
de acad. CAIUS IACOB

EDITURA ALBATROS



CUPRINS

CUVÎNT ÎNAINTE

Geometria este considerată ca una dintre principalele ramuri ale matematicii. Ea este în realitate o știință a naturii, ale cărei origini îndepărtate se leagă de începuturile civilizației umane. În antichitate, egiptenii utilizau apele Nilului pentru irigarea și fecundarea terenurilor lor agricole. Dar revărsarea apelor fluviului ștergea semnele despărțitoare ale proprietăților; de aici rezulta necesitatea de a dezvolta o știință a măsurării pămînturilor, de determinare a distanțelor între puncte uneori inaccesibile.

Dar geometria, ale cărei origini se situează astfel în Egiptul faraonilor, nu a ajuns, propriu-zis, la stadiul de știință decît grație școlilor grecești de matematică. Dezvoltînd logica formală, prelucrînd datele și regulile empirice ale egiptenilor, supunîndu-le analizei lor critice, geometrii antichității grecești, printre care un loc de prim plan îl ocupă Tales (624—547 î.e.n.), Pitagora (580—500 î.e.n.), Platon (428—348 î.e.n.), Arhimede (287—212 î.e.n.), Apollonios din Perga (626—180 î.e.n.), Euclid (sec. III î.e.n.), Nicomede (sec. III—II î.e.n.), Diocles (sec. II î.e.n.) și mulți alții au pus bazele științifice ale geometriei.

Matematica antichității, redusă la aritmetică și geometrie, ca urmare a numeroaselor ei aplicații la viață, la tehnica epocii (ne referim aici în special la opera acelui titan al antichității greco-romane care a fost Arhimede, creator al staticii), a ajuns apoi să fie apreciată și de deținătorii temporari ai puterii. Regi și tirani țineau să aibă geometrii la curțile lor și își manifestau interesul față de descoperirile acestora.

Este meritul deosebit al lui Euclid de a fi lăsat posterității acel monument nepieritor al gîndirii umane pe care-l constituie „Elementele", opera sa de sinteză și de sistematizare a rezultatelor înaintașilor și contemporanilor săi, ca și a propriilor lui descoperiri. Aceste rezultate apar la Euclid ca niște consecințe logice ale unor fapte geometrice de bază, evidente prin ele însele, care se acceptă ca axiome.

Ca prim model de prezentare axiomatică, tratatul lui Euclid este opera care va domina cele două milenii următoare, fiind inspiratorul prezentărilor axiomatice care vor marca constituirea bazelor teoretice ale științelor naturii (ca mecanica lui Galilei și Newton) sau chiar a marilor creații care vor reînnoi matematica contemporană nouă. Din geometria euclidiană și din mecanica newtoniană s-a desprins mai tîrziu ramura aplicată a geodeziei, care este forma sub care geometria răspunde astăzi menirii sale inițiale.

Geometria, la fel ca studiul limbilor clasice (latina și greaca), are un rol deosebit în formarea intelectuală a omului contemporan. Raționamentul geometric presupune analiza amănunțită a tuturor concluziilor ce derivă din anumite date, a cadrului de validitate a diferitelor rezultate. El nu permite nici o neglijență în gîndire, nici o concluzie pripită, superficială, insuficient fundamentată logic. De aceea, studiul geometriei — pe lîngă interesul ei teoretic și aplicativ pentru viitorii matematicieni, mecanicieni, ingineri și tehnicieni — este încă, de pe băncile școlii și pînă la cercetarea științifică de specialitate, o admirabilă gimnastică a consecvenței în gîndire și a spiritului critic.

Aplicarea metodelor geometriei euclidiene reclamă însă o ingeniozitate deosebită, care se obține numai prin studii și exerciții îndelungate. Problemele de geometrie constituie antrenamentul necesar însușirii disciplinei în gîndire amintite, a spiritului de rigoare necesar astăzi pe o scară din ce în ce mai largă în viața de toate zilele.

Culegerea de probleme de geometrie plană și în spațiu a profesorului Constantin Ionescu-Țiu, pe care am satisfacția să o prezint acum, constituie rodul unei bogate experiențe acumulate de autor în cursul îndelungatei și neobositei sale activități la „Gazeta matematică", al cărei redactor este, precum și a activității sale didactice. Ea se adresează, în primul rînd, candidaților la examenele de admitere din facultățile de matematică-mecanică ale universităților sau de la facultățile institutelor politehnice, de construcții, agronomice etc. Însă, prin materia tratată, ea este destinată și masei mult mai largi a elevilor din toate școlile în care se predă geometria.

Împărțită în nouă capitole, lucrarea cuprinde probleme interesante, variate și de dificultate gradată, privind părțile geometriei euclidiene care se predau în școlile noastre, începînd cu proprietățile triunghiurilor și patrulaterului și sfîrșind cu studiul și proprietățile corpurilor rotunde ca sfera, cilindrul și conul de rotație. Fiecare capitol comportă o parte introductivă în care se reamintesc principalele definiții și teoreme legate de capitolul respectiv. Pe lîngă problemele proprii, propuse de autor în cursul anilor în „Gazeta matematică", culegerea cuprinde și probleme propuse de alți autori în aceeași gazetă, precum și probleme propuse la diferite concursuri și olimpiade de matematică în țară sau în străinătate. Se pune astfel la dispoziția elevilor liceelor noastre un material bogat și deosebit de util, de natură să consolideze pregătirea lor matematică și — prin problemele recapitulative sau de la examenele de admitere în facultăți — să contribuie la însușirea metodelor și a îndemînării de rezolvare a problemelor geometrice pentru care, după cum se știe din antichitate, „nu există o cale regală" ci numai aceea a muncii stăruitoare și consecvente.

Felicitînd pe autorul lucrării pentru contribuția sa atît de apreciată în vederea ridicării nivelului pregătirii matematice a elevilor noștri, se cade în același timp să subliniem meritul Editurii Albatros care a luat iniția-



tiva publicării acestui nou volum. Împreună cu volumele anterioare de „Probleme de algebră și analiză matematică" și de „Calcul diferențial și integral", datorite lui C. Ionescu-Țiu și L. Pîrșan, apărute în aceeași editură, lucrarea de față reprezintă un material de bază, deosebit de prețios atît pentru elevii liceelor noastre cît și pentru profesorii lor.

București 1 martie 1976.

Acad. CAIUS IACOB

Profesor la Facultatea de Matematică-Mecanică a Universității din București

INTRODUCERE

Pentru pregătirea temeinică a examenelor, precum și în studiul multor discipline tehnice, are mare rol însușirea temeinică a cunoștințelor de geometrie — verificate prin rezolvări de probleme variate.

Materialul acestei lucrări corespunde cerințelor actuale ale examenelor de admitere în facultăți. Culegerea de probleme de geometrie interesează în egală măsură și pe elevi pentru aprofundarea noțiunilor de geometrie primite la școală. Ea poate fi folosită de cadrele didactice ca material de cercetare pentru cercurile de matematică ale elevilor, precum și de studenți în activitatea lor de la practica pedagogică.

Pentru a se urmări mai ușor rezolvarea problemelor, la începutul fiecărui capitol s-au trecut principalele definiții și teoreme, referitoare la materialul folosit în capitolul respectiv. Figurile necesare au fost corect executate, pentru a ajuta la formarea lanțului de judecăți care duce la rezolvarea problemelor.

În primele opt capitole, problemele sînt gradat prezentate și urmate de soluții complete, astfel încît lucrarea poate fi de folos elevilor din toate categoriile de licee.

Problemele sînt independente unele de altele, deci pot fi cercetate și rezolvate și în altă ordine decît cea propusă de autor.

Cercetarea materialului poate duce și la alte căi de rezolvare și chiar la stabilirea unor generalizări.

Nu s-au prezentat probleme prea specializate de geometrie sintetică și s-au preferat raționamentele directe, cît mai elementare, ca lucrarea să fie accesibilă și atrăgătoare. Am folosit probleme elementare propuse de autori români în publicațiile din țară, indicînd prescurtat ast-

fel: G.M. (Gazeta Matematică), S.G.M. (Suplimentul Gazeta Matematică), R.M.T. (Revista Matematică din Timişoara), R.M.F. (Revista de Matematică şi Fizică), G.M.F.B. (Gazeta Matematică şi Fizică — Seria B) şi G.M.B. (Gazeta Matematică — Seria B).

În capitolul VIII sînt grupate probleme de geometrie date la examenele de admitere în facultăţi.

Capitolul IX conţine enunţurile unor probleme cu proprietăţi şi construcţii geometrice cu scopul ca elevii şi absolvenţii de liceu să recapituleze întreaga materie prevăzută în programă, aceste probleme servesc ca probe de verificare a cunoştinţelor expuse în celelalte opt capitole.

AUTORUL

TRIUNGHIURI. DREPTE PARALELE. PATRULATERE

Dacă două drepte se intersectează și formează între ele patru unghiuri egale, dreptele se zic drepte perpendiculare între ele iar unghiurile se zic unghiuri drepte.

Un unghi drept are 90° (grade *sexagesimale*) sau $\frac{\pi}{2}$ *radiani*.

Dacă două unghiuri au ca sumă un unghi drept, unghiurile se zic unghiuri *complementare*, iar dacă suma lor este cît 2 unghiuri drepte, unghiurile se zic *suplementare*.

Un punct pe o dreaptă o împarte în două *semidrepte*. Porțiunea dintr-o dreaptă mărginită de două puncte A, B se numește *segmentul* AB.

Un segment are o lungime. Două segmente cu aceeași lungime se zic segmente egale.

O semidreaptă care împarte un unghi în două părți egale se numește *bisectoarea* acelui unghi. Orice punct luat pe bisectoarea unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului. O dreaptă dusă prin vîrful unui unghi perpendiculară pe bisectoarea unghiului se zice bisectoarea exterioară unghiului.

Două drepte care sînt în același plan și nu au nici un punct comun se zic *drepte paralele* între ele.

Dacă trei puncte distincte A, B, C, care nu sînt așezate pe o dreaptă le unim prin segmentele de dreaptă AB, BC, CA se formează un triunghi.

Segmentele $AB = c$, $BA = a$ și $CA = b$ sînt laturile triunghiului. Cu literele A, B, C s-au notat vîrfurile triunghiului ABC, dar mai putem nota unghiurile astfel: $\sphericalangle BAC = A$, $\sphericalangle CBA = B$ și $\sphericalangle ACB = C$.

— În orice triunghi la latura cea mai mare se opune și unghiul cel mai mare și bineînțeles la unghiul cel mai mic se opune latura cea mai mică.

— Dacă un unghi este mai mic decît un unghi drept se zice unghi *ascuțit*, iar dacă este mai mare decît un unghi drept se zice unghi *obtuz*.

Triunghiul cu toate unghiurile ascuțite se zice triunghi *ascuțit unghic*, dacă are un unghi drept se zice triunghi *dreptunghic* iar dacă are un unghi obtuz se zice triunghi *obtuzunghic*. Suma unghiurilor oricărui triunghi este de 180°.

— În orice triunghi oricare din laturi este mai mică decît suma celorlalte două, dar mai mare decît diferența lor.

— Perpendicularele duse din vîrfurile unui triunghi ABC pe laturile opuse, AA', BB', CC', se numesc *înălțimile* triunghiului și sînt concurente într-un punct H numit *ortocentrul* triunghiului. Triunghiul $A'B'C'$ se numește triunghiul ortic al triunghiului ABC, iar înălțimile triunghiului ABC sînt bisectoarele triunghiului ortic $A'B'C'$.

— Segmentele de dreaptă care unesc vîrfurile unui triunghi ABC respectiv cu mijloacele laturilor opuse se numesc *medianele* triunghiului ABC și sînt concurente într-un punct G numit *centrul de greutate* al triunghiului ABC.

Punctul G se află situat pe fiecare mediană la două treimi de la vîrf.

Triunghiul cu vîrfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC se zice triunghiul *median* al triunghiului ABC.

— Dreptele perpendiculare pe mijloacele laturilor unui triunghi ABC se numesc mediatoare și sînt concurente în centrul O al cercului care trece prin vîrfurile triunghiului ABC (centrul circumscris).

— Picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor unui triunghi ABC și mijloacele segmentelor cuprinse între vîrfurile triunghiului și ortocentrul H sînt nouă puncte situate pe un cerc (concilice), numit cercul lui Euler și al cărui centru îl notăm cu O_9 sau cu ω.

— Punctele H, O, G, O_9 sînt situate pe o dreaptă (coliniare) numită dreapta lui *Euler* a triunghiului ABC, iar $GH = 2GO$.

— Unghiurile unui triunghi ABC au șase bisectoare, trei interioare care traversează triunghiul și trei exterioare. Cele interioare sînt concurente într-un punct I care este centrul cercului înscris, tangent la laturile triunghiului.

Două bisectoare exterioare corespunzătoare la două vîrfuri și una interioară care trece prin al treilea (celălalt) vîrf sînt concurente. Cele trei puncte de concurență ale bisectoarelor le notăm cu I_a, I_b, I_c și sînt centrele a trei cercuri numite cercuri exînscrise triunghiului ABC.

— Două triunghiuri sînt egale cînd se pot suprapune. Dacă suprapunerea se poate face mișcînd unul din triunghiuri fără a-l scoate din plan, triunghiurile se mai zic *direct egale;* în caz contrar, cînd trebuie întors pe cealaltă față unul din triunghiuri pentru ca apoi să se poată suprapune cele două triunghiuri, se zic *invers egale*.

— Dacă două triunghiuri sînt egale, atunci ele au toate laturile și unghiurile respectiv egale cu ale celuilalt triunghi.

— Două triunghiuri sînt egale dacă și numai dacă au:

a). Cîte un unghi egal cuprins între laturi respectiv egale *(LUL);*

b). O latură egală cuprinsă între 2 vîrfuri cu unghiuri respectiv egale *(ULU);*

c). Laturile unui triunghi egale respectiv cu ale celuilalt triunghi *(LLL)*.

Patrulatere. Un patrulater $ABCD$ are 4 vîrfuri A, B, C, D, 4 laturi AB, BC, CD, DA și două diagonale care unesc două vîrfuri opuse, adică AC și BD.

— Patrulaterul se zice *convex* dacă prelungindu-i laturile lasă de o parte toată suprafața sa și se zice *concav* în cazul contrar.

— În general, un poligon convex este figura geometrică formată din mai multe segmente de dreaptă puse

cap la cap și care închid o suprafață plană, astfel că prelungindu-i oricare din laturi nu-i traversează suprafața.

— Ducînd o diagonală într-un patrulater convex $ABCD$ se formează două triunghiuri în același plan.

Notînd cu A, B, C, D unghiurile patrulaterului convex avem

$$A + B + C + D = 360°.$$

Figura formată de patru segmente coplanare (din care trei nu sînt concurente) se numește *patrulater complet* (nu este convex).

— *Trapezul* este un patrulater cu două laturi paralele numite baze.

— Dacă trapezul are diagonalele egale se numește trapez isoscel și atunci are toate vîrfurile situate pe un cerc.

— Dacă trapezul are un unghi drept, el are cel puțin două unghiuri drepte și se numește trapez *dreptunghic*.

Distanța între cele două baze este *înălțimea* trapezului.

Segmentul de dreaptă care unește mijloacele laturilor neobligativ paralele este egală cu semisuma bazelor.

— *Paralelogramul* este patrulaterul cu laturile opuse paralele.

Paralelogramul $ABCD$ este caracterizat prin una din proprietățile:

— Laturile opuse sînt paralele între ele (luată și ca definiție);

— Unghiurile opuse egale $(A = C;\ B = D)$;

— Laturile opuse egale $(AB = CD;\ AD = BC)$;

— Două laturi opuse egale și paralele $(AB = CD$ și $AB \parallel CD)$;

— Diagonalele se taie în părți egale $(OA = OC$ și $OB = OD$ unde O este intersecția diagonalelor numit și centrul paralelogramului și este *centru de simetrie*).

— *Dreptunghiul* este un paralelogram particular care are un unghi drept (cînd rezultă atunci că toate unghiurile sînt drepte); sau dacă paralelogramul are diagonalele egale (rezultă și unghiurile drepte).

Paralelele duse prin punctul O de intersecție al diagonalelor la laturi sînt axe de simetrie, iar O este centrul de simetrie.

Pătratul este un dreptunghi cu toate laturile egale; are, de asemenea, diagonalele perpendiculare și egale. În afară de simetriile dreptunghiului, la pătrat și diagonalele sînt axe de simetrie.

— *Rombul* este paralelogramul care are:

1). toate laturile egale;

2). diagonalele perpendiculare.

Pătratul este un romb cu diagonalele egale.

— *Loc geometric.* Figura formată din mulțimea *tuturor* punctelor care au aceeași proprietate se numește loc geometric; pentru ca figura presupusă să fie loc geometric, trebuie satisfăcute următoarele două propoziții:

a). orice punct al figurii să aibă proprietatea enunțată;

b). orice punct care are proprietatea enunțată să aparțină figurii.

PROBLEME

1.1. Să se arate că un triunghi cu două înălțimi egale este isoscel.

Soluție. Fie BB_1 și CC_1 înălțimile egale în triunghiul ABC.

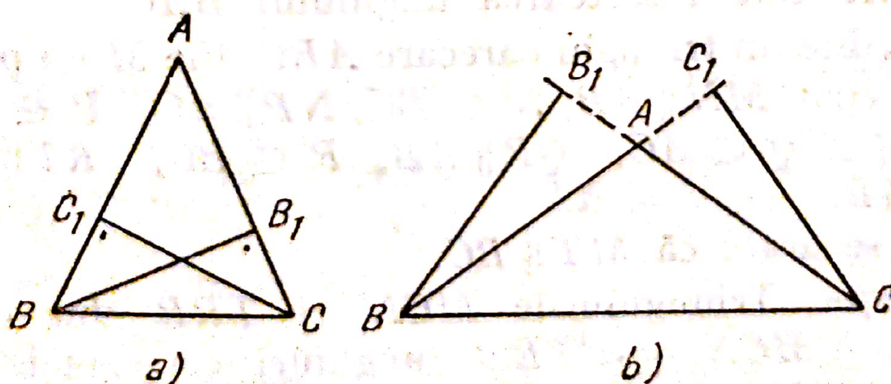


Fig. 1.1

Triunghiurile dreptunghice BC_1C și CB_1B au o pereche de catete egale și ipotenuzele egale, deci triunghiurile BC_1C și CB_1B sînt egale. Rezultă $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ deci triunghiul ABC este isoscel.

1.2. Fie triunghiul ABC. Pe AB respectiv pe AC se iau segmentele $AC_1 = AC$ și $AB_1 = AB$. Să se arate că B_1C_1 și BC se taie într-un punct I situat pe bisectoarea unghiului BAC.

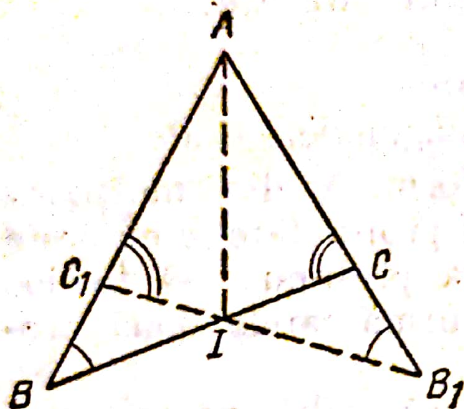


Fig. 1.2

Soluție. Excludem cazul cînd triunghiul ABC este isoscel în A deoarece atunci BC se confundă cu B_1C_1. Presupunem cazul că $AB > AC$. Rezultă $AB_1 > AC$ așa că segmentul AB este tăiat de B_1C_1, adică segmentul BC este tăiat într-un punct interior de către dreapta B_1C_1. Considerăm acum triunghiurile AIB și AIB_1 și să arătăm că sînt egale. Ținem seama că triunghiurile BAC și B_1AC_1 sînt egale avînd $AB = AB_1$, $AC = AC_1$ și $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1AC_1$. Rezultă apoi că $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AB_1C_1$ și $\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle ACB \Rightarrow \Rightarrow \sphericalangle B_1C_1B = \sphericalangle BCB_1$ ca unghiuri suplementare unghiurilor egale. Mai avem $BC_1 = B_1C$ ca diferențe de segmente egale. Rezultă că triunghiurile BIC_1 și B_1IC sînt egale, deci $IC_1 = IC$. Considerînd și egalitățile $AC_1 = AC$ rezultă că triunghiurile AC_1I și ACI sînt egale de unde rezultă apoi că $\sphericalangle IAC_1 = \sphericalangle IAC$ adică AI este bisectoarea unghiului BAC.

1.3. Fie un triunghi oarecare ABC. Fie M un punct pe AC apoi $MN \parallel AB$, $N \in BC$, $NP \parallel AC$, $P \in AB$, $PQ \parallel BC$, $Q \in AC$, $QR \parallel AB$, $R \in BC$, $RT \parallel AC$, $T \in AB$.

Să se arate că $MT \parallel BC$.

Soluție. Triunghiurile MCN și TRB sînt egale avînd: $\sphericalangle MCN = \sphericalangle TRB$ (unghiuri corespondente), analog $\sphericalangle MNC = \sphericalangle TRB$ și $NC = PQ = BR$ din

paralelogramele $NCQP$ și $PQRB$. Patrulaterul $TMNB$ avînd $MN = TB \Rightarrow TM \parallel BC$.

Observație. Dacă punctul M de plecare nu a fost ales la mijlocul laturii AC drumul $MNPQRSTM$ se închide după ce a atins de două ori fiecare latură și este egal cu perimetrul triunghiului ABC, iar dacă M este la mijlocul laturii atunci drumul este jumătate din perimetrul triunghiului ABC.

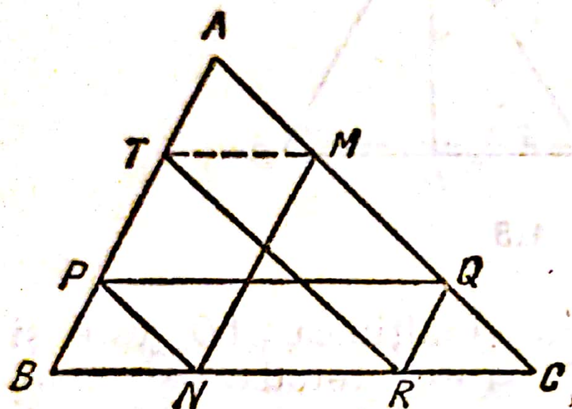


Fig. 1.3

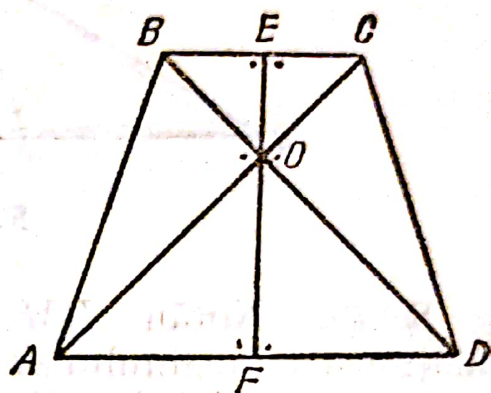


Fig. 1.4

1.4. Să se demonstreze că aria unui trapez isoscel care are diagonalele perpendiculare este echivalentă cu aceea a pătratului cu latura cît înălțimea trapezului.

Soluție. Ducem înălțimea EF a trapezului $ABCD$ prin punctul O de intersecție a diagonalelor. Fiind un trapez isoscel ale cărui diagonale sînt perpendiculare înseamnă că triunghiurile BOC și AOD sînt dreptunghice isoscele. Deci, E și F sînt mijloacele laturilor BC respectiv AD. Dar $EO = \frac{BC}{2}$ ca mediană dusă din vîrful unghiului drept. La fel $FO = \frac{AD}{2}$. Deci,

$EO + OF = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2}$; $\quad EF = \frac{BC + AD}{2}$. Aria trapezului isoscel este:

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot EF = \left(\frac{BC + AD}{2}\right)^2 = EF^2.$$

1.5. Într-un triunghi ABC notăm cu AD și AM înălțimea și respectiv mediana duse din vîrful A. Știind că unghiurile BAD, DAM și MAC sînt egale să se afle unghiurile triunghiului ABC.

(G.M.B., 13 153, *C. Ionescu-Țiu*).

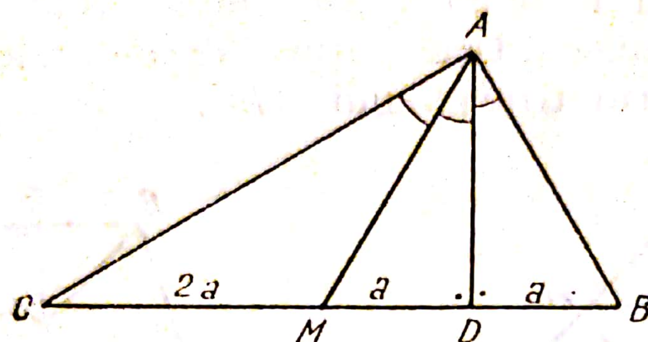


Fig. 1.5

Soluție. Notăm $DM = a$. Înălțimea AD este și înălțimea triunghiului BAM și este totodată și bisectoarea triunghiului ABM care este deci triunghi isoscel. Prin urmare $BD = DM = a$ iar $MC = 2a$, unde AM este bisectoarea în triunghiul DAC.

Avem $\frac{AD}{AC} = \frac{DM}{MC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$. Deoarece în triunghiul dreptunghic ADC ipotenuza $AC = 2AD$, rezultă că $\sphericalangle ACB = 30°$. Dar $\sphericalangle CAM = \sphericalangle DAM = \frac{90° - 30°}{2} = 30° \Rightarrow \sphericalangle BAD = 30°$. Prin urmare, triunghiul ABC este dreptunghic în A și $\sphericalangle ABC = 60°$.

1.6. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AA' a unghiului A care are 60°. Din A' se duce perpendiculara $A'M$ pe AB. Din M se duce perpendiculara MN pe AA'. Să se arate că:

$$3A'M = AA' + 2A'N.$$

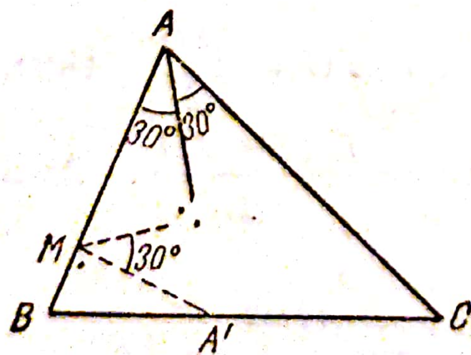


Fig. 1.6

Soluție. În triunghiul dreptunghic $AA'M$, avem $\sphericalangle MAA' = 30°$, deci $2A'M = AA'$.

În triunghiul dreptunghic MNA', avem $\sphericalangle NMA' = 30°$, deci $A'M = 2A'N$. Adunînd cele două egalități obținem $3 \cdot A'M = AA' + 2 \cdot A'N$.

1.7. Dîndu-se un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) și ducîndu-se bisectoarele unghiului A: AM, AN, $\sphericalangle(BAM = MAN = NAC)$ putem avea relația $BM = MN = NC$? (M, $N \in BC$).

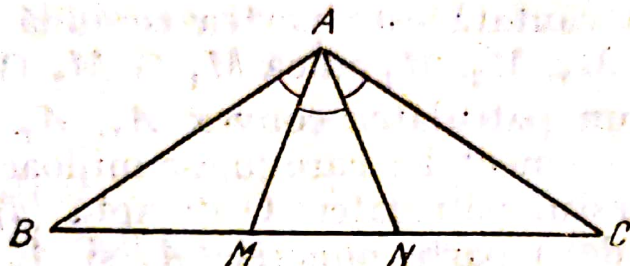


Fig. 1.7

Soluție. Presupunem că $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = \sphericalangle A_3$ și $BM = MN = NC$. Atunci triunghiul ABN este isoscel, bisectoarea AM fiind și mediană. Deci este și înălțimea, adică AM este perpendiculară pe BC.

La fel AMC este isoscel și deci AN este perpendiculară pe BC. Dar, dintr-un punct, pe o dreaptă, nu se poate duce decît o perpendiculară. Deci premiza este falsă.

1.8. Fie unghiul xOy de 60°. Pe Ox se ia un punct A la distanța 4 cm de O. Să se afle mulțimea punctelor care satisfac condițiile: a). distanța lor la A este de cel mult 8 cm; b). distanța lor la O de cel mult 5,5 cm; c). distanța lor la Oy nu mai mică de 2 cm; d). distanța lor la Ox mai mică decît distanța lor la Oy.

(G.M.B. E: 2868, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). $M_1 = \{MMA \leqslant 8 \text{ cm}\}$ este mulțimea punctelor din interiorul unui cerc cu centrul în punctul A și de rază egală cu 8 cm cît și mulțimea punctelor de pe cerc; b). $M_2 = \{M \mid MO \leqslant 5{,}5 \text{ cm}\}$ reprezintă interiorul și conturul cercului cu centrul în punctul O și de rază egală cu 5,5 cm; c). Mulțimea $M_3 = \{M \mid d(M, Oy) \geqslant 2 \text{ cm}\}$ este formată din mulțimea

punctelor din plan situate în afara celor 2 paralele ce se pot duce la Oy la distanța de 2 cm și din mulțimea punctelor acestor două paralele; d). Mulțimea $M_4 = \{M \mid d(M, Ox) < d(M, Oy)\}$ reprezintă mulțimea punctelor din plan cuprinse în interiorul unghiului drept uOu' unde Ou este bisectoarea unghiului xOy iar Ou' este bisectoarea unghiului xOy', (Oy' fiind prelungirea lui Oy).

Mulțimea căutată este partea comună celor patru mulțimi M_1, M_2, M_3, M_4 adică $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4$.

1.9. Fie un patrulater convex A_1, A_2, A_3, A_4 iar G intersecția segmentelor care unesc mijloacele laturilor opuse ale acestui patrulater. O dreaptă (d) care trece prin G lasă de o parte punctele A_1 și A_2 de cealaltă parte punctele A_3 și A_4. Notînd cu B_1, B_2, B_3, B_4 proiecțiile punctelor A_1, A_2, A_3, A_4 pe dreapta (d), să se arate că:

$$A_1B_1 + A_2B_2 = A_3B_3 + A_4B_4.$$

(G.M., 15235, *C. Ionescu-Țiu*).

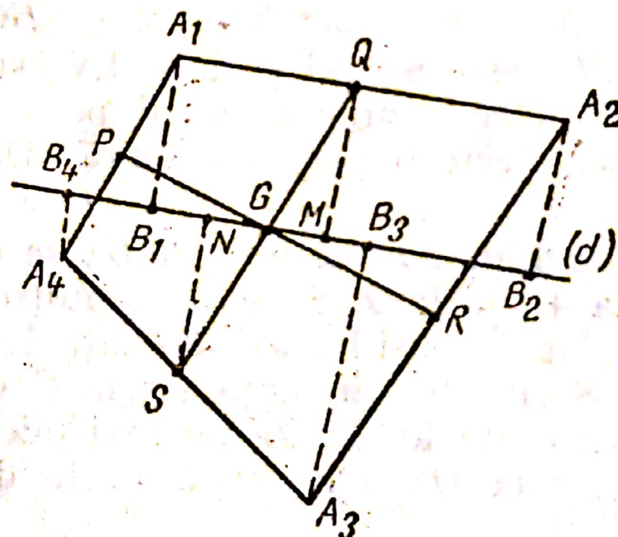


Fig. 1.9

Soluția. $PQRS$ este paralelogram. În trapezul $A_1A_2B_2B_1$ avem $2QM = A_1B_1 + A_2B_2$.

În trapezul $A_4B_4B_3A_3$ avem $2SN = A_4B_4 + A_3B_3$.

Dar $QM = SN$ din egalitatea triunghiurilor GQM și $GSN \Rightarrow QG = GS$. S-a notat cu P, Q, R, S mijloacele laturilor A_1A_4, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 iar M și N proiecțiile lui Q și S pe (d).

1.10. Pe o dreaptă d se iau segmentele AB, BC, CD și DE așa încît $AB = BC = CD = DE = a$. În punctele B, C și D se duc perpendiculare pe d. Se consideră pe aceste perpendiculare segmentele $BB_1 = a$, $CC_1 = 2a$, $DD_1 = DD_2 = a$ (se iau punctele B_1, C_1, D_1 de aceeași parte a dreptei (d) iar D_2 de partea opusă). Dacă $S = AD_1 \cap CC_1$ și $M = C_1D_2 \cap \cap CD_1$ să se arate că punctele B_1, S, M și E sînt coliniare.

(G.M., E: 4565, *Th. Cocea*).

Soluție. Patrulaterul $CD_2D_1C_1$ este paralelogram căci $C_1C = \| D_1D_2$. Rezultă $MD_2 = MC_1$. Deoarece $B_1B = = BC = CD = DD_2 = a$ rezultă că B_1, C, D_2 sînt coliniare și deoarece $CC_1 = 2a$ iar $DD_1 = CD = = DE = a$ rezultă că E, D_1 și C_1 sînt coliniare iar în figura $B_1D_2EC_1$ unghiurile C_1B_1C, CD_2E, CD_2E, D_2ED_1 și $D_1C_1B_1$ sînt toate de 90°, adică figura este un dreptunghi. Diagonala B_1E trece prin mijlocul M al diagonalei C_1D_2.

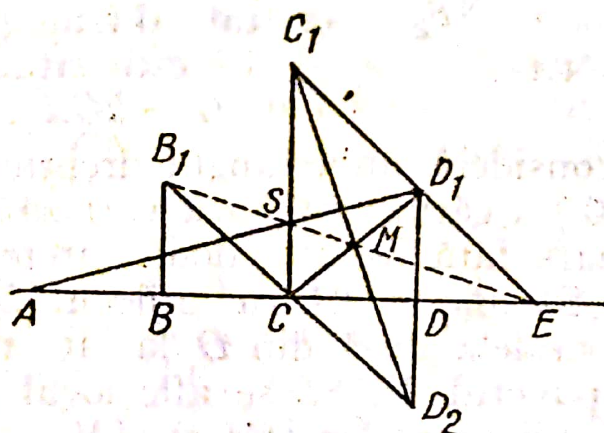


Fig. 1.10

În triunghiul AEC_1, C_1C și AD_1 sînt mediane și deci și ES este mediană și deci punctele E, S, B_1 sînt coliniare. Dar B_1E trece prin M așa cum s-a arătat și deci rezultă că toate punctele E, M, S și B_1 sînt coliniare.

1.11. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$) și $A_1B_1C_1$ triunghiul său median. Se consideră B_2 și C_2

simetricele lui B_1 și C_1 față de BC precum și punctele $M = (AB_2 \cap A_1B_1)$ și $N = (AC_2 \cap A_1C_1)$. Să se arate că CM și BN se intersectează în punctul G situat pe AA_1 așa încît $AG = 2GA_1$.

(G.M., E: 4723, *Th. Cocea*).

Soluție. Patrulaterul $AA_1B_2B_1$ este un paralelogram deoarece laturile opuse AA_1 și B_1B_2 sînt paralele și egale. Rezultă $MB_1 = MA_1$. CM este mediană în triunghiul GA_1B_1 și trece prin C_1 fiind mediană și în triunghiul ABC (mediana vîrfului C). Analog se arată că și BN este mediană în triunghiul ABC (mediana vîrfului B). Rezultă că CM și BN se întîlnesc pe mediana AA_1 a vîrfului A într-un punct G care este centrul de greutate al triunghiului ABC. El este situat așa încît $AG = 2GA_1$.

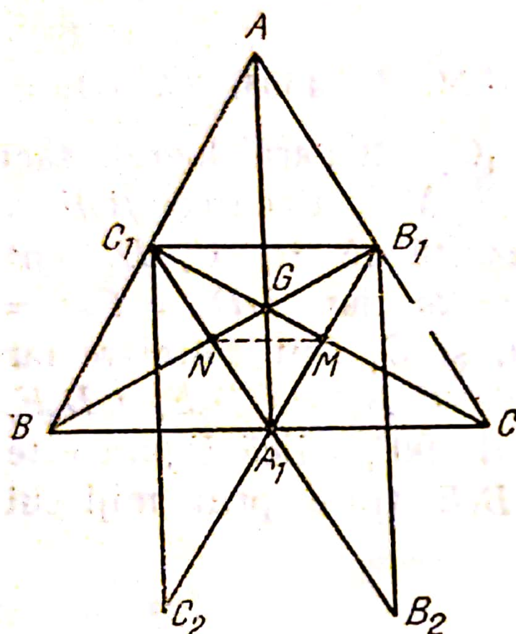


Fig. 1.11

1.12. Se consideră un triunghi dreptunghic isoscel ABC ($A = 90°$) a cărui ipotenuză variază păstrîndu-se aceeași înclinare față de cele două catete. Pe AC se ia $AM = m$. Se unește M cu mijlocul D al catetelor AB, iar paralela dusă din D la AC taie segmentul BM în punctul N. Să se afle locul punctului P de intersecție a dreptelor DM și AN.

Soluție. Cum AN și MD sînt mediane în triunghiul ABM, rezultă

$$\frac{DP}{DM} = \frac{PE}{AM} = \frac{1}{3}$$

unde E este proiecția lui P pe cateta AB.

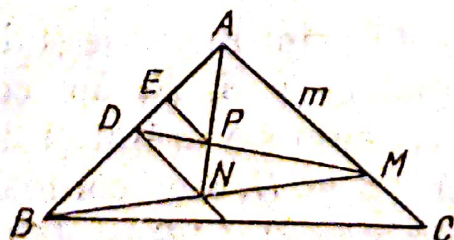


Fig. 1.12

Deci, $PE = \frac{m}{3}$, adică locul geometric al lui P este o paralelă la AB la distanța $\frac{m}{3}$.

1.13. a). În paralelogramul $ABCD$, M și N sînt mijloacele laturilor opuse AD și BC. Să se arate că BM și ND împart diagonala la AC în trei părți egale.

b). Reciproc: dacă diagonala AC este împărțită de punctele E și F în 3 părți egale, să se arate că dreapta BE și dreapta DF împarte pe AD respectiv BC în părți egale.

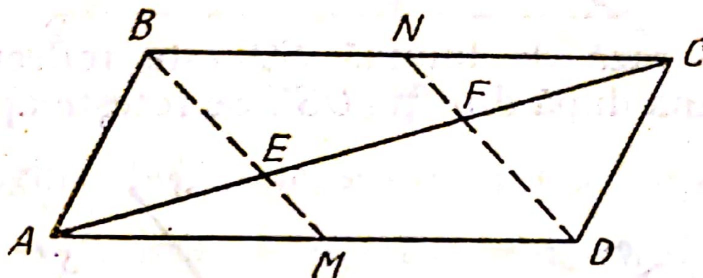


Fig. 1.13

Soluție. a). Deoarece $AB = CD$ și $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ ca laturi și unghiuri opuse ale paralelogramului dat și $AM = NC$ din ipoteză, rezultă că $\triangle ABM = \triangle NCD$. Din această egalitate, obținem: $\sphericalangle BMA = \sphericalangle CND$ (1). Dar cum $BC \parallel AD$, avem $\sphericalangle CND = \sphericalangle NDM$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle BMA = \sphericalangle NDM$, deci $BM \parallel ND$. Fie $E \in AC$ intersecția dintre AC și BM iar $F \in AC$ intersecția dintre AC și ND.

În triunghiul BEC, NF este linie mijlocie $\Rightarrow CF = FE$ (3). În $\triangle AFD$, ME este linie mijlocie $\Rightarrow FE = AE$ (4). Din (3) și (4) obținem că $CF = EF = AE$, deci diagonala CA este împărțită de către BM și ND în trei părți egale.

b). Se știe că $AE = EF = FC$; $\triangle ABE = \triangle CFD$ deoarece $AB = CD$, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle DCF$ (ca alterne interne) și $AE = FC$ (din ipoteză). Rezultă din egalitatea celor două triunghiuri că $\sphericalangle BEA = \sphericalangle CFD$. Aceste unghiuri fiind alterne externe egale avem că $BE \parallel DF$. În $\triangle AFD$, E fiind mijlocul lui AF, EM

este linie mijlocie, deci M împarte pe AD în două părți egale. Asemănător în $\triangle BEC$, FN este linie mijlocie și deci N împarte pe BC în două părți egale.

1.14. Să se arate că dacă notăm cu n° valoarea unui unghi în grade sexagesimale și cu c^g valoarea aceluiași unghi în grade centesimale, avem relația $10\,n^\circ = 9\,c^g$.

Soluție. Aplicăm regula de trei simplă.

Dacă la 360°........400^g atunci

$$\frac{n^\circ}{360^\circ} = \frac{c^g}{400^g} \quad \text{sau} \quad 10\,n^\circ = 9\,c^g.$$

1.15. O rază de lumină SO este reflectată de o oglindă plană după direcția OS'. Se rotește apoi oglinda

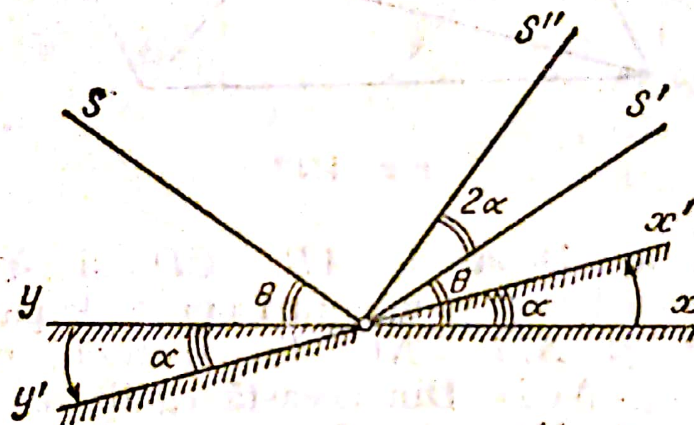


Fig. 1.15

cu un unghi α și fie OS'' raza reflectată. Să se arate că unghiul razelor reflectate este 2α.

(Proprietate folosită la construirea sextantului și a altor aparate de măsurat în fizică).

Soluție. Avem $\sphericalangle SOy = \sphericalangle S'Ox = \theta$, iar după rotire avem $\sphericalangle SOy' = \sphericalangle S''Ox'$ de unde

$$\theta + \alpha = \theta - \alpha + \sphericalangle S'OS'' \Rightarrow \sphericalangle S'OS'' = 2\alpha.$$

1.16. În dreptunghiul $ABCD$ bisectoarea unghiului B și diagonala ce pleacă din acest vîrf fac între ele un unghi de 15°. Bisectoarea intîlnește diagonala AC în P și latura DC în E. Să se arate că triunghiurile COE și POE sînt isoscele, O fiind intersecția diagonalelor.

Soluție. BE fiind bisectoare, $\sphericalangle CBE = 45°$, însă $\sphericalangle EBD = 15°$, deci $\sphericalangle CBD = 60°$ și rezultă că $\sphericalangle ABD = 30°$. Triunghiul OBC este echilateral iar triunghiul BCE este isoscel, deci $OC = OB = BC = CE$,

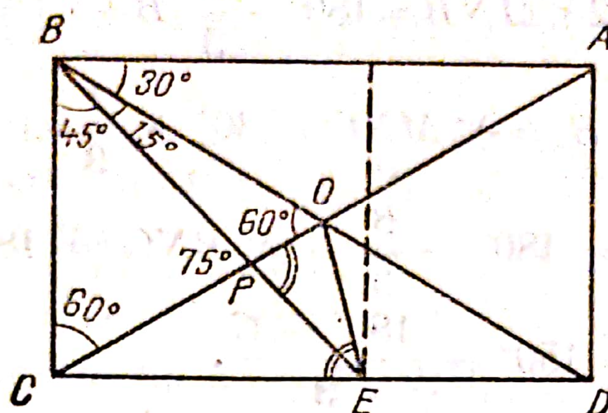


Fig. 1.16

adică triunghiul COE este isoscel. $\sphericalangle COE = \sphericalangle OEC = = \frac{180° - 30°}{2}$; însă și $\sphericalangle OPE = \sphericalangle BPC = 180° - - 45° - 60° = 75°$, deci și triunghiul POE este isoscel.

1.17. Într-un triunghi oarecare ABC se duc trisectoarele unghiurilor B și C. Fie M punctul de intersecție al acestor trisectoare cel mai apropiat de latura BC și N punctul de intersecție al celorlalte două trisectoare. Să se calculeze unghiurile NMB, NMC și BMC în funcție de unghiurile A, B, C.

Soluție. Avem $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MCB = \frac{B + C}{3}$;

$\sphericalangle BMC = \frac{A}{3} + 120°$.

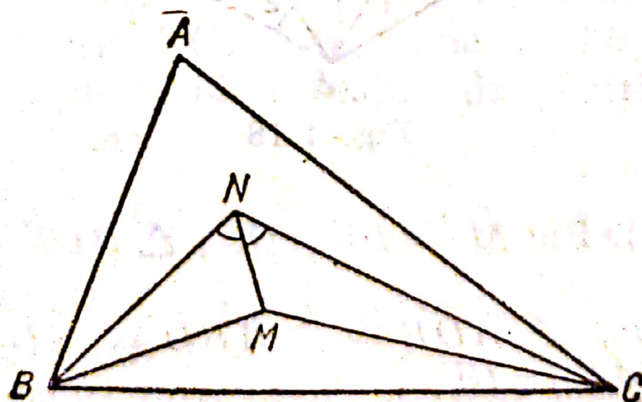


Fig. 1.17

În triunghiul BNC, BM și CM sînt bisectoare, deci MN este a 3-a bisectoare astfel că:

$$\sphericalangle MNB = \sphericalangle MNC;$$

$$\sphericalangle BNC = 2\sphericalangle MNB = 180° - \frac{2}{3}(B+C) = 60° + \frac{2}{3}A.$$

$$\Rightarrow \sphericalangle MNB = \sphericalangle MNC = 30° + \frac{A}{3}.$$

$$\sphericalangle NMB = 180° - \frac{B}{3} - \sphericalangle BNC = 180° - \frac{B}{3} -$$

$$- 30° - \frac{A}{3} = 150° - \frac{180° - C}{3}.$$

Analog $\sphericalangle NMC = 90° + \dfrac{B}{3}.$

1.18. Se dă dreptunghiul $ABCD$. Fie E piciorul perpendicularei dusă din A pe diagonala BD. Se prelungește AE cu segmentul $EF = AE$.

a). Să se arate că $BF \perp DF$.

b). Să se arate că patrulaterul $BDFC$ este trapez isoscel.

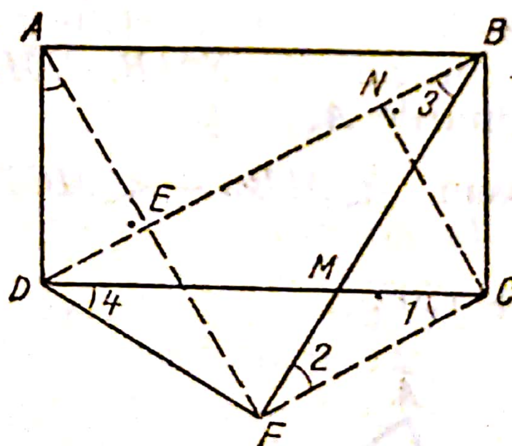


Fig. 1.18

Soluție. a). Fie $M = BF \cap DC$; $\triangle ADF$ și $\triangle ABF$ sînt isoscele.

$AB = BF$; $\triangle ADB = \triangle ABD \Leftrightarrow (AD = DF;$ $BD = BD;$ $AB = BF)$.

$\sphericalangle DAB = \sphericalangle BFD = 90°$, deci $BF \perp DF$.

b). Avem $DF = AB$; $DF = BC \Rightarrow \triangle DFC = \triangle BCF$.

$BF = DC = AB$; $\sphericalangle MCF = \sphericalangle MFC \Rightarrow MC = MF \Rightarrow MB = MD$;

$FC \parallel BD$; $AE = EF$; $CF \parallel BD \Rightarrow BDFC$ este trapez isoscel.

1.19. Pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi oarecare se iau punctele A_1, B_1, C_1 astfel că:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2}.$$

Fie A_2 intersecția dreptelor BB_1 cu CC_1; B_2 intersecția dreptelor AA_1 cu CC_1 și C_2 intersecția dreptelor AA_1 cu BB_1. Să se arate că:

aria $A_2B_2C_2$ = aria AB_2C_1 + aria BC_2A_1 + aria CA_2B_1

(R.M.F., 45, 1951, *C. Ionescu-Țiu*).

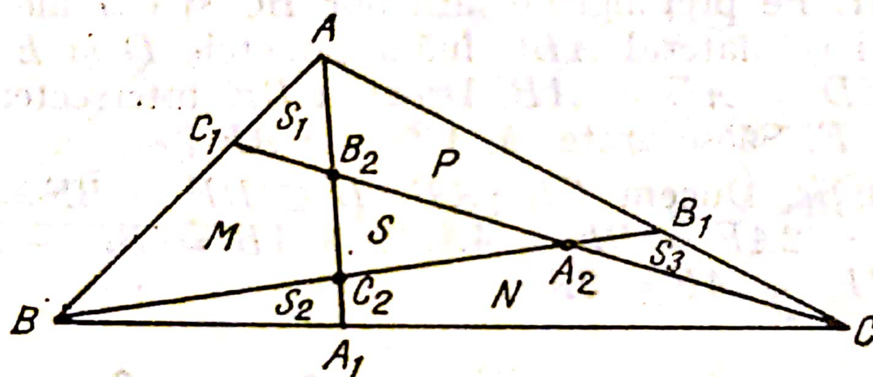


Fig. 1.19

Soluție. Notăm aria $A_2B_2C_2 = S$; aria $AB_2C_1 = S_1$; aria $BC_2A_1 = S_2$; aria $CA_2B_1 = S_3$; aria $BC_2B_2C_1 = M$; aria $A_1CA_2C_2 = N$; aria $B_1AB_2A_2 = P$ și aria $ABC = A$. Ținînd seama de poziția punctelor A_1, B_1, C_1 avem:

$\frac{A}{3} = S_1 + S_2 + M = S_2 + S_3 + N = S_3 + S_1 + P$ sau

$A = 2(S_1 + S_2 + S_3) + M + N + P$. Mai ținem seama că

$A = S_1 + S_2 + S_3 + M + N + P + S \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = S$.

1.20. Fie H punctul de întîlnire al înălțimilor unui triunghi echilateral ABC. Perpendiculara din A pe AB întîlnește dreapta BH în punctul B_1, iar perpendiculara din A pe AC întîlnește dreapta CH în punctul C_1.

a). Să se arate că figura AB_1HC_1 este romb.

b). Să se arate că dublul ariei ABC este triplul ariei AB_1HC_1.

Soluție. a). CA_1 este paralela cu HB_1 și HC_1 este paralelă cu AB_1. Pe motive de simetrie $AC_1 = AB_1$, paralelogramul cu laturile egale este romb.

b). $\sphericalangle AB_1H = 60°$; AB este egală și paralelă cu HC; $B_1C_1 = BC$.

Aria rombului AB_1HC_1 este $\dfrac{B_1C_1 \cdot AH}{2} = \dfrac{BC \cdot AH}{2}$.

Aria triunghiului ABC este $\dfrac{1}{2} BC \cdot \dfrac{2}{3} AH$.

1.21. Pe prelungirile laturilor BC și CA ale triunghiului echilateral ABC luăm punctele D și E astfel încît $CD = AE = AB$. Dreapta DE intersectează pe AB în F. Să se arate că $AB = 3\,AF$.

Soluție. Ducem $CH \parallel AB$, $H \in DE \Rightarrow BF = 2CH$ și $CH = 2AF \Rightarrow BF = 4AF$ sau $AB = BF - AF = 4AF - AF = 3AF$.

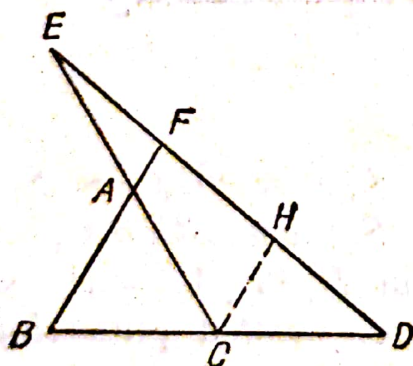


Fig. 1.21

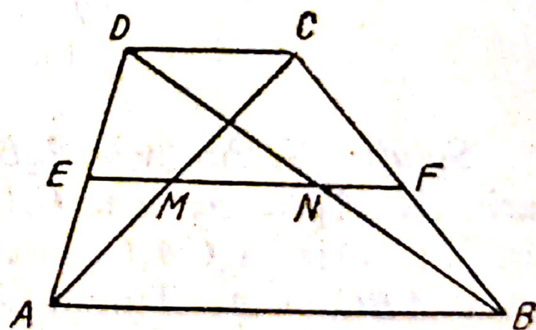


Fig. 1.22

1.22. Să se demonstreze că într-un trapez, dreapta care unește mijloacele laturilor neparalele este paralelă cu bazele, trece prin mijloacele diagonalelor, este egală cu semisuma bazelor, iar partea cuprinsă între diagonale este egală cu semidiferența bazelor.

Soluție. Fie trapezul $ABCD$ și $AE = ED$, $D \in AD$; $BF = FC$, $C \in BC$, $AM = MC$, $M \in AC$ și $BN = ND$, $N \in BD$. Avem

$$EM = NF = \frac{DC}{2},\ MF = \frac{AB}{2};\ EF = EM + MF = \frac{DC + AB}{2} \text{ și } MN = MF - NF = \frac{AB - DC}{2}.$$

1.23. Două echere dreptunghice egale ABC și $A'B'C'$ se așează în pozițiile din figură. Să se arate că:

a). HB' este înălțime în triunghiul $CC'B$;

b). MA' este mediană în triunghiul $CC'A'$;

c). LB' este bisectoare în triunghiul $CB'C'$.

(R.M.F., 518, 1952, *Gh. Bazacov*).

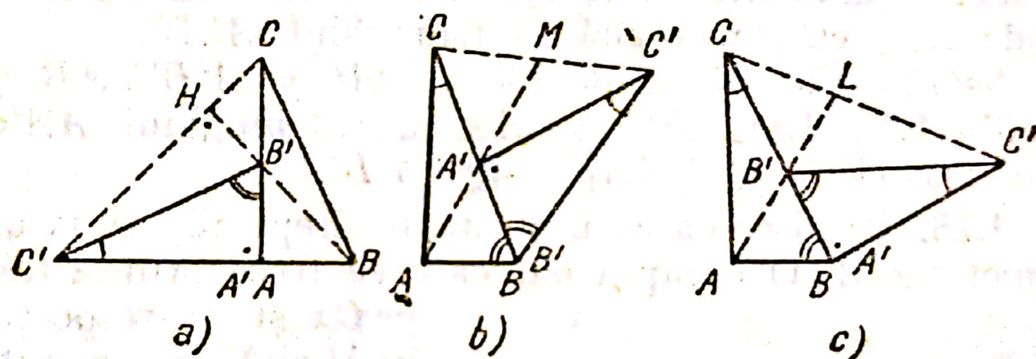


Fig. 1.23

Soluție. a) Avem $\sphericalangle ABC + \sphericalangle A'C'B' = 90° \Rightarrow B'C' \perp BC$, deci B' este ortocentrul triunghiului $BC'C$.

b). Triunghiurile ABA' și $CB'C'$ sînt isoscele și au unghiul $\sphericalangle CA'M = \sphericalangle AA'B = \sphericalangle A'CM \Rightarrow A'M$ este mediană în triunghiul $CA'C'$.

c). $\sphericalangle AB'C = \sphericalangle A'AB' + \sphericalangle ABC$. De asemenea avem $\sphericalangle AB'C' = \sphericalangle AB'B + \sphericalangle A'B'C' \Rightarrow \sphericalangle CB'A = \sphericalangle AB'C'$, adică LB' este bisectoarea unghiului $CB'C'$.

1.24. Să se demonstreze că picioarele perpendicularelor duse din vîrful A al triunghiului ABC pe bisectoarele unghiurilor B și C sînt patru puncte coliniare.

Soluție. Patrulaterul AB_1BH_2 este dreptunghi, în care AB este diagonală, iar B_1B_2 trece prin mijlocul lui AB și este paralelă cu BC. Din dreptunghiul AC_1CC_2 rezultă că C_1C_2 trece prin mijlocul lui AC și este paralelă cu BC, deci B_2, C_1, B_1, C_2 sînt patru puncte coliniare situate pe o paralelă la BC.

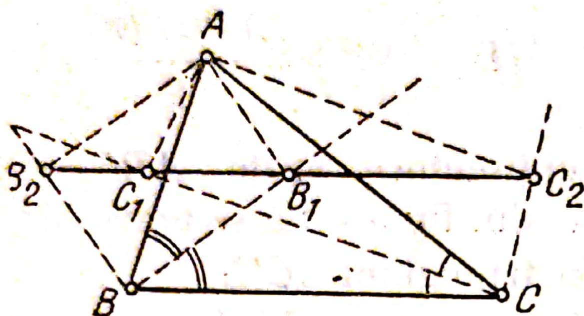


Fig. 1.24

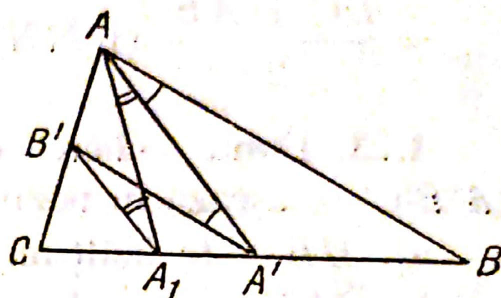


Fig. 1.25

1.25. Dacă în triunghiul ABC avem $BC = 2AC$, atunci mediana AA' este bisectoarea unghiului BAA_1, unde AA_1 este mediană în triunghiul $A'AC$.

Soluție. Fie B' mijlocul lui $AC \Rightarrow A'B' \parallel AB$ și $A_1B' \parallel AA'$. Dar, $AC = CA'$, deci triunghiul $AA'C$ este isoscel. $\Rightarrow \sphericalangle A'AA_1 = \sphericalangle AA'B'$.

1.26. Pe bisectoarea unui unghi drept xOy se ia un punct fix A. O dreaptă oarecare ce trece prin A taie pe Ox și Oy respectiv în M și N. Să se arate că $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{k}$.

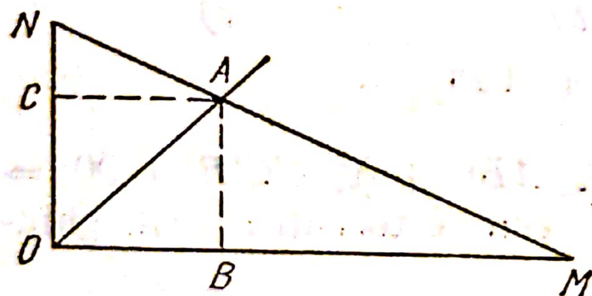


Fig. 1.26

Care este interpretarea geometrică a constantei k?

Soluție. Fie B și C proiecțiile lui A pe Ox și Oy; $AB=AC=h$; aria OMN=aria OAN+aria OAM;

$$\frac{OM \cdot ON}{2} = \frac{ON \cdot h}{2} + \frac{OM \cdot h}{2} \Rightarrow 1 = \frac{h}{OM} + \frac{h}{ON} \quad \text{sau}$$

$\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{h}$, deci $k = h$ distanța de la A la laturile unghiului xOy, sau $k = \frac{OA}{\sqrt{2}}$.

1.27. Perpendicularele duse pe bisectoarele interioare AI, BI, CI ale unui triunghi ABC în punctul lor comun I, intersectează laturile triunghiului astfel: perpendiculara pe AI în $B_1 \in AC$ și $C_1 \in AB$, perpendiculara pe BI în $C_2 \in AB$, $A_2 \in BC$, perpendiculara pe CI în $A_3 \in BC$ și $B_3 \in AC$. Dacă $P_1 = (BB_3 \cap CC_2)$, $P_2 = (CC_1 \cap AA_3)$ și $P_3 = (AA_2 \cap BB_1)$, atunci dreptele AP_1, BP_2, CP_3 sînt concurente.

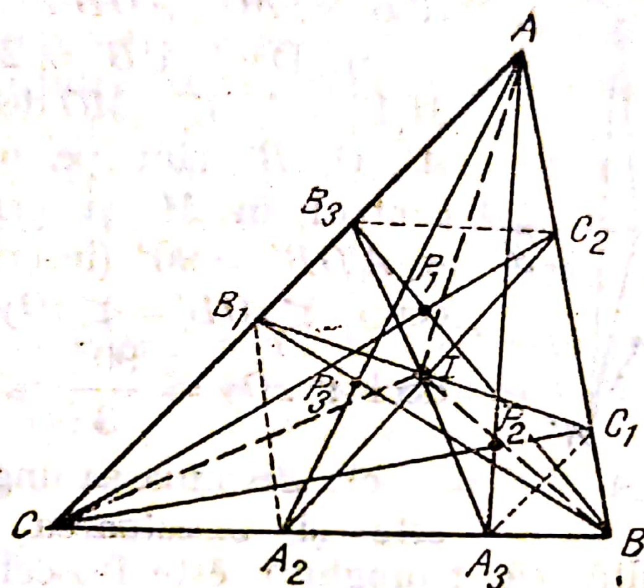


Fig. 1.27

Soluție. Avem $IB_1 = IC_1$, $IC_2 = IA_2$, $IA_3 = IB_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow B_3C_2 \parallel BC$. P_1 este situat pe mediana din A. Dreapta AP_1 trece prin intersecția diagonalelor BB_3 și CC_2 ale trapezului BCB_3C_2, deci AP_1 se suprapune pe mediana triunghiului ABC dusă din A. Analog BP_2 și CP_3 se suprapun pe medianele triunghiului ABC duse respectiv din B și C.

1.28. Pe laturile unui unghi ascuțit xOy se consideră punctul A pe Ox și B pe Oy. Se notează cu A' simetricul lui A față de Oy și cu B' simetricul lui B de Ox iar M este mijlocul segmentului $A'B'$.

a). Să se arate că $A'B = AB'$ și că $A'B' < OA + OB$.

b). Pentru ce valoare a unghiului xOy are loc relația $A'B' = 2OM$?

c). Considerînd punctul A fix să se afle poziția lui B pe Oy astfel ca M să fie situat pe bisectoarea unghiului xOy.

(G.M.B., 10414, Concurs elevi).

Soluție. a). Triunghiul ABA' este isoscel deci $AB = BA'$. Triunghiul ABB' este isoscel deci $AB = AB'$ sau $A'B = AB'$. Avem $OA = OA'$ și $OB = OB'$ însă evident că $A'B' < AO' + OB'$.

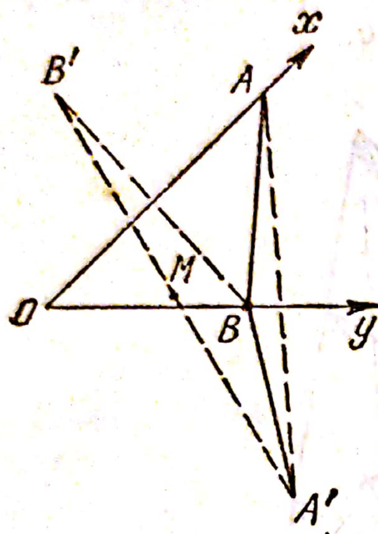


Fig. 1.28

b). Dacă $A'B' = 2OM$ atunci $MA' = MB' = MO$ deci punctele A', O, B' sînt pe un cerc cu centrul în M și prin urmare $\sphericalangle A'OB' = 90°$ (înscris în semicerc). $\sphericalangle xOB' = \sphericalangle xOy = \sphericalangle yOA'$, deci $\sphericalangle xOy = \frac{90°}{3} = 30°$.

c). Bisectoarea unghiului xOy este și bisectoarea unghiului $A'OB'$, rezultă că triunghiul este isoscel și trebuie ca OA și OB să fie egale.

1.29. Pe laturile AB, BC, CA ale unui triunghi echilateral se iau respectiv punctele M, N, P, astfel încît $AM = BN = CP$. Dreapta AN se taie cu BP și cu CM respectiv în A_1 și C_1, iar CM se taie cu BP în B_1. Să se arate că: a). triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral; b). ortocentrele acestor două triunghiuri echilaterale se găsesc în același punct.

(G.M.B., 4338, *C. Georgescu*).

Soluție. a). Triunghiul CNA este egal cu triunghiul BAP și BMC fiindcă au cîte două laturi și unghiul cuprins, respectiv egale. Rezultă:

$$AN = BP = CM; \text{ și } \sphericalangle CAN = \sphericalangle ABP = \sphericalangle BCP.$$

$\triangle ACC_1 = \triangle BAA_1 = \triangle CBB_1$, fiindcă au $AC = AB = BC$ și unghiurile adiacente acestor laturi respectiv egale. Rezultă:

$$CC_1 = AA_1 = BB_1 \text{ și } AC_1 = BA_1 = CB_1.$$

Prin scădere, găsim $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$.

b). Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Trebuie să arătăm că $HA_1 = HB_1 = HC_1$.

$\triangle HAA_1 = \triangle HBB_1 = \triangle HCC_1$ fiindcă $HA = HB = HC$, și $\sphericalangle HAA_1 = 30° - \sphericalangle CAN$; $\sphericalangle HBB_1 = 30° - \sphericalangle ABP$; $\sphericalangle HCC_1 = 30° - \sphericalangle BCP$.

1.30. Se dă un trapez oarecare $ABCD$ (AB este baza mare). Fie M, mijlocul laturii BC și P, intersecția lui AM cu paralela dusă din D la BC. Dîndu-se $AM = AB$, se cere: a). Să se arate că $MD = CP$; b). Ce legătură este între bazele trapezului atunci cînd P este la mijlocul lui AM; c). În cazul cînd $AP = PM$ să se construiască trapezul $ABCD$ cunoscînd $AB = m$ și $DP = n$ și să se arate că AC, DP, MN sînt concurente.

(G.M.B., 3772, *C. Georgescu*).

Soluție. a) Patrulaterul $MCDP$ este trapez isoscel ($MC \parallel DP$, $\sphericalangle C = \sphericalangle M$ avînd același suplement), deci diagonalele MD și CP sînt egale.

b). Cînd P este la mijlocul lui AM, $CD = PM = \frac{AB}{2}$, deci $AB = 2CD$.

c). Se construiește trapezul isoscel $CDPM$ ale cărui laturi sînt cunoscute, căci: $CD = PM = \frac{m}{2}$, $DP = l$ și $CM = \frac{2}{3}l$ (căci DP și MN sînt mediane în triunghiul ADM și intersecția lor Q dă $DQ = CM = \frac{2}{3}DP$). Prelungind CM cu $MB = CM$ și ducînd $BA = 2CD$ și $BA \parallel CD$, găsim trapezul $ABCD$. Q fiind centrul de greutate al triunghiului ADM, AQ trebuie să treacă prin mijlocul lui DM, care este centrul paralelogramului $CDQM$, deci AQ trece prin C (sau AC prin Q).

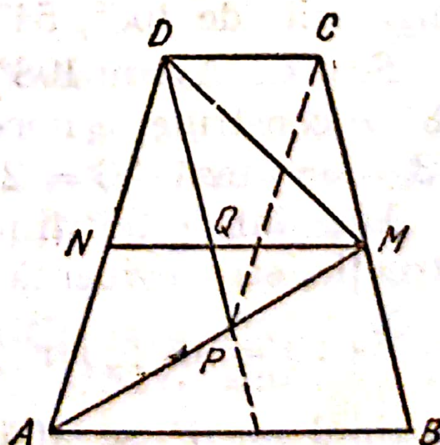


Fig. 1.30

1.31. Se dă triunghiul echilateral ABC şi un punct M pe latura BC. Din M se duce perpendiculara MP pe AC, care întîlneşte prelungirea laturii AB în D. Să se arate că: a). $MB = BD$; b). $AB = 2(CP + BN)$, N fiind mijlocul lui MD; c). Să se găsească locul geometric al lui N, cînd M se mişcă pe BC, rămînînd în interiorul acestei laturi.

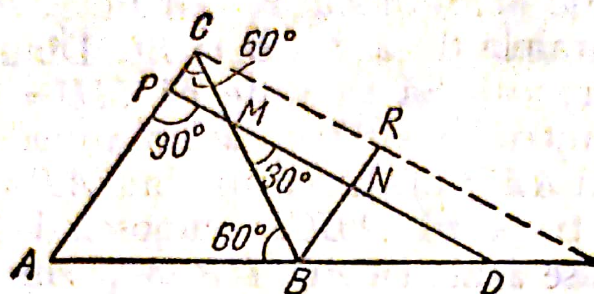


Fig. 1.31

Soluţie. a). Unghiurile din M şi D ale triunghiului BMD sînt egale, avînd cîte 30° fiecare; rezultă $BM = MD$. b). În triunghiul dreptunghic CMP, cu unghiul din M de 30°, $MC = 2CP$; în triunghiul dreptunghic BMN, la fel, găsim că $BM = 2BN$, deci $MC + BM = BC = AB = 2(CP + BN)$. c) Triunghiul BDM fiind isoscel, mijlocul bazei este piciorul bisectoarei unghiului B care are 120° şi are o poziţie fixă. Locul lui N este pe această bisectoare, care este paralelă cu AC, limitat la segmentul $BR = \frac{AC}{2}$.

1.32. Folosind rigla şi compasul să se împartă unghiurile de 108°, 54° şi 27° în cîte 3 părţi egale.

Soluţie. Avem $108° - 90° = 18°$. Deci unghiul de 18° se construieşte imediat scăzînd 90° din 108°. $108° : 3 = 36°$ însă $36 = 2 \times 18$.

Unghiul de 36° fiind dublul unghiului de 18°, construcţia este evidentă prin dublarea unghiului:

$54 : 3 = 18°$; iar $27° : 3 = 9°$ dar 9° este $\frac{18}{2}$;

unghiul de 9° se află ducînd bisectoarea unghiului de 18°.

1.33. Să se arate că dacă M, N, P sînt puncte situate respectiv pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC, nu pe prelungiri, avem:

$$(BC + CA + AB) < 2(AM + BN + CP) <$$
$$< 3(BC + CA + AB).$$

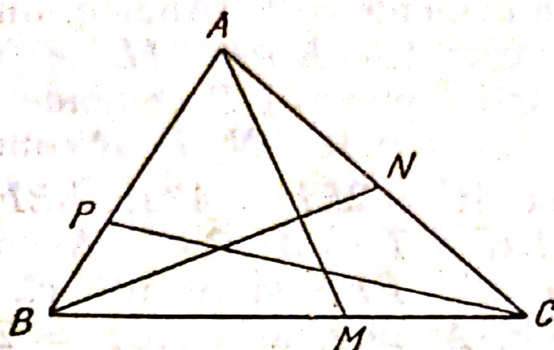


Fig. 1.33

Soluție. Avem $AB - MB < AM < AB + MB$ și $AC - MC < AM < AC + MC \Rightarrow \frac{AB + AC - BC}{2} <$ $< AM < \frac{AB + BC + AC}{2}$, analog:

$$\frac{AB - AC + BC}{2} < BN < \frac{AB + BC + AC}{2};$$

$$\frac{-AB + AC + BC}{2} < CN < \frac{AB + BC + AC}{2}.$$

Prin adunare, deducem inegalitatea cerută.

1.34. Într-un patrulater $ABCD$ notăm cu $E, F, G, H, L, M, N, P, R$ respectiv mijloacele segmentelor $AB, BC, CD, DA, DB, AC, HF, LM, EG$. a). Să se arate că punctele N, P, R coincid; b). dacă patrulaterul $ABCD$ este convex, atunci aria $ABCD = 2$ aria $EFGH$; c). patrulaterele $EFGH, HLFM, MELG$ sînt paralelograme.

(G.M., E: 5153, *C. Ionescu-Țiu*)

Soluție. a)., c). Patrulaterul $EFGH$ este paralelogram deoarece vîrfurile lui sînt mijloacele laturilor unui patrulater. Laturile paralelogramului sînt paralele cu diagonalele AC și BD care se taie în punctul N care coincide cu R, deoarece diagonalele EG și HF se taie mutual în părți egale. La fel patrulaterul $HLFM$ este paralelogram, iar diagonalele sale LM și HF se taie în punctul P care coincide cu N. Analog, din paralelogramul $MELG$ diagonalele EG și ML se taie mutual în părți egale și astfel punctul R coincide cu punctul P și astfel rezultă că punctele N, P, R coincid.

b). Deoarece $AC = 2EF \Rightarrow 4$ aria $BEF =$ aria ABC. Fie $S = AC \cap EH$ și $T = AC \cap FG$. Avem aria $AES +$ + aria $FTC =$ aria BEF și rezultă că aria $ABC =$ $= 2$ aria $ESTF$. Analog, aria $ACD = 2$ aria $HSTG$, astfel că enunțul devine evident.

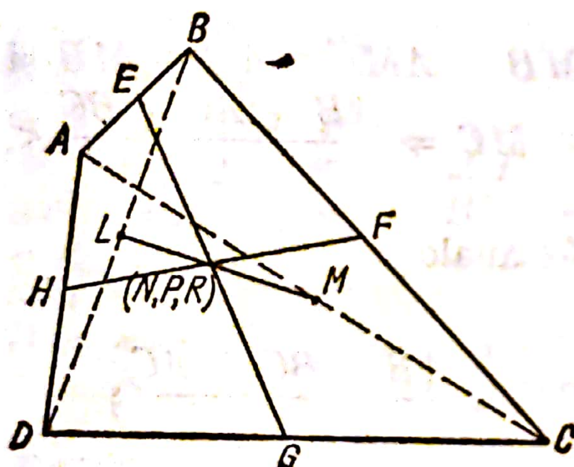


Fig. 1.34

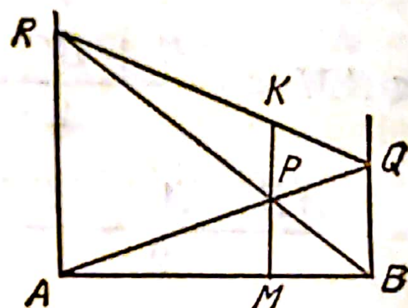


Fig. 1.35

1.35. Se dă o dreaptă (D) și în exteriorul ei un punct fix P. Prin P se duc două drepte variabile care taie pe (D) în A și B. Prin A și B se ridică perpendiculare pe dreapta (D) care intersectează dreptele variabile în Q și R. Să se arate că dreapta QR trece printr-un punct fix și să se determine acest punct.

(G.M.B., 6555, *A. Roman*).

Soluție. Oricare ar fi dreptele ce trec prin P, patrulaterul $ABRQ$ este un trapez, punctul P fiind intersecția diagonalelor. Ducînd prin P o perpendiculară pe (D),

aceasta întîlnește pe (D) în M și pe QR în K; dreapta MK este paralelă cu bazele trapezului și trece prin intersecția diagonalelor, prin urmare $PM = PK$. Dar PM fiind fix ca mărime și poziție, urmează că și segmentul PK rămîne fix. Dreapta QR trece prin punctul fix K situat pe perpendiculara PM, astfel că $PK = PM$.

1.36. Un triunghi isoscel ABC are $AB = AC = 2BC$. Se duce înălțimea AP, mediana BM și bisectoarea CL. Pe latura AC se ia un punct D astfel ca $BD = BC$. Notăm cu N intersecția dintre BD și CL. Să se demonstreze că: a). BM este bisectoare în triunghiul ABD; b). BD este mediană în triunghiul BCM; c). patrulaterul $BLMN$ este un romb.

(G.M.B., 5297, *Gh. Bazacov*).

Soluție. a). Din datele problemei avem trei triunghiuri ABC, BDC și BCM. Se deduce ușor că: $\sphericalangle CBD = \sphericalangle A$ iar $\sphericalangle BMC = \sphericalangle MBC = \sphericalangle A + \sphericalangle B_2$. Dar $\sphericalangle BMC$ este exterior triunghiului ABM și deci: $\sphericalangle BMC = \sphericalangle A + \sphericalangle B_1$ atunci $\sphericalangle A_1 + \sphericalangle B_1 = \sphericalangle A_2 + \sphericalangle B_2$ și deci BM este bisectoare în triunghiul ABD.

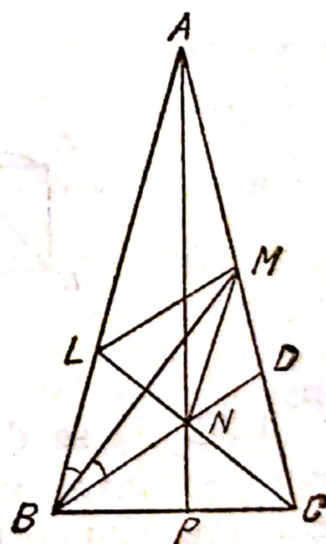


Fig. 1.36

b). Ducem prin M paralela MM' la BC. Dar M este mijlocul lui AC și atunci MM' este linie mijlocie în triunghiul ABC. Rezultă că $MM' = \frac{BC}{2} = \frac{MC}{2}$. Triunghiurile isoscele MAM' și CBD sînt egale fiindcă au $\sphericalangle A = \sphericalangle CBD$ și $BC = AM$; rezultă că $MM' = DC$; dar $MM' = \frac{MC}{2}$ și deci $DC = \frac{MC}{2}$.

c). Unim pe M cu L și N. Patrulaterul $BLMN$ are diagonalele perpendiculare, fiindcă bisectoarea CL este bisectoare și în triunghiul isoscel BCD, unde C este unghiul de la vîrful triunghiului $(BC = CM)$. Rezultă că CO este totodată mediatoare în triunghiul isoscel BCM. Punctele N și L fiind situate pe mediatoarea seg-

mentului BM avem $NB = NM$ şi $LB = LM$. În plus, BO în triunghiul BLN este bisectoare şi înălţime; rezultă că triunghiul LBN este isoscel şi deci $BL = BN$. Atunci avem $BN = BL = ML = MN$. Figura $BLMN$ este romb.

1.37. Laturile opuse AB, CD ale patrulaterului $ABCD$ se întîlnesc în E; AD, BC în F. Se iau pe dreptele AE, DE, BF, AF în prelungire segmentele $EH = AB$, $EK = CD$, $FL = BC$, $FM = DA$. Să se arate că figura $HKLM$ este un paralelogram.

Soluţie. Prin D şi B ducem paralele respectiv la AB şi AD care se intersectează în punctul O. Triunghiul EHK este egal cu triunghiul DOC; iar triunghiul FLM este egal cu triunghiul $BOC \Rightarrow CO = \parallel HK$ şi $CO = \parallel LM$, deci figura $HKLM$ este paralelogram.

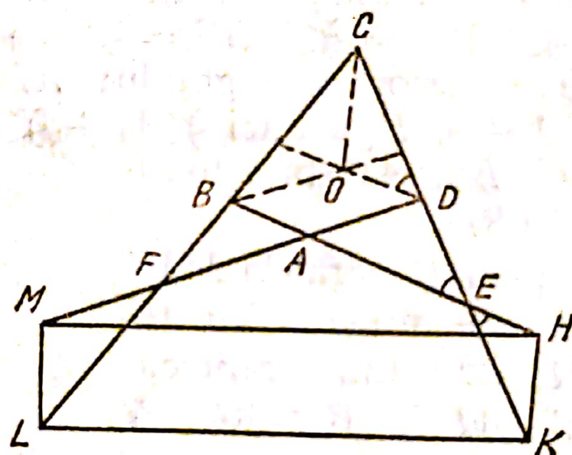


Fig. 1.37

1.38. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor cuprinse între vîrfurile şi ortocentrul unui triunghi oarecare sînt ortocentrele triunghiurilor care au ca vîrfuri respective cîte unul din vîrfurile triunghiului considerat şi mijloacele laturilor ce pleacă din acest vîrf.

(G.M.B., 952, *C. Ionescu-Ţiu*).

Soluţie. Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC (BC, CA, AB). În triunghiul $AB'C'$, spre exemplu, înălţimea din A coincide cu înălţimea triunghiului ABC, întrucît BC şi $B'C'$ sînt paralele.

Înălțimea din B' pe AC' este paralelă cu CH și întrucît $AB' = B'C$, ea taie AH în mijlocul acesteia. Analog pentru înălțimea din C'.

1.39. Latura pătratului $ABCD$ este egală cu a. Pe diagonala AC se ia punctul P astfel, încît $PC = \frac{AC}{4}$. Fie E intersecția lui BP cu CD, O centrul pătratului și M intersecția lui BP cu perpendiculara din O pe BC.

1). Să se calculeze CE;
2). Să se arate că triunghiul OEM este isoscel.

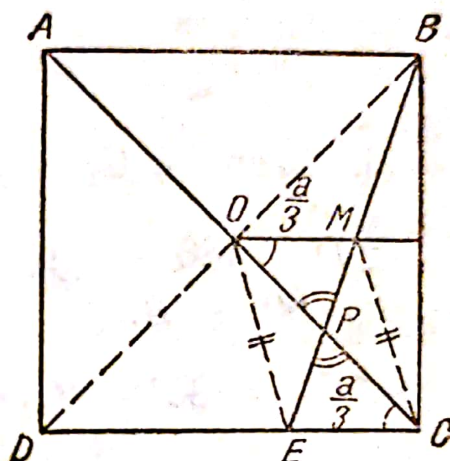


Fig. 1.39

Soluție. M este centrul de greutate al triunghiului BOC, deci

$$OM = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3}.$$

Pe de altă parte, din egalitatea triunghiurilor CEP și OMP (care au $OP = PC$ și unghiurile $O = C$, $P = P_1$) rezultă că $CE = OM$, deci $CE = \frac{a}{3}$. Ținînd seama că patrulaterul $OMCE$ este paralelogram, rezultă:

$$OE = MC = MB = ME.$$

1.40. Într-un triunghi oarecare ABC perpendiculara în C pe BC întîlnește dreapta AB în D, iar bisectoarea unghiului C taie latura AB în E. Să se arate că bisectoarele unghiurilor B și C se taie în M formînd unghiul BME egal cu $\frac{B+C}{2}$. Se mai cere să se calculeze unghiurile triunghiului CDE în funcție de A, B, C.

Soluție. 1). $\sphericalangle M = 180° - \sphericalangle M_2 = B_1 + C_1 = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{B+C}{2}$. (1)

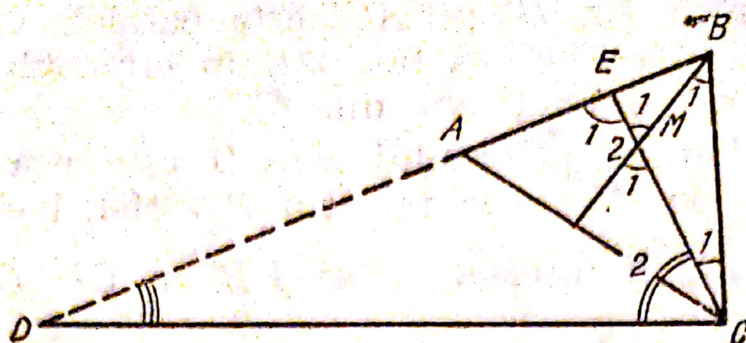


Fig. 1.40

2). Avem: $\sphericalangle C_2 = \sphericalangle BCD - \sphericalangle C_1 = 90° - \frac{C}{2}$. (2)

$\sphericalangle D = 180° - (\sphericalangle BCD + \sphericalangle ABC) = 180° - 90° - B = 90° - B.$ (3)

$\sphericalangle E_1 = 180° - (C_2 + D) = 180° - \left(90° - \frac{C}{2} + 90° - B\right) = B + \frac{C}{2}.$ (4)

1.41. Într-un triunghi ABC dreptunghic în A, perpendiculara în C pe BC întîlnește pe AB în D, iar bisectoarea unghiului C taie latura AB în E. Să se arate că bisectoarele unghiurilor B și C se taie formînd un unghi de 45° și că segmentele CD și DE sînt egale.

(G.M.B., E. 508, *C. Ionescu-Țiu*).

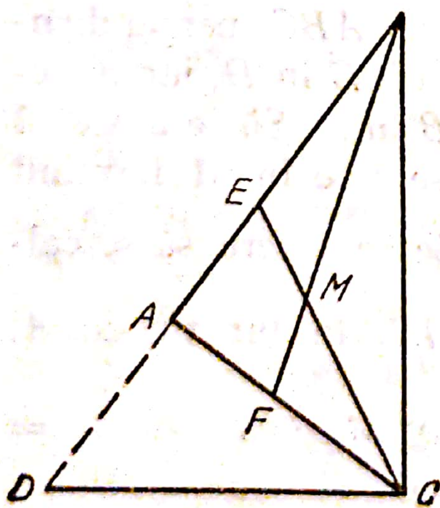


Fig. 1.41

Soluție. Să demonstrăm că dreptele BF și CE se taie formînd un unghi de 45°. $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MCD = \frac{90}{2} = 45°$ (deoarece $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 90°$, iar BF și CE sînt bisectoare). Unghiul CMF este exterior triunghiului MBC, deci egal cu $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MCD = 45°$. Deci este egal cu $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MCD = 45°$.

Deci, bisectoarele BF și CE se taie formînd unghiul $CMF = \sphericalangle BME = 45°$.

Pentru a arăta că $CD = DE$ trebuie să demonstrăm că triunghiul DCE este isoscel cu unghiurile DEC și DCE egale. $\sphericalangle DEC = 90° - \sphericalangle ACE$ (în triunghiul AEC); $\sphericalangle DCE = 90° - \sphericalangle BCE = 90° - \sphericalangle ACE$. Rezultă că unghiurile DEC și DCE sînt egale. Deci, triunghiul DEC este isoscel și $DE = DC$.

1.42. Se dă triunghiul ABC. Pe latura AB se ia punctul M astfel ca segmentul AM să fie 3/8 din latura AB, iar pe latura BC se ia punctul N astfel ca segmentul BN să fie 4/9 din latura BC. Să se fixeze pe latura AC un punct P, astfel ca aria patrulaterului $AMNP$ să reprezinte 30% din aria triunghiului ABC.

(G.M.B., E: 2205).

Soluție. Dacă BN este 4/9 din BC, atunci NC este 5/9 din BC. Rezultă că ariile triunghiurilor ABN și ACN, cu aceeași înălțime, sînt 4/9 și respectiv 5/9 din aria triunghiului ABC. Aria patrulaterului $AMNP$ este suma ariilor triunghiurilor AMN și APN.

Aria triunghiului AMN este 3/8 din aria triunghiului ABN, sau $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$ din aria triunghiului ABC.

Aria triunghiului APN completează 30% din aria triunghiului ABC, adică este $\frac{30}{100}-\frac{1}{6}=\frac{2}{15}$ din aria triunghiului ABC, sau $\frac{2}{15}\cdot\frac{5}{9}=\frac{6}{25}$ din aria triunghiului ACN. Rezultă că segmentul AP este $\frac{6}{25}$ din latura AC și deci punctul P se fixează pe latura AC la $\frac{6}{25}$ de la vîrful A.

1.43. În paralelogramul $ABCD$, fie $\sphericalangle A = 60°$, $AB = 2AD$ și M, N, P respectiv mijloacele laturilor AB și DC și piciorul perpendicularei din B pe DC. Să

se arate că AN, MP şi BC sînt concurente într-un punct Q.

(G.M.B., E: 3174, *D. Firu*).

Soluţie. Să arătăm că punctele M, P şi Q sînt coliniare. Punctul P este mijlocul segmentului NC pentru că $PC = \frac{BC}{2}$ iar $BC = NC$; AN şi MC sînt paralele şi egale deoarece $AMCN$ este paralelogram, ceea ce rezultă din faptul că NC şi AM sînt paralele şi egale. Deci MC şi BQ sînt paralele şi egale, prin urmare $MCQN$ este paralelogram. MQ şi NC fiind diagonale rezultă că se taie în P. Deci punctele M, P şi Q sînt coliniare şi deci dreptele AN, MP şi BC sînt concurente.

1.44. Într-un triunghi dreptunghic ABC ipotenuza este dublul catetei AB. Se duce bisectoare BD şi bisectoare DE a triunghiului BDC. a). Să se arate că triunghiurile ABD, DBE şi ECD sînt egale între ele; b). să se arate că triunghiul ABE este echilateral; c) să se arate. că se poate împărţi triunghiul dat ABC în 9 triunghiuri egale între ele.

(G.M.B., E: 4461, *C. Cărbunaru*).

Soluţie. Demonstrăm întîi teorema: „Dacă în triunghiul dreptunghic ABC o catetă, AB, este jumătate din ipotenuza BC atunci unghiul opus acestei catete, adică $\sphericalangle ACB$ este de 30°". Pentru aceasta prelungim pe BA cu un segment $AM = BA$, avem $BM = BC = 2AB$ şi deci $\triangle MBC$ este isoscel. În acest triunghi, AC este înălţime şi mediană deci el este isoscel avînd şi $BC = MC$. Din acest motiv, $BM = BC = MC \Rightarrow \triangle BMC$ este echilateral. Deoarece înălţimea AC este şi bisectoare rezultă că $\sphericalangle ACB = 30°$.

a). Din ipoteză şi teorema amintită, în $\triangle ABC$ avem $\sphericalangle ACB = 30° \Rightarrow \sphericalangle ABC = 60°$. Dacă BD este bisectoare, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBE = 30°$. În triunghiul dreptunghic ABD avem $\sphericalangle ADB = 90° - \sphericalangle ABD = 90° - 30° = 60°$. În acest fel, $\sphericalangle BDC = 180° - \sphericalangle ADB = 180° - 60° = 120°$. Dar DE este bisec-

toarea unghiului BDC. Obţinem $\sphericalangle BDE = \sphericalangle EDC = = \frac{120}{2} = 60°$. În $\triangle BDE$, $\sphericalangle DBE + \sphericalangle BDE = 30° + + 60° = 90°$, deci $\sphericalangle BED = 180° - 90° = 90°$ şi $\triangle BDE$ este dreptunghic. Asemănător deducem că $\triangle DEC$ este dreptunghic. Deoarece triunghiurile dreptunghice ABD, BDE şi DEC au laturile $AB = BE = EC = = \frac{BC}{2}$ şi $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDE = = \sphericalangle EDC = 60°$, rezultă că ele sînt egale între ele.

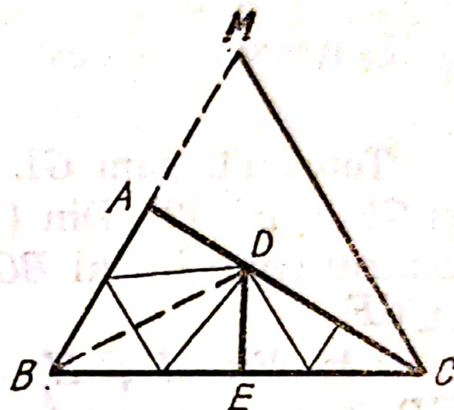


Fig. 1.44

b). Din egalitatea triunghiurilor dreptunghice BDE şi DEC rezultă că $BE = EC$. În acest fel, $\triangle ABE$ este isoscel căci $AB = BE = EC = \frac{1}{2} BC$. Cum acest triunghi are unghiul $ABE = 60°$ rezultă că este echilateral.

c). Din datele ipotezei, $\triangle ABC$ a fost împărţit în trei triunghiuri egale. Fiecare din aceste triunghiuri are unghiurile respectiv egale cu ale $\triangle ABC$. În acelaşi mod ca şi $\triangle ABC$ fiecare se poate împărţi în cîte trei triunghiuri egale, deci în 9, astfel: construim bisectoarele unghiurilor de cîte 60° cu vîrfurile în D, iar din picioarele lor, perpendiculare pe BD şi DC. Se obţin cele 9 triunghiuri egale.

1.45. Într-un dreptunghi $ABCD$ bisectoarea unghiului BAD taie diagonala BD în E, iar latura BC în F. Ştiind că paralela dusă din E la AB taie pe AC în G, să se arate că dreptele GF şi BD sînt perpendiculare.

Soluţie. Unim pe B cu G şi notăm intersecţia dreptelor AE şi BG cu I. Cum $AO = BO$ şi $GE \parallel AB$, rezultă că $AGEB$ este un trapez isoscel.

Totodată, unghiul $BAF = 45°$, deci unghiul $AIB = = 90°$, căci triunghiul AIB este isoscel ($AI = BI$). De aici rezultă că $IF \perp BG$ (1).

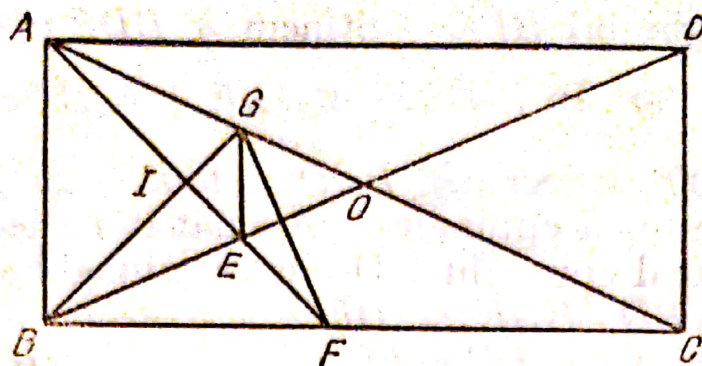


Fig. 1.45

Totodată, cum $GE \parallel AB$ și $AB \perp BC$ rezultă că și $GE \perp BF$ (2). Din (1) și (2) rezultă că E este ortocentrul triunghiului BGF și că $BE \perp MF$, sau $BD \perp GF$.

1.46. Fie M și N mijloacele laturilor opuse AB și CD ale unui patrulater convex $ABCD$. Să se arate că: aria ABN + aria CDM = aria $ABCD$.

(G.M., E: 5164, *C. Ionescu-Țiu*).

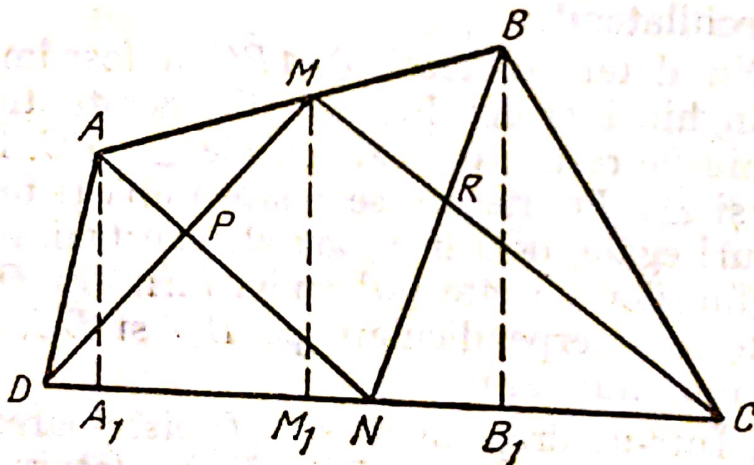


Fig. 1.46

Soluție. Aria $ABCD$ = aria ADN + aria ANB + aria BNC. Să arătăm că aria ADN + aria BNC = aria CDM. (1)

Fie A_1, M_1, B_1 proiecțiile punctelor A, M, B pe dreapta DC. Deoarece $AM = MB \Rightarrow AA_1 + BB_1 = 2MM_1$.

Mai avem $DN = NC = a$.

2 aria $(ADN) = a \cdot AA_1$; 2 aria $BNC = a \cdot BB_1$ și 2 aria $CDM = 2a \cdot MM_1$. De unde rezultă (1).

Observare. Notînd $P = AN \cap DM$ și $R = BN \cap CM$, obținem și relația:

$$\text{aria } ADP + \text{aria } BCR = \text{aria } MPNR. \qquad (2)$$

1.47. Se dă un unghi xOy și în interiorul lui două puncte oarecare A, B. Să se găsească un punct M pe Ox și alt punct N pe Oy astfel ca drumul $AMNB$ să fie cel mai scurt posibil.

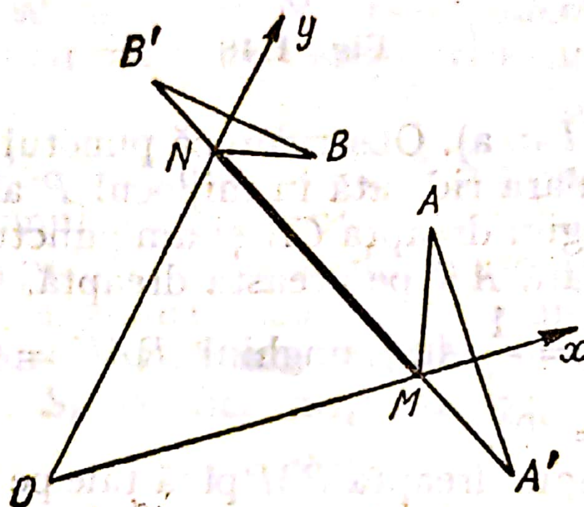


Fig. 1.47

Soluție. Se iau simetricele lui A față de Ox și lui B față de Oy. Dreapta $A'B'$ intersectează Ox și Oy în M respectiv N. Orice altă poziție a lui M și N dă pentru $A'MNB'$ o linie frîntă, deoarece punctele A' și B' rămîn fixe iar drumul cel mai scurt între A' și B' este segmentul de dreaptă $A'B'$.

1.48. Se dă triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$, $\sphericalangle A = 20°$. Pe AC se ia un punct M, iar pe AB un punct N, astfel că $\sphericalangle MBA = 20°$ și $\sphericalangle NCA = 30°$. Să se calculeze $\sphericalangle NMB$.

(G.M.B., E: 1796).

Soluția I. Ducem BE la 20° față de BC. Avem: $BC = BE$ (din triunghiul isoscel BCE); $BC = BN$ (din triunghiul isoscel BCN cu unghiurile de 80°, 50°, 50°). Însă $\sphericalangle NBE = 60°$, deci triunghiul BNE este echi-

lateral. Din triunghiul isoscel BEM (40°, 100°, 40°), $BE = ME$. Rezultă $NE = ME$, triunghiul NME este isoscel; unghiul lui din E fiind de $40° = (180° - 60° - 80°)$ rezultă $\sphericalangle NME = 70°$. Scăzînd unghiul $BME = 40°$ obținem $\sphericalangle NMB = 30°$.

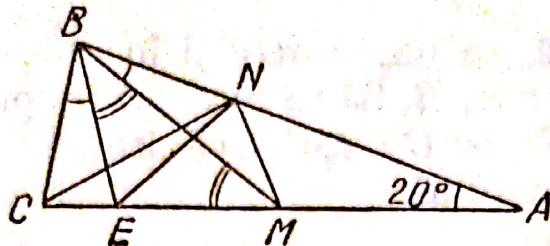


Fig. 1.48

Soluția a II-a. a). Observăm că punctul M se găsește pe perpendiculara ridicată în mijlocul P al laturii AB.

b). Prelungim dreapta CN și din punctul A coborîm o perpendiculară AR pe această dreaptă. Observăm că $AR = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB$, unghiul $RAC = 60°$, iar unghiul $RAB = 40°$.

c). Prelungim dreapta PM pînă taie pe CN în punctul Q și unim Q cu A. Observăm că triunghiurile dreptunghice ARQ și APQ sînt egale, avînd ipotenuzele egale (comune) și catetele $AR = AP$. Rezultă că AQ este bisectoare unghiului RAB. Așadar, fiecare din cele 3 unghiuri care se formează în vîrful A are 20°. Rezultă că unghiul $CQA = 110°$.

d). Unim Q cu B. Patrulaterul $AMBQ$ este un romb căci $QP = PM$ (din egalitatea triunghiurilor dreptunghice QAP și MAP care au cîte o catetă comună și un unghi ascuțit egal cu 20°), iar QM este perpendiculară pe mijlocul lui AB. Rezultă că unghiul $AQB = 140°$. De aici reiese că unghiul $BQC = 30°$. Dar unghiul $BQC = \sphericalangle NMB$. Așadar $\sphericalangle NMB = 30°$.

Soluția a III-a. Ducem din A perpendiculara AR pe NC; avem $AC = 2AR$ (triunghiul dreptunghic cu un unghi de 30°), deci: $\frac{AC}{AN} = 2\frac{AT}{AN}$. Ducem prin B dreapta BE care formează cu BM, 40°. Avem $BE = NC$ (triunghiul BCE are unghiurile 20°, 80°, 80°); deci:

$\frac{BM}{BC} = \frac{BM}{BE}$. Triunghiul BME este isoscel; ducîndu-i înălţimea EF avem $BM = 2BF$. Deci: $\frac{BM}{BC} = 2\frac{BF}{BE}$. Însă $\frac{AR}{AN} = \frac{BF}{BE}$ (două triunghiuri dreptunghice fiecare cu un unghi de 40°). Rezultă: $\frac{AC}{AN} = \frac{BM}{BN}$ deci, asemănarea triunghiurilor, deci $\sphericalangle NMB = 30°$.

1.49. Să se arate că în orice poligon convex nu putem avea mai mult de 3 unghiuri ascuţite.

(G.M.B., 13095).

Soluţie. Vom calcula numărul maxim de unghiuri ascuţite ale unui poligon convex cu n laturi. Presupunem că acest poligon are k unghiuri ascuţite. Dacă poligonul are k unghiuri ascuţite înseamnă că celelalte $n - k$ unghiuri sînt obtuze sau drepte. Suma unghiurilor ascuţite S_k verifică inegalitatea:

$$S_k < 90° \cdot k. \qquad (1)$$

Suma celorlalte $n - k$ unghiuri S_{n-k} (deoarece fiecare în parte nu depăşeşte 180°) verifică inegalitatea:

$$S_{n-k} < 180°(n - k). \qquad (2)$$

Însă, deoarece suma unghiurilor interne este $S_k + S_{n-k}$, rezultă că

$$S_k + S_{n-k} = 180°(n - 2). \qquad (3)$$

Adunînd inegalităţile (1) şi (2) membru cu membru, avem:

$$S_k + S_{n-k} < 90° \cdot k + 180° \cdot n - 180° \cdot k. \qquad (4)$$

Din (3) şi (4) rezultă:

$$180° \cdot n - 360° < 90° \cdot k + 180° \cdot n - 180° k$$

sau

$$90° \cdot k < 360°.$$

Deci $k < 4$. Numărul maxim de unghiuri ascuţite ale unui poligon convex cu n laturi este 3.

1.50. Se dă triunghiul oarecare ABC, iar ABC_1C_2; BCA_1A_2; CAB_1B_2 patratele construite spre exterior (sau spre interior) pe laturile triunghiului. Să se construiască triunghiul ABC cînd se cunosc lungimile segmentelor A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2.

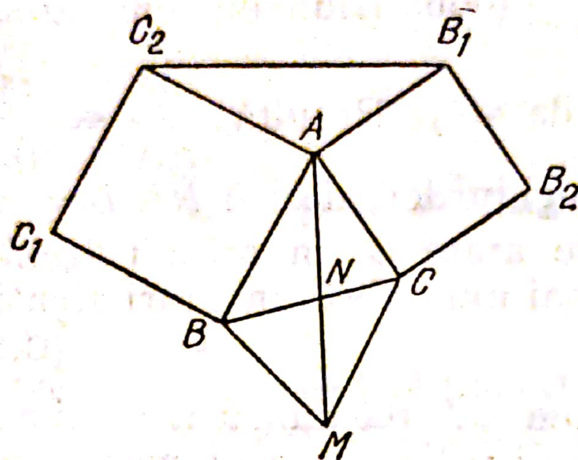


Fig. 1.50

Soluție. Vom demonstra că C_2B_1 este dublul medianei din A a triunghiului. Analog, se va arăta pentru celel lalte două segmente A_1B_2 și C_1A_2. Fie M simetricului A față de N mijlocul lui BC. Se observă că triunghiul AB_1C_2 este egal cu triunghiul ACM, căci: $AB_1 = AC$; $AC_2 = AB = CM$ și $\sphericalangle C_2AB_1 = 360° - 2 \cdot 90° - A = 180° - A = \sphericalangle ACM$. Rezultă $C_2B_1 = AM$, de unde $AN = \frac{1}{2} B_1C_2$, adică problema s-a redus la problema cunoscută. Să se construiască triunghiul cînd se cunosc lungimile celor 3 mediane, medianele fiind, respectiv, jumătățile segmentelor date.

1.51. Se consideră triunghiul ABC și punctul E, simetricul centrului de greutate G față de mijlocul laturii BC. Paralela dusă prin E la BC taie dreapta AC în M, paralela prin E la AC taie pe AB în N și paralela prin E la AB taie pe BC în P. Să se demonstreze că punctele M, N, P sînt în linie dreaptă.

Soluție. Să prelungim pe EM în sens opus pînă taie pe AB în M' și pe EP pînă taie pe AC în N'. Deoarece E este mijlocul lui MM' rezultă că N' este mijlocul lui AM și N este mijlocul lui AM', deci $MN' \parallel MM'$

Fig. 1.51

și $NN' = \frac{1}{2} MM' = EM$. Figura $EMN'N$ este paralelogram și diagonalele MN, EN' se taie în părți egale. Dar D este mijlocul lui GE și $DP \parallel GN'$, deci P este mijlocul lui EN' și MN trece prin P.

1.52. Fie un hexagon convex $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, iar I_{23}, I_{45}, I_{61} mijloacele laturilor A_2A_3, A_4A_5, A_6A_1, iar G centrul de greutate al triunghiului $I_{23}I_{45}I_{61}$. O dreaptă (d) care trece prin G lasă de o parte a ei punctele A_1, A_2, A_3 iar de cealaltă parte punctele A_4, A_5, A_6.

Fie B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 proiecțiile punctelor A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 pe dreapta (d). Să se arate că:

$$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = A_4B_4 + A_5B_5 + A_6B_6.$$

(G.M., 15247, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Avem relațiile
$A_1B_1 - A_6B_6 = 2I_{61}I'_{61}$; $A_2B_2 + A_3B_3 = 2I_{23}I'_{23}$; $A_5B_5 + A_4B_4 = 2I_{45}I'_{45}$ unde I'_{ij} este proiecția lui I_{ij}

Fig. 1.52

pe dreapta (d) care traversează segmentele $I_{61}A_6$ și A_3A_4. Mai putem scrie:

$I_{61}I'_{61} + I_{23}I'_{23} = I_{45}I'_{45}$ (deoarece dreapta (d) trece prin G, centrul de greutate al triunghiului $I_{61}I_{23}I_{45}$). Rezultă că: $A_1B_1 - A_6B_6 + A_2B_2 + A_3B_3 = A_5B_5 + A_4B_4$, de unde $\Rightarrow A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = A_4B_4 + A_5B_5 + A_6B_6$.

1.53. Două paralele sînt tăiate de o secantă în M și N. Bisectoarea unui unghi din M taie paralela din N în A, iar o paralelă oarecare la MA taie pe MN în B și pe AN în C. Dreptele AB și MC se taie în D. Să se demonstreze că dreptele DN și AM sînt perpendiculare.

Soluție. $\sphericalangle NAM = \sphericalangle AMP = \sphericalangle AMN$. Deci triunghiul AMN este isoscel. $\sphericalangle NCB = \sphericalangle NAM$; $\sphericalangle CBN = \sphericalangle AMN$. Deci și triunghiul CBN este isoscel.

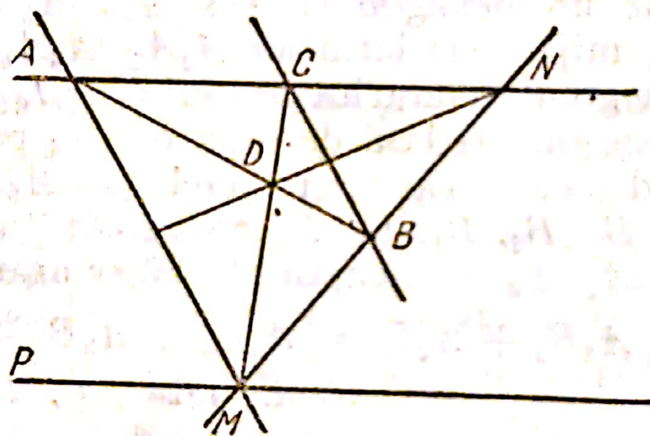


Fig. 1.53

Triunghiul ABM = triunghiul MCA deoarece AM este comună, $\sphericalangle CAM = \sphericalangle AMB$ și $AC = MB$ ca diferențe de segmente egale.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle MCB$ — ca suplimente ale unor sume de unghiuri egale ($\sphericalangle ABM + \sphericalangle CBN = \sphericalangle MCA + \sphericalangle BCN$). Deci triunghiul BCD este isoscel.

$\triangle CDN = \triangle BDN$ avînd toate laturile respectiv egale și deci $\sphericalangle CND = \sphericalangle DNB$, adică ND este bisectoare în triunghiul isoscel ANM, tot ND este înălțimea în triunghiul ANM. Rezultă că ND și AM sînt perpendiculare.

1.54. Să se construiască un triunghi cunoscînd valoarea unui unghi și lungimile a două din laturile triunghiului ortic.

(G.M.B., 2435, *Gh. Buicliu*).

Soluție. Fie $A'B'C'$ triunghiul ortic al unui triunghi ABC. Se știe că unghiurile triunghiului $A'B'C'$ sînt $180° - 2A$, $180° - 2B$, $180° - 2C$. Dacă se cunoaște valoarea unuia din unghiurile A, B, C se deduce valoarea unghiului corespunzător în triunghiul $A'B'C'$ care se construiește astfel imediat, cunoscîndu-i-se un unghi și două laturi. Bisectoarele exterioare ale triunghiului $A'B'C'$ astfel construit, dau prin intersectare vîrfurile A, B, C ale triunghiului căutat. Problema este totdeauna posibilă și are o singură soluție.

1.55. Se dă paralelogramul $ABCD$ în care A', B', C' sînt respectiv mijloacele laturilor AB, BC, CD. Fie M un punct din planul paralelogramului și M_1, M_2, M_3 simetricele lui M față de A', B', C'. Se prelungește BC de o parte și de alta cu $BE = CF$. Să se arate că:

a). EFM_3M_1 este un trapez; b). în ce condiții punctele G, I, M_2 sînt coliniare, G fiind mijlocul laturii AD, iar I intersecția dintre dreptele M_1F și M_3E; c). cînd patrulaterul EFM_3M_1 devine un paralelogram?

(G.M.B., 6132, *H. Dăscălescu*).

Soluție. a). În triunghiul M_1MM_3, $A'C'$ este linie mijlocie, deci dreptele M_1M_3, $A'C'$ și BC sînt paralele și astfel, în patrulaterul EFM_3M_1 două laturi opuse M_1M_3 și EF sînt paralele (fig. 1.55.*a*).

b). Dacă $BE = CF = \frac{1}{2} BG$, dreptele GE și GF trec respectiv prin A' și C', deoarece patrulaterele $AGBE$ și $DFCF$ devin paralelograme în care diagonalele GE și GF trec prin mijloacele diagonalelor AB și CD respectiv.

În triunghiul GEF dreptele EM_3, FM_1, GM_2 sînt concurente. Deci, GM_2 trece prin I intersecția dreptelor EM_3 și FM_1 (fig. 1.55.*b*).

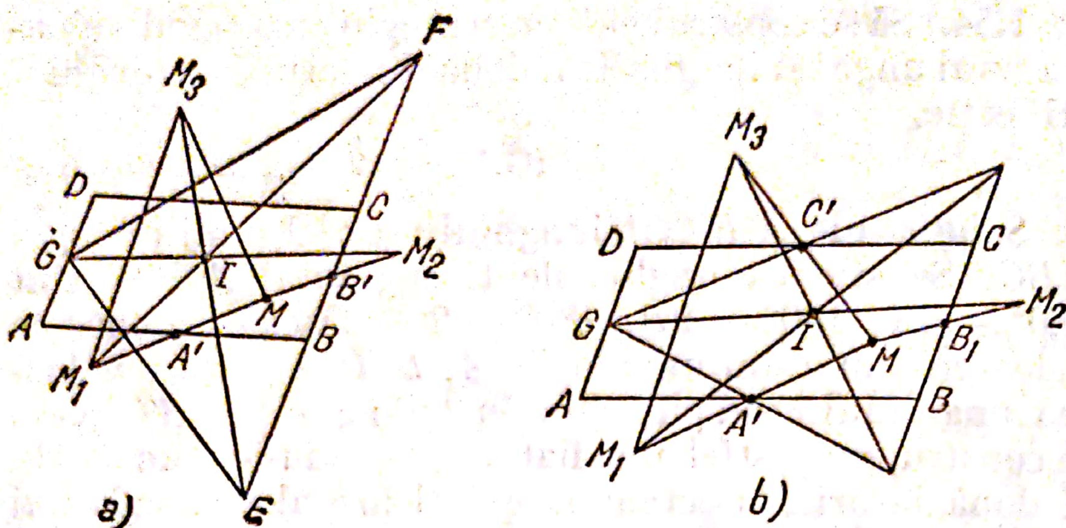


Fig. 1.55

c). De asemenea, cînd $BE = CF = \frac{1}{2} BC$, rezultă:

$$M_1M_3 = 2A'B' = 2BC = EF$$

și astfel, în patrulaterul M_1EFM_3 laturile opuse EF și M_1M_3 sînt paralele și egale, deci patrulaterul este paralelogram.

1.56. a). Într-un pătrat $ABCD$ se ia un punct oarecare mobil M pe diagonala BD. Să se arate că perpendiculara din M pe AB, perpendiculara din B pe AM, perpendiculara din D pe CM și diagonala AC sînt patru drepte concurente într-un punct N. Se dă $AB = 1$ m.

b). Să se arate că suma $S = AM + MN + ND$ cînd M variază pe BD este cuprinsă între $\sqrt{2}$ m și 3 m.

(G.M., 14066, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Fie N intersecția perpendicularei din M pe AB cu diagonala AC. Diagonalele AC și BD sînt perpendiculare. Rezultă că punctul M este ortocentrul triunghiului ABN și deci AM și BN sînt perpendiculare. De asemenea, punctul N este ortocentrul triunghiului CDM deoarece DM și CN sînt perpendiculare, N fiind și pe diagonala AC și rezultă că DN și MC sînt perpendiculare, deoarece $MN \perp DC$.

b). Patrulaterele $AMND$ și $BMNC$ sînt trapeze isoscele. Dacă M este în B, atunci N este în C iar

suma $S = 3$ m. Dacă M este în D, atunci N este în A și suma $S = 3$ m. Dacă M este la intersecția diagonalelor AC și BD, atunci $M = N$ și $S = \sqrt{2}$ m.

1.57. Să se construiască un pătrat ale cărui laturi să treacă fiecare prin cîte un punct dat. Cîte astfel de pătrate se pot construi care să răspundă problemei?

Soluție. Fie un pătrat $ABCD$. Luăm punctele M, P, N, Q respectiv pe AD, AB, BC, CD. Ducem PE perpendicular pe MN. Triunghiurile NMM' și PEP' sînt egale avînd $MM' = PP' = AB$ și $\sphericalangle EPP' = \sphericalangle NMM'$ (unghiuri cu laturile perpendiculare). Rezultă $PE = MN$. Cînd ni se dau punctele M, P, N și Q pentru a construi pătratul $ABCD$ unim M cu N și ducem PE perpendicular cu MN, $PE = MN$. Unim Q cu E apoi proiectăm punctele M și N pe QE în punctele D și C. Mai departe construcția este evidentă. Un singur pătrat corespunde problemei.

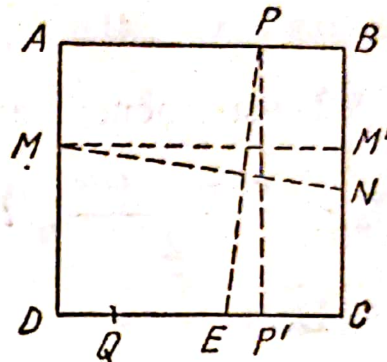


Fig. 1.57

1.58. Se consideră trei puncte, A_1, B_1, C_1 situate respectiv pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Dacă se notează $AA_1 = l_a$, $BB_1 = l_b$, $CC_1 = l_c$, să se demonstreze că

$$\frac{1}{2} < \frac{l_a + l_b + l_c}{a + b + c} < \frac{3}{2}.$$

Soluție. Într-adevăr, din triunghiurile A_1AB și AA_1C deducem

$$l_a + A_1B > c; \qquad l_a < c + A_1B$$
$$l_b + A_1C > b; \qquad l_a < b + A_1C.$$

Ținînd seama că $A_1B + A_1C = a$, deducem:

$$b_a > \frac{b + c - a}{2}$$

şi analog

$$l_b > \frac{c+a-b}{2}; \quad l_c > \frac{a+b-c}{2}.$$

Adunînd ultimele trei inegalităţi, obţinem:

$$\frac{l_a + l_b + l_c}{a+b+c} > \frac{1}{2}.$$

De asemenea, avem:

$$l_a < \frac{a+b+c}{2}; \quad l_b < \frac{a+b+c}{2}; \quad l_c < \frac{a+b+c}{2}.$$

Deci

$$\frac{l_a + l_b + l_c}{a+b+c} < \frac{3}{2}.$$

1.59. Să se demonstreze că mediana unui triunghi care pleacă din vîrful unui unghi ascuţit, este totdeauna mai mare decît jumătatea laturii opuse, iar mediana care pleacă din vîrful unui unghi obtuz este totdeauna mai mică decît jumătatea laturii opuse.

(G.M.B., E: 3179, *Demeny Zoltan*).

Soluţie. Se dă triunghiul ABC avînd $\sphericalangle A < \frac{\pi}{2}$; $BM = MC$, şi vrem să arătăm că $AM > BM$. Prelungim mediana AM cu $MD = AM$. Unind punctul D cu C obţinem paralelogramul $ABCD$. Unghiul $ABD > \frac{\pi}{2}$. Triunghiurile ABC şi ABD au două laturi respectiv egale ($AB = CD$, $AC = BD$), iar unghiul cuprins între ele este diferit. Rezultă că $AD > BC$, iar considerînd jumătăţile acestor segmente, obţinem: $AM > BM$.

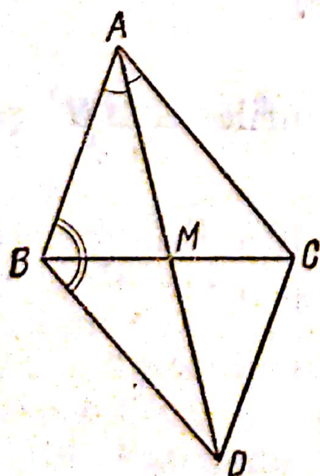


Fig. 1.59

1.60. Pe latura BC a triunghiului oarecare ABC se ia un punct D. Paralele prin D la AB și AC intersectează paralela prin A la BC în E și respectiv F. a). Să se arate că AD, BE și CF sînt concurente; b). CE și BF intersectează pe AD în G și respectiv H. Să se arate că $AG = DH$; c) patrulaterul $CGFH$ este paralelogram.

(G.M. E: 4415, *Gh. Bostan*).

Soluție. a). În paralelogramul $ABDE$ diagonalele AD și BE se intersectează într-un punct care este mijlocul fiecăreia dintre ele. În paralelogramul $ACDF$ diagonalele AD și CF intersectează iarăși într-un punct, același punct care este mijlocul lui AD. Deci, AD, BE și CF sînt concurente în mijlocul segmentului lui AD.

b). Deoarece $ABDE$ este paralelogram, avem $AE = BD$. $\sphericalangle GAE = \sphericalangle BDH$ (alterne externe). $\sphericalangle AEG = \sphericalangle DBH$ (avînd laturile paralele), deci triunghiurile AEG și BDH sînt egale, de unde $AG = DH$ și $GE = BH$ (1).

c). Deoarece $AE = BD$ și $AF = DC$ rezultă că $BC = EF$; cum BC este paralel cu EF rezultă că $BCEF$ este paralelogram. De aici, $CE = BF$ și CE paralel cu BF. Avînd în vedere și egalitatea (1) rezultă că $CG = HF$ fiind și paralele, $CGFH$ este paralelogram.

1.61. Se consideră triunghiul ABC și punctul E, simetricul centrului de greutate G față de mijlocul laturii BC. Paralela dusă prin E la BC taie dreapta AC în M, paralela prin E la AC taie pe AB în N și paralela prin E la AB taie pe BC în P. Să se demonstreze că punctele M, N, P sînt în linie dreaptă.

(G.M.B., 9173, *Gh. D. Simionescu*).

Soluție. Să prelungim pe EM în sens opus pînă taie pe AB în M' și pe EP pînă taie pe AC în N'. Deoarece E este mijlocul lui MM' rezultă că N' este mijlocul lui AM și N este mijlocul lui AM', deci $NN' \parallel MM'$ și $NN' = \frac{1}{2} MM' = EM$. Figura $EMN'N$ este parale-

logram și diagonalele MN, EN' se taie în părți egale. Dar D este mijlocul lui GE și $DP \parallel GN'$, deci P este mijlocul lui EN' și MN trece prin P.

1.62. Se dă segmentul BE constant în mărime și direcție. Să se afle locul geometric al vîrfului A al triunghiului isoscel ABC avînd pe BE ca mediană.

Soluție. Ducem medianele CF și AH. Avem: $BE = CF$ și $3GE = BE$.

Prelungim pe BE și luăm pe această prelungire segmentul $EM = GE = BE/3$. Ducem și AM. Patrulaterul $AMCG$ este paralelogram (diagonalele se taie în părți egale), deci $AM = GC$ (laturi ale paralelogramului). Dar $3GE = 2BE$, deci $3AM = 2BE$. Punctul M, așa cum a fost determinat, este fix. Așadar punctul A, mobil, se află la o distanță constantă $2BE/3$ de punctul M. Locul lui A este un cerc de rază $R = \frac{2}{3} BE$.

1.63. Să se demonstreze că suprafața unui trapez isoscel care are diagonalele perpendiculare este echivalentă cu aceea a pătratului cu latura cît înălțimea trapezului.

Soluție. Ducem înălțimea EF a trapezului $ABCD$ prin punctul O de intersecție a diagonalelor. Fiind un trapez isoscel ale cărui diagonale se taie sub un unghi de 90° înseamnă că triunghiurile BOC și AOD sînt dreptunghice isoscele. Urmează că E și F sînt mijloacele laturilor BC respectiv AD, deoarece înălțimile corespunzătoare bazelor sînt medianele lor. Dar $EO = \frac{BC}{2}$, ca mediană dusă din vîrful unghiului drept. În mod analog, arătăm că $FO = \frac{AD}{2}$.

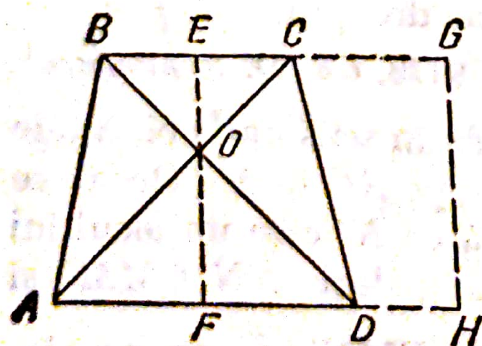


Fig. 1.63

Deci $EO + OF = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2}$; $EF = \frac{BC + AD}{2}$. Suprafața trapezului isoscel $ABCD$ este:

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot EF = \frac{BC + AD}{2} \cdot \frac{BC + AB}{2} =$$

$$= \left(\frac{BC + AD}{2}\right)^2$$

care este suprafața pătratului $EFGH$.

1.64. Se dă un triunghi oarecare ABC. Să se arate că mijloacele laturilor AB, BC și proiecția vîrfului B pe bisectoarea unghiului A sînt trei puncte coliniare.

Soluție. Unim mijlocul D al laturii AB cu punctul F (locul de intersecție a bisectoarei unghiului A cu perpendiculara din B pe AA'). Trebuie să arătăm că DF trece prin punctul E (mijlocul laturii BC). În triunghiul AFB, DF este mediana corespunzătoare ipotenuzei și este egală cu jumătate din ea. Rezultă că triunghiul ADF este isoscel și deci $\measuredangle BAF = \measuredangle AFD$.

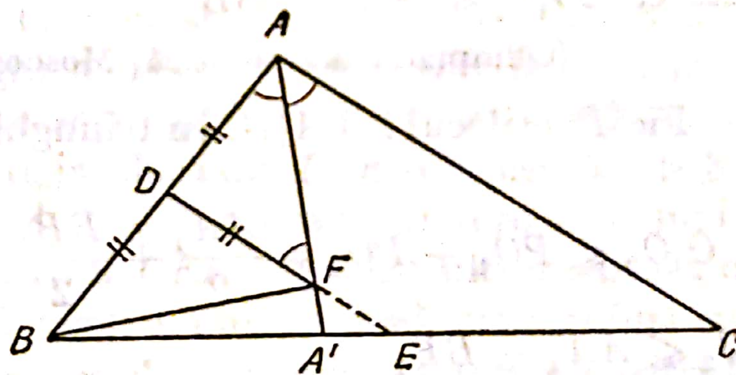


Fig. 1.64

Dar $\measuredangle BAF = \measuredangle FAC$ prin ipoteză. Rezultă că $\measuredangle FAC = \measuredangle AFD$, adică dreapta DF este paralelă cu AC. Trecînd prin mijlocul laturii AB ea este linie mijlocie în triunghi și va trece și prin mijlocul laturii BC.

1.65. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se construiesc pătratele $ABDE$ și $ACFG$ (D și F fiind vîrfuri opuse lui A); să se arate că segmentul EG este perpendicular pe mediana triunghiului ce pleacă din A,

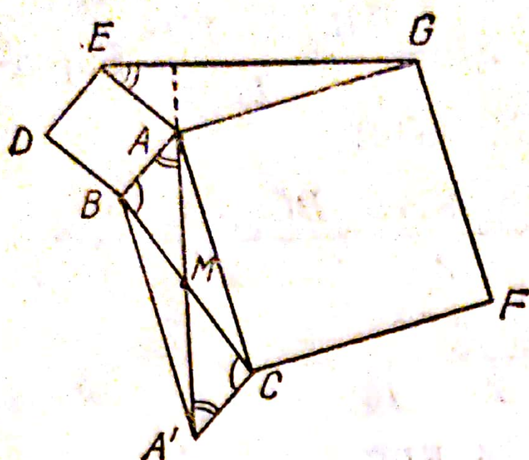


Fig. 1.65

iar lungimea lui este dublul lungimii medianei considerate.

Soluție. $\sphericalangle EAG = 180° - A = B + C$. Prelungim mediana AM cu $MA' = AM$. Din triunghiul ACA', avem: $\sphericalangle ACA' = \sphericalangle B + \sphericalangle C$ și $A'C = AB$. Rezultă imediat că $\triangle EAG = \triangle ACA'$, avînd două laturi egale și unghiul cuprins între ele egal, deci $EG = AA' = 2AM$ Prelungim mediana AM pînă taie pe EG în N. Din egalitatea triunghiurilor de mai sus, rezultă: $\sphericalangle NEA = \sphericalangle CA'A = \sphericalangle BAM$. Pe de altă parte, $\sphericalangle BAM + 90° + \sphericalangle EAN = 180°$, și deci $\sphericalangle NEA + \sphericalangle EAN = 90° \Rightarrow \sphericalangle ANE = 90°$, adică $EG \perp AM$.

1.66. Se dau segmentele AB și A_1B_1 care n-au nici un punct comun, iar O_1 și O_2 respectiv mijloacele lor. Să se arate că $2O_1O_2 \leqslant AA_1 + BB_1$.

(Olimpiada matematică, Moscova, 1953).

Soluție. Fie P mijlocul lui A_1B. În triunghiul O_2PO_1 avem:

$$O_1O_2 \leqslant PO_1 + PO_2 = \frac{AA_1}{2} + \frac{BB_1}{2}$$

deci $2O_1O_2 \leqslant AA_1 + BB_1$.

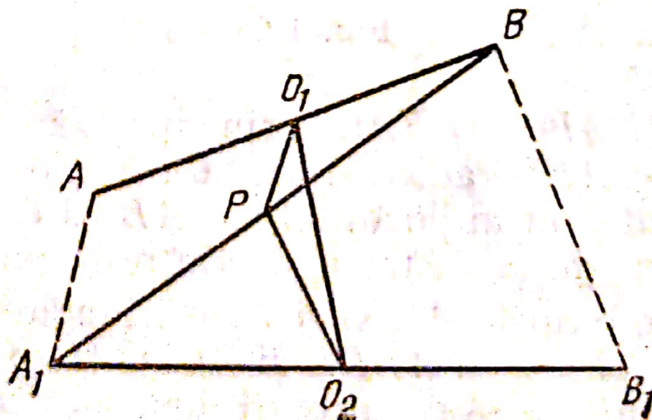


Fig. 1.66

Observații: Egalitate avem cînd O_1, P, O_2 sînt coliniare adică atunci cînd AA_1 și BB_1 sînt paralele și formează un trapez convex. Inegalitatea se menține chiar și dacă segmentele au un punct comun. O altă inegalitate ce rezultă analog este: $2O_1O_2 \geqslant |AA_1 - BB_1|$ cu egalitate tot cînd AA_1 și BB_1 sînt paralele.

1.67. Se dau 6 puncte în plan, oricare trei din ele necoliniare. Se unesc toate punctele între ele fie cu segmente de culoare verde, fie cu segmente de culoare roșie. Există totdeauna printre triunghiurile avînd vîrfurile în mulțimea celor 6 puncte date un triunghi cu laturile de o singură culoare?

Soluție. Din orice punct pleacă 5 segmente, din care 3 sau mai multe roșii sau 3 sau mai multe verzi.

Fie un punct din care pleacă 3 sau mai multe roșii (analog verzi). Două din capetele lor unite cu roșu sau toate cu verde, oricum se formează cel puțin un triunghi monocolor. Fie acum un triunghi roșu ABC (analog verde). Dacă dintr-unul din celelalte puncte, D, E, F pleacă 3 sau mai multe segmente de o culoare, fără ca mulțimea capetelor acestora să coincidă cu ABC, conform celor arătate se mai formează cel puțin un triunghi monocolor. Dacă din D, E sau F pleacă 3 segmente roșii spre A, B și C se mai formează triunghiuri roșii, iar dacă din D, E și F pleacă cîte 3 segmente verzi spre A, B și C, celelalte fiind roșii, se mai formează triunghiul roșu DEF. În acest ultim caz s-a obținut și un model pentru numai două triunghiuri monocolor.

1.68. Să se demonstreze că într-un patrulater convex suma diagonalelor este mai mare decît suma a două laturi opuse.

Soluție. În $\triangle AOB$; $AB < AO + OB$. În $\triangle DOC$; $DC < DO + OC$. Dacă adunăm aceste două inegalități, obținem: $AB + DC < AO + OB + DO + OC$. Dar: $AO + OC = AC$ și $DO + OB = DB$, deci: $AB + DC < AC + BD$, adică: $AC + BD > AB + DC$.

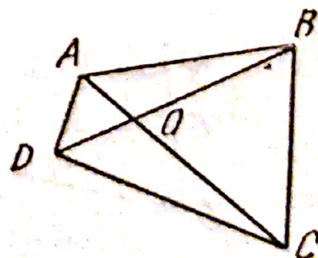


Fig. 1.68

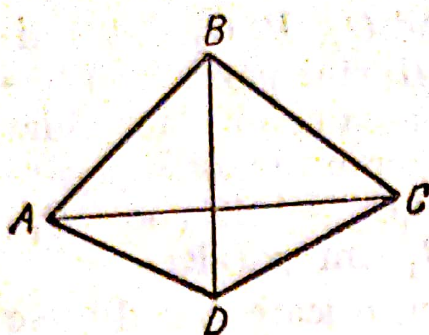


Fig. 1.69

1.69. Să se arate că într-un patrulater convex raportul între suma pătratelor diagonalelor și suma diagonalelor este mai mic decît semiperimetrul patrulaterului.

(G.M.B., 4157, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Se consideră patrulaterul oarecare $ABCD$. În triunghiurile ABC și ACD avem: $AB + BC > AC$; $CD + DA > AC$, (1) suma a două laturi ale unui triunghi fiind mai mare decît a treia. Adunînd relațiile (1) se obține:

$$2AC < AB + BC + CD + DA;$$

$$2AC^2 < AC(AB + BC + CD + DA). \qquad (2)$$

Analog se obține:

$$2BD^2 < BD(AB + BC + CD + DA). \qquad (3)$$

Adunînd relațiile (2) și (3) deducem:

$$\frac{AC^2 + BD^2}{AC + BD} < \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA).$$

1.70. a). În triunghiul ABC, fie un punct mobil M pe latura AB. Paralela din B la CM taie latura AC în N. Să se arate că aria triunghiului AMN este constantă.

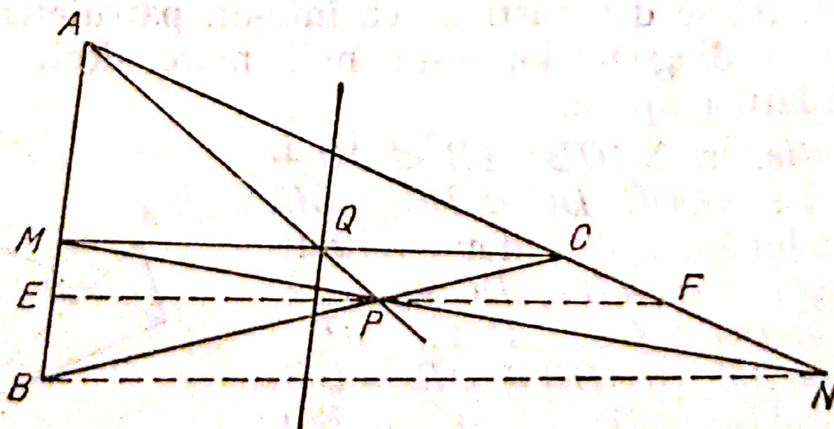


Fig. 1.70

b). Dreapta MN taie pe BC în P, iar AP taie pe CM în Q. Să se arate că punctul Q descrie o paralelă la latura AB.

Soluția. a). În trapezul $MCNB$, aria $CPN =$ = aria MPB.

$\Rightarrow$ aria AMN = aria $ACPN$ + aria CPN = aria $ACPM$ + aria MPB = aria ABC = constant.

b). Ducem $EF \parallel MC$. Avem $EP = PF$ unde $EF \parallel BN$, AP este mediană în triunghiul AEF. Deci, $MQ = QC$. Locul lui Q este o paralelă la AB.

1.71. Să se construiască un triunghi dreptunghic ABC a cărui ipotenuză $BC = a$ este dată, știind că mediana corespunzătoare ipotenuzei este medie geometrică între cele două catete.

Soluție. Mediana corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din ipotenuză. Avem deci: $a^2 = 4bc$.

Dar $bc = ah$, unde h este înălțimea perpendiculară pe ipotenuză. Deci $\frac{a^2}{4} = ah$, de unde $h = \frac{a}{4}$.

Construcția. Se duc paralele la ipotenuza BC la distanța $\frac{BC}{4}$ de ea. Această paralelă taie semicercul de diametru BC în două puncte A și A'. Triunghiurile ABC și $A'BC$ sînt triunghiurile căutate.

1.72. Se dă dreptunghiul $ABCD$. Pe AB și BC ca laturi, se construiesc în exteriorul dreptunghiului, triunghiurile echilaterale ABE și BCF. Să se arate că:

a). $EF = EC = AF = DF = DE$

și BF, BE sînt respectiv bisectoarele unghiurilor AFE și CEF.

b). Fie M intersecția dreptelor AE și CF. Să se arate că BM este perpendiculară pe EF.

c). Unghiul EMF are 30°.

Soluție. a). Triunghiurile BEF, BCE, ABF, DCF, ADE sînt egale avînd cîte un unghi egal cuprins între laturi egale. Din egalitatea triunghiurilor ABF și EBF rezultă $\sphericalangle AFB = \sphericalangle EFB$ iar din egalitatea triunghiurilor BEF și EBC rezultă $\sphericalangle CEB = \sphericalangle BEF$, deci BF și EB sînt bisectoarele unghiurilor AFE și CEF, respectiv.

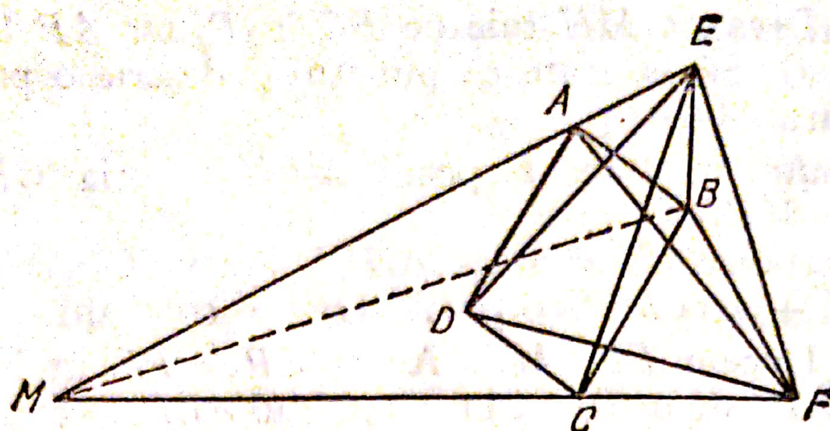


Fig. 1.72

b). Triunghiurile AEF, CEF sînt isoscele și deci bisectoarele BF și BE sînt perpendiculare respectiv pe AE și CF. Mai avem că dreapta EB este perpendiculară pe CF și dreapta FB este perpendiculară pe AE. Cum înălțimile din F și E ale triunghiului EFM se întîlnesc în punctul B, rezultă că și a treia înălțime dusă din M adică MB va fi perpendiculară pe EF.

c). Fie B_1 intersecția dreptelor BF cu ME. Triunghiul MFB_1 fiind dreptunghic în B_1 și unghiul din F fiind de 60° urmează că unghiul din M este $90° - 60° = 30°$.

1.73. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor unui triunghi ABC și G centrul de greutate al triunghiului, iar O un punct oarecare. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OB}_1 + \overrightarrow{OC}_1 = 3\overrightarrow{OG}$; $\overrightarrow{GA}_1 + \overrightarrow{GB}_1 + \overrightarrow{GC}_1 = 0$.

Soluție. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}_1$; $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}_1$; $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB}_1 \Rightarrow \sum \overrightarrow{OA} = \sum \overrightarrow{OA}_1$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OC}_1 + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$. Dacă $O \equiv G \Rightarrow \sum \overrightarrow{GA}_1 = 0$.

1.74. Pe laturile unui triunghi oarecare ABC se iau punctele A_1, B_1, C_1 astfel încît

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B} = k.$$

Să se arate că segmentele AA_1, BB_1, CC_1 pot fi laturile unui triunghi.

Soluție. Dacă $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$, condiția cerută este îndeplinită. Dar $\overrightarrow{AA_1} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + k \cdot \overrightarrow{AB}}{1+k}$;

$\overrightarrow{BB_1} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + k \cdot \overrightarrow{BC}}{1+k}$; $\overrightarrow{CC_1} = \dfrac{\overrightarrow{CB} + k \cdot \overrightarrow{CA}}{1+k} \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} +$

$+ \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \dfrac{\overrightarrow{AC}(1-k) + \overrightarrow{BA}(1-k) + \overrightarrow{CB}(1-k)}{1+k} =$

$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}) \dfrac{(1-k)}{(1+k)} = 0$, deoarece $\overrightarrow{AC} +$

$+ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = 0$.

1.75. Fie un patrulater oarecare $ABCD$. Să se afle un punct I prin care să putem duce o dreaptă d_1 care să intersecteze laturile opuse AB și CD respectiv în punctele A_1 și C_1; precum și o altă dreaptă d_2 care să intersecteze laturile BC și DA respectiv în punctele B_1 și D_1 astfel ca să avem $IA_1 = IC_1$ și $IB_1 = ID_1$.

(G.M., E: 5132, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Dacă A_1, B_1, C_1, D_1 sînt mijloacele laturilor, atunci $A_1B_1C_1D_1$ este un paralelogram, iar $I = A_1C_1 \cap \cap B_1D_1$; $IA_1 = IC_1$ și $IB_1 = ID_1$.

O altă dreaptă care trece prin I și taie pe AB în A_2 și pe CD în $C_2 \Rightarrow IA_2 = IC_2$ numai dacă $AB \parallel CD$. Rezultă că prin punctul I se pot duce o infinitate de secante în cazul cînd patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram; iar în cazul unui patrulater oarecare există o singură soluție.

1.76. Se dă un triunghi oarecare ABC. Prelungim latura AB dincolo de B pînă în C_1 astfel că $AC_1 = BC + CA$; prelungim latura BC dincolo de C pînă în A_1, astfel că $BA_1 = BA + AC$; prelungim latura AC dincolo de A pînă în B_1, astfel că $CD_1 = CB + BA$. Notăm cu P și P_1 perimetrele triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$. Să se arate că $\dfrac{3}{2} < \dfrac{p_1}{p} < 3$.

Soluție. Avem: $AC_1 = AC + CB$ sau $AB + BC_1 = AC + CB$; $BC_1 = AC + CB - AB$; $BA_1 = AB + AC$; $BC + CA_1 = BA + AC$; $CA_1 = AB + BC - BC$ și apoi $AB_1 = CB + BA - CA$. Din triunghiul A_1CB_1 avem: $A_1B_1 < CA_1 + CB_1$ sau înlocuind pe CA_1 și CB_1 cu valorile lor avem: $A_1B_1 < BA + AC - BC + BC + BA$ sau $A_1B_1 < 2AB + AC$. La fel, din triunghiul B_1AC_1 avem: $B_1C_1 < AB_1 + AC_1$ sau $B_1C_1 < BC + AB - CA + AC + BC$, deci $B_1C_1 < 2BC + AB$; iar din triunghiul A_1BC_1 vom deduce $A_1C_1 < 2AC + BC$. Rezultă $A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 < 3(AB + BC + CA)$ sau $P_1 < 3P$. Observăm că $B_1C + CA_1 < B_1C_1 + A_1C_1$ și înlocuind pe B_1C și CA_1 cu valorile găsite mai sus, avem: $2AB + AC < B_1C_1 + A_1C_1$ și analog: $2AC + BC < B_1C_1 + B_1A_1$ și $2BC + AB < A_1B_1 + A_1C_1$ și prin adunare, rezultă: $3(AB + BC + AC) < 2(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)$.

1.77. Fie $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ mijloacele laturilor unui hexagon convex. Să se arate că triunghiurile $A_1A_3A_5$ și $A_2A_4A_6$ au același centru de greutate G.

(G.M., 15251, *C. Ionescu-Țiu*).

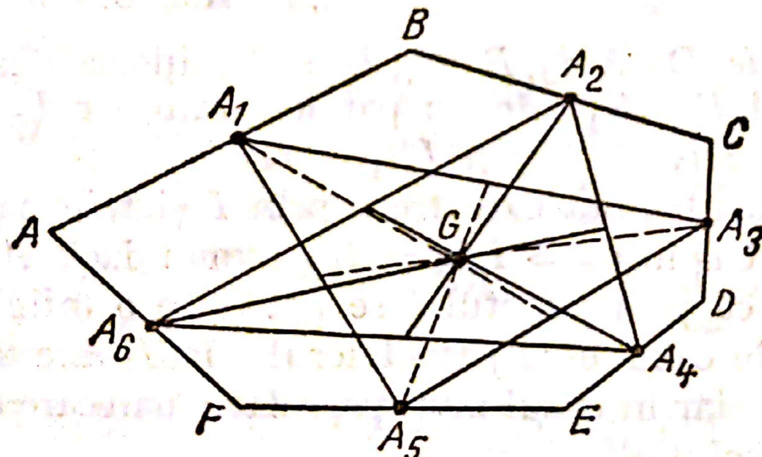


Fig. 1.77

Soluție. Fie $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ respectiv mijloacele laturilor AB, BC, CD, DE, EF, FA, iar O un punct oarecare din spațiu. Avem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA_1}$; $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA_3}$; $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OA_5}$. $\Rightarrow \sum \overrightarrow{OA_i} = 2(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_5}) = 6\overrightarrow{OG}$ unde G este centrul de greutate al triunghiului $A_1A_3A_5$.

În mod analog, $\sum \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_4 + \overrightarrow{OA}_6) = 6\overrightarrow{OG}_1$, dar $6\overrightarrow{OG}_1 = 6\overrightarrow{OG}$ ca rezultante unice la compunerea vectorilor $\overrightarrow{OA}_i$, prin urmare $G \equiv G_i$; adică triunghiurile $A_1A_3A_5$ și $A_2A_4A_6$ au același centru de greutate.

Observare. Pentru un poligon convex cu 12 laturi obținem hexagoanele $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$ și $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}$ cărora le aplicăm construcția arătată pentru hexagon care se reduc apoi la triunghiuri cu același centru de greutate. Analog se extinde pentru un poligon cu $3 \cdot 2^n$ laturi.

1.78. Fie octogonul convex $A_1A_2 \ldots A_8$ și I_{ij} mijlocul laturii A_iA_j. Să se arate că dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului $I_{12}I_{34}I_{56}I_{78}$ și dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului $I_{23}I_{45}I_{67}I_{81}$ trec prin același punct G.

(G.M., 15248, *C. Ionescu-Țiu*).

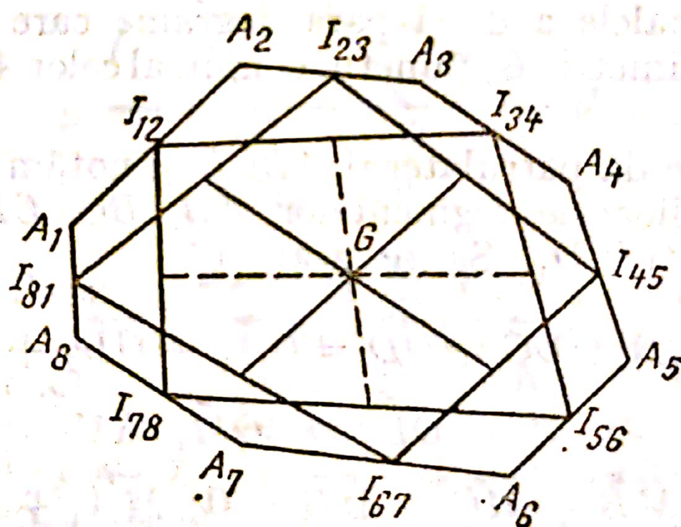


Fig. 1.78

Soluție. Fie O un punct oarecare. Avem: $\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 = 2\overrightarrow{OI}_{12}$; $\overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{OA}_4 = 2\overrightarrow{OI}_{34}$; $\overrightarrow{OA}_5 + \overrightarrow{OA}_6 = 2\overrightarrow{OI}_{56}$ și $\overrightarrow{OA}_7 + \overrightarrow{OA}_8 = 2\overrightarrow{OI}_{78} \Rightarrow \sum_{i=1}^{8} \overrightarrow{OA}_i = 2(\overrightarrow{OI}_{12} + \overrightarrow{OI}_{34} + \overrightarrow{OI}_{56} + \overrightarrow{OI}_{78})$.

Analog avem:

$\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = 2\overrightarrow{OI_{23}}$; $\overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} = 2\overrightarrow{OI_{45}}$; $\overrightarrow{OA_6} + \overrightarrow{OA_7} = 2\overrightarrow{OI_{67}}$ și $\overrightarrow{OA_8} + \overrightarrow{OA_1} = 2\overrightarrow{OI_{81}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{8} \overrightarrow{OA_i} = 2(\overrightarrow{OI_{23}} + \overrightarrow{OI_{45}} + \overrightarrow{OI_{67}} + \overrightarrow{OI_{81}})$.

Notăm cu B_{34} și B_{78} mijloacele segmentelor $I_{23}I_{45}$ și respectiv $I_{67}I_{81}$. Avem:

$\overrightarrow{OI_{23}} + \overrightarrow{OI_{45}} = 2\overrightarrow{OB_{34}}$ și $\overrightarrow{OI_{67}} + \overrightarrow{OI_{81}} = 2\overrightarrow{OB_{78}}$, dar $\overrightarrow{OB_{34}} + \overrightarrow{OB_{78}} = 2\overrightarrow{OG}$ și deci $\sum_{i=1}^{8} \overrightarrow{OA_i} = 8\overrightarrow{OG}$.

De asemenea

$\overrightarrow{OI_{12}} + \overrightarrow{OI_{34}} + \overrightarrow{OI_{56}} + \overrightarrow{OI_{78}} = \overrightarrow{OI_{23}} + \overrightarrow{OI_{45}} + \overrightarrow{OI_{67}} + \overrightarrow{OI_{81}} = 4\overrightarrow{OG}$, G fiind punctul din planul octogonului dat. Rezultă că dreptele care unesc mijloacele opuse ale patrulaterului $I_{12}I_{34}I_{56}I_{78}$ și dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului $I_{23}I_{45}I_{67}I_{81}$ sînt diagonalele a două paralelograme care au același centru de simetrie G, punctul comun al celor 4 diagonale concurente.

1.79. Se dă patrulaterul $ABCD$ și notăm cu A_1, B_1, C_1, D_1 mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA iar $M = A_1C_1 \cap B_1D_1$. Să se arate că:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = 4\overrightarrow{OM},$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 0;\ \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1}$$

unde O este un punct oarecare.

Soluție. Avem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA_1}$ (regula paralelogramului),

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB_1}$; $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OC_1}$ și $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OD_1}$.

Adunînd aceste patru relații parte cu parte, obținem:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1},$$

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1} = 2\overrightarrow{OM}, \text{ de asemenea } \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OD_1} = 2\overrightarrow{OM},$$

figura $A_1B_1C_1D_1$ fiind un paralelogram.

Dacă $M \equiv O \Rightarrow \sum \overrightarrow{MA} = \sum \overrightarrow{MA_1} = 0$ și $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1} = 0$; $\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OD_1} = 0$.

1.80. Se dă un triunghi ABC. Pe latura AB se alege un punct M astfel că $AB = 4AM$, iar pe latura BC se alege punctul N astfel încît $BC = 3NC$. Să se arate că dreapta MC trece prin mijlocul lui AN.

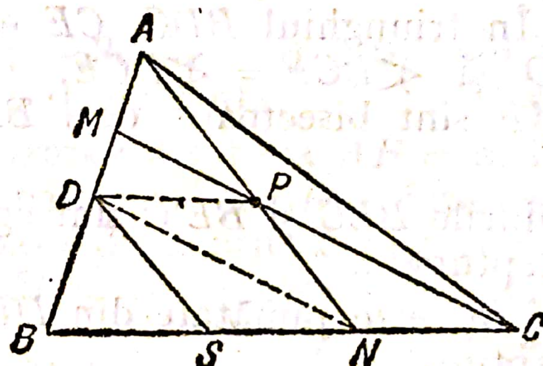


Fig. 1.80

Soluție. Paralela din D la BC trece prin P mijlocul lui AN, D fiind mijlocul lui AB. Să arătăm că punctele M, P, C sînt coliniare. Ducem $DS \parallel AN$, $S \in BC. \Rightarrow BS = SN$. Deci MP este linie mijlocie în triunghiul $ADN \Rightarrow MP \parallel DN$; $DP = \parallel SN \Rightarrow DP = \parallel NC$. Figura $DPCN$ este deci paralelogram $\Rightarrow PC \parallel DN$. Cum din P se poate duce o singură paralelă cu DN, rezultă că punctele M, P, C sînt coliniare.

1.81. Se dă un triunghi isoscel ABC, $AB = BC$. Pe latura AC se ia deoparte și de alta a lui C segmentele $CD = CD' = BC$. Se notează cu E și E' respectiv mijloacele segmentelor BD și BD'. Dreptele CE și CE' taie înălțimea triunghiului ABC duse din A respectiv în F și F', iar BF taie latura AC în G. Să se arate că:

a). BF este bisectoarea unghiului ABC;
b). triunghiurile BEC și $BE'C$ sînt egale;
c). triunghiul DBD' este dreptunghic;
d). unghiurile DBG și $B'BF'$ sînt egale.

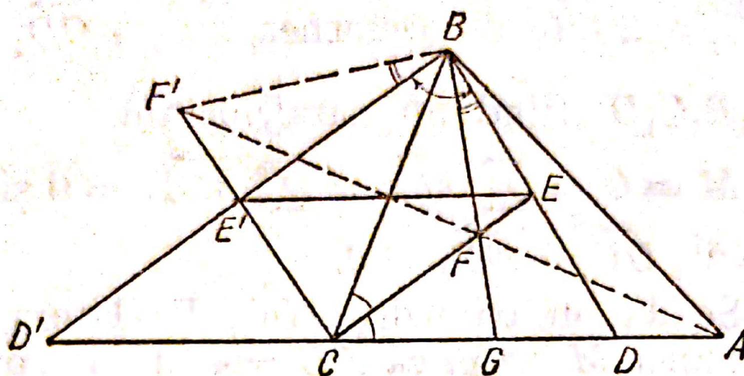


Fig. 1.81

Soluție. a). În triunghiul BDC, CE este mediană, deci $CE \perp BD$ și $\sphericalangle BCE = \sphericalangle DCE$. În triunghiul ABC, CE și AF sînt bisectoare, deci BF este a 3-a bisectoare.

b). Triunghiurile BEC și $BE'C$ sînt egale, deoarece $BECE'$ este dreptunghi.

c). Mediana BC este jumătate din DD', triunghiul BDD' este dreptunghic.

d). $CE' \perp BD'$ și $CE' \perp CE \Rightarrow CE'$ este bisectoarea unghiului BCD' și întîlnește pe AF în $F' \Rightarrow \sphericalangle DEG = \sphericalangle E'BF'$ avînd același complement $\sphericalangle GBD'$.

1.82. În trapezul $ABCD$, AB fiind baza mică și CD baza mare, E și F sînt respectiv mijloacele laturilor BC și AD, iar I intersecția diagonalelor. Să se arate că

$$\frac{\text{aria } ABEF}{\text{aria } FECD} > \frac{\text{aria } ABI}{\text{aria } CDI}.$$

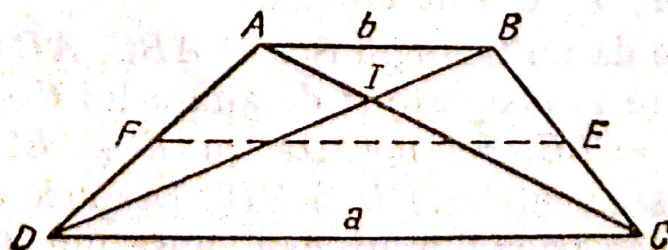


Fig. 1.82

Soluție. Notăm $FE = x$, $CD = a$. Înălțimea trapezului o notăm cu $4h$.

$$\frac{\text{aria } ABEF}{\text{aria } FECD} = \frac{(b+x)h}{(a+x)h} = \frac{b + \frac{a+b}{2}}{a + \frac{a+b}{2}} = \frac{3b+a}{3a+b}$$

$$\frac{\text{aria } ABI}{\text{aria } CDI} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Să amintim că

$$\frac{3b+a}{b+3a} - \frac{b^2}{a^2} > 0 \quad \text{sau} \quad \frac{3a^2b + a^3 - b^3 - 3ab^2}{a^2(3a+b)} > 0$$

sau $a^3 - b^3 + 3ab(a-b) > 0$, sau $(a-b)(a^2 + 4ab + b^2) > 0$, evident.

1.83. Un trapez are baza $AB = a$, baza $CD = b$ și aria S. Diagonalele AC și BD se întîlnesc în punctul I. Paralela la baze dusă prin I taie laturile AD și BC respectiv în M și N. Notăm ariile ABI, BCI, DCI, ADI respectiv cu S_1, S_2, S_3, S_4, iar ariile trapezelor $ABMN$ și $DCNM$ respectiv cu S_a și S_b.

a). Să se arate că $2(S_1 + S_3) \geqslant S \geqslant 2(S_2 + S_4)$;

b). să se exprime S_1, S_2, S_3, S_4, în funcție de a, b, S;

c). să se exprime S_a și S_b în funcție de a, b, S.

(G.M.B., 13523, C. *Ionescu-Țiu*).

Soluție. a, b) Notăm cu h_1 și h_3 distanțele de la punctul I respectiv la AB și CD. Avem: $h_1 + h_3 = h$.

$$\frac{(a+b)h}{2} = S; \quad h = \frac{2S}{a+b};$$

$$\frac{h_1}{h_3} = \frac{a}{b}; \quad \frac{h_1}{h_1+h_3} = \frac{a}{a+b}; \quad h_1 = \frac{ah}{a+b} = \frac{2aS}{(a+b)^2}$$

$$\frac{h}{h_3} = \frac{a+b}{b}; \quad h_3 = \frac{bh}{a+b} = \frac{2bS}{(a+b)^2}.$$

$$S_2 = S_4 = \sqrt{S_1 S_3} = \sqrt{\frac{a^2b^2h^2}{4(a+b)^2}} = \frac{abS}{(a+b)^2}$$

$$S_3 = \frac{bh_3}{2} = \frac{b^2h}{2(a+b)} = \frac{b^2S}{(a+b)^2}.$$

$$S_1 + S_3 = \frac{S(a^2+b^2)}{(a+b)^2}; \quad S_2 + S_4 = S - \frac{S(a^2+b^2)}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{2abS}{(a+b)^2}.$$

$2(S_1 + S_3) = \dfrac{2S(a^2+b^2)}{(a+b)^2}$. Inegalitatea devine:

$$\frac{2S(a^2+b^2)}{(a+b)^2} \geqslant S \geqslant \frac{4abS}{(a+b)^2} \quad \text{sau}$$

$$2a^2 + 2b^2 \geqslant a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow (a-b)^2 \geqslant 0.$$

c). $\dfrac{1}{MI} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{a+b}{ab}$; $2MI = MN = \dfrac{2ab}{a+b}$.

$$S_a = \frac{h_1}{2}\left(a + \frac{2ab}{a+b}\right) = \frac{Sa^2(a+3b)}{(a+b)^3} \quad \text{și}$$

$$S_b = \frac{h_3}{2}\left(b + \frac{2ab}{a+b}\right) = \frac{Sb^2(3a+b)}{(a+b)^3}.$$

1.84. Fie P, Q, R, S mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA ale patrulaterului $ABCD$ și P', Q', R', S' centrele pătratelor construite în exterior pe aceleași laturi. Să se arate că dacă M și N sînt mijloacele diagonalelor AC, BD atunci $MP' = MQ'$, $MR' = MS'$, $NP' = NS'$, $NR' = NQ'$. Să se exprime aria $PQRS$ în funcție de aria $ABCD$.

(G.M.B., E: 2140, *Gh. Buicliu*).

Soluție. Figura $MPBQ$ fiind prin construcție paralelogram, avem $\sphericalangle MPB = \sphericalangle MQB$, și cum $MP = BQ = QQ'$, iar $MQ = PB = PP'$, rezultă că triun-

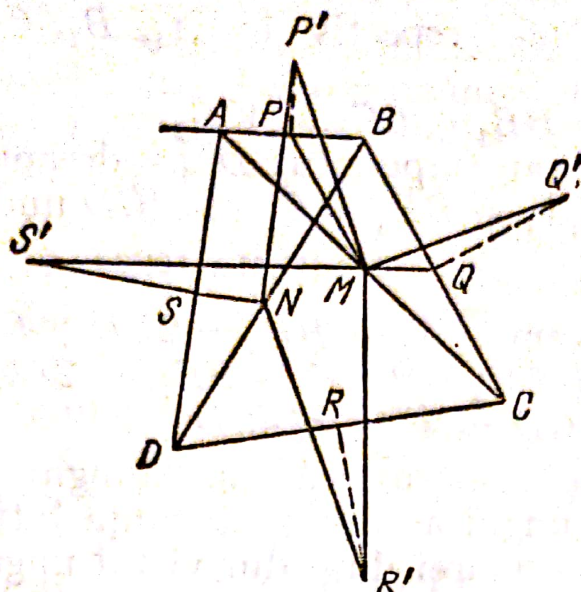


Fig. 1.84

ghiurile MPP', MQQ' sînt egale căci avem și $\sphericalangle MPP' = \sphericalangle MPB + \frac{\pi}{2}$ și $\sphericalangle MQQ' = \sphericalangle MQB + \frac{\pi}{2}$. Prin urmare, $MP' = MQ'$. La fel și pentru celelalte egalități. Aria $ABCD = 2$ aria $PQRS$.

1.85. Fie un triunghi oarecare ABC și o dreaptă (d) care nu traversează triunghiul. Notăm cu E, F, G mijloacele respective ale segmentelor AB, CD, EF unde D este un punct pe dreapta (d). Prin punctele A, B, C, G ducem patru drepte paralele între ele care

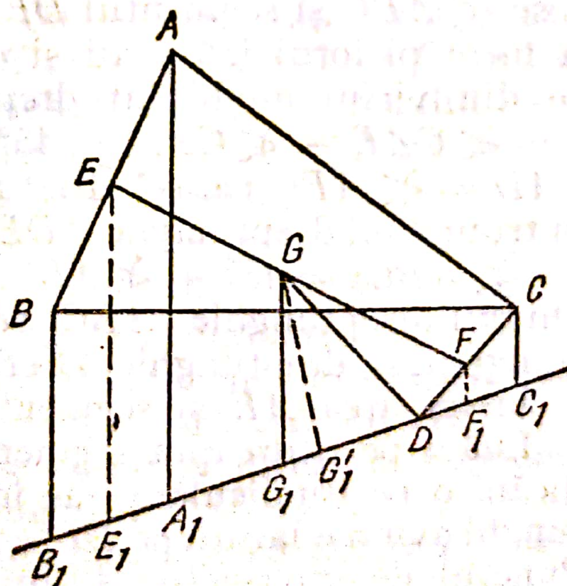


Fig. 1.85

taie dreapta (d) respectiv în A_1, B_1, C_1, G_1. Să se arate că:

a). $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 4GG_1$.

b). Oricare ar fi punctul D pe dreapta (d) avem inegalitatea $AA_1 + BB_1 + CC_1 \leqslant 4GD$ unde $GG_1 \perp (d)$.

(G.M., 15234, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Avem $AA_1 + BB_1 = 2EE_1$; $CC_1 = 2FF_1$, $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 2(EE_1 + FF_1) = 2 \cdot 2GG_1 = 4GG_1$.

b). $GG_1' \leqslant GD \Rightarrow 4GG_1' \leqslant 4GD$.

1.86. Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscînd un unghi ascuțit și distanța între picioarele înălțimii și bisectoarei duse din vîrful unghiului drept pe ipotenuză.

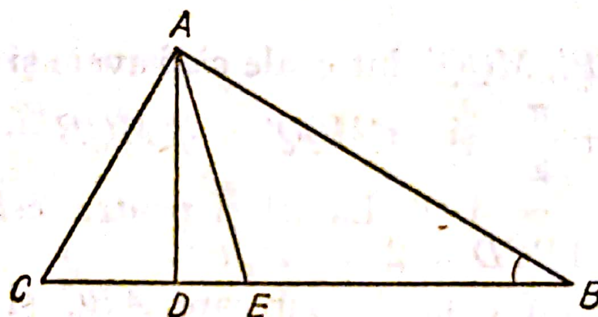


Fig. 1.86

Soluție. Considerăm problema rezolvată. Fie triunghiul dreptunghic căutat ABC cu unghiul drept în A, în care se cunosc $\sphericalangle ABC$ și segmentul DE, care reprezintă distanța între piciorul înălțimii și cel al bisectoarei coborîte din vîrful unghiului drept pe ipotenuză. $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAE - \sphericalangle CAD = 45° - \sphericalangle ABC$ (deoarece $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABC$ ca avînd laturile perpendiculare), iar în triunghiul dreptunghic ADE, $\sphericalangle AED = 90° - (45° - \sphericalangle ABC) = 45° + \sphericalangle ABC$. Deci construcția triunghiului dreptunghic ABC se reduce la construcția triunghiului dreptunghic DAE format de înălțimea AD, bisectoarea AE și segmentul DE.

Construcție. Luăm pe o dreaptă segmentul DE. În punctul D ridicăm o perpendiculară, iar în punctul E construim un unghi avînd o latură pe DE egal cu $45° + \sphericalangle ABC$. Punctul de intersecție A între perpendiculara ridicată în D și a doua latură a unghiului cons-

truit, va fi vîrful unghiului drept al triunghiului căutat. Din acest vîrf construim cu înălțimea AD un unghi egal cu unghiul ABC și determinăm vîrful C căutat și tot din vîrful A ridicînd o perpendiculară pe AC determinăm și vîrful B al triunghiului căutat.

1.87. În triunghiul ABC se duc înălțimile AA' și BB' care fac cu AB, respectiv unghiurile de 10° și 50°. Fie $A'D$ mediana triunghiului $AA'C$, iar pe latura $A'C$ se ia un punct oarecare M. Perpendiculara din M pe $A'D$ taie prelungirea laturii AC în F.

a). Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC;

b). dacă BB' și $A'D$ se intersectează în N, să se arate că $\sphericalangle DNB' = \sphericalangle AA'D$;

c). să se arate că triunghiul FCM este isoscel.

(Concurs elevi, *N. Bebea*).

Soluție. a). În triunghiul ABB', avem $\sphericalangle A'AB' = 30°$, iar din triunghiul dreptunghic $AA'C$ rezultă că $\sphericalangle BCA = 60°$. Așadar, unghiurile triunghiului ABC, sînt $A = 40°$, $B = 80°$ și $C = 60°$.

b). Se știe că în triunghiul $AA'C$ avem $A'D = AD = DC$, deci triunghiul $AA'D$ este isoscel, adică $A'D = AD$ și atunci rezultă că $\sphericalangle AA'D = 30°$. Triunghiul $A'DC$ este echilateral, deci $\sphericalangle A'DC = 60°$ și cum triunghiul DNB' este dreptunghic, rezultă că $\sphericalangle DNB' = 30°$, adică $\sphericalangle DNB' = \sphericalangle AA'D$.

c). Triunghiul DAC este echilateral și atunci $\sphericalangle DA'C = 60°$ și deci din triunghiul $A'ME$ rezultă că $\sphericalangle A'ME = 30°$. Triunghiul EFD fiind dreptunghic și avînd unghiul D de 60° rezultă că $\sphericalangle MFC = 30°$, prin urmare $\sphericalangle CMF = \sphericalangle MFC = 30°$, adică triunghiul MFC este isoscel.

1.88. Se dă un triunghi isoscel ABC $(AB = AC)$ în care unghiul de la vîrf A este obtuz. Se notează cu D punctul în care mediatoarea laturii AC taie baza și cu E punctul în care mediatoarea laturii AB taie baza.

a). Să se compare AD cu AE;

b). să se compare între ele segmentele BE, ED și DC dacă unghiul $BAC = 120°$;

c). reciproc, se știe că $BE = ED = CD$. Cîte grade are unghiul BAC?

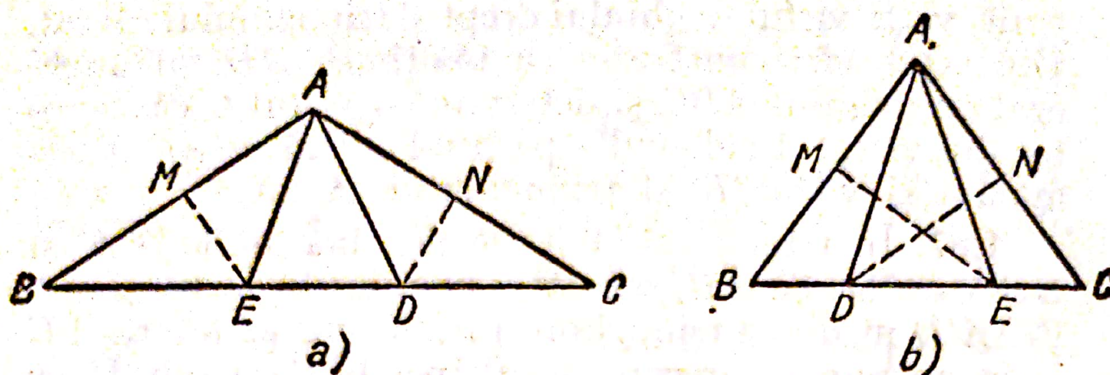


Fig. 1.88

Soluție. Notăm cu M și N picioarele celor două mediatoare ($M \in AB$ și $N \in AC$). a). În $\triangle AEB$, ME este înălțime și mediană deci $\triangle AEB$ este isoscel$\Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAE$ și $BE = AE$. (1)

În $\triangle ADC$, ND este înălțime și mediană deci $\triangle ADC$ este isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DCA = \sphericalangle CAD$ și $DC = AD$. (2).

Dar $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD$ și $AB = AC$ din ipoteză deci $\triangle BAE = \triangle CAD \Rightarrow AE = AD$.

b). Dacă $\sphericalangle BAC = 120°$, atunci $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 30°$ ($\triangle ABC$ fiind isoscel din ipoteză).

Conform punctului a) $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ABE = \sphericalangle ACD = \sphericalangle CAD = 30° \Rightarrow \sphericalangle EAD = 120° - \sphericalangle BAE - \sphericalangle CAD = 120° - 30° - 30° = 60°$.

Deci, în $\triangle EAD$ avem: $AE = AD$ și $\sphericalangle EAD = 60° \Rightarrow \triangle EAD$ echilateral $\Rightarrow AE = ED = AD$.

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow BE = ED = DC$. (3)

c). Știm că $BE = ED = DC$. Folosind și relațiile (1) și (2) rezultă că $AE = ED = AD \Rightarrow \triangle AED$ este echilateral, deci $\sphericalangle EAD = 60°$ și $\sphericalangle AED = \sphericalangle ADE = 60°$. $\sphericalangle AED = \sphericalangle ABE + \sphericalangle BAE = 60°$ (ca unghiuri exterioare $\triangle AEB$). Cum $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAE \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle BAE = 30°$. Analog se arată că $\sphericalangle DAC = 30°$. Deci, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAE + \sphericalangle EAD + \sphericalangle DAC = 30° + 60° + 30° = 120°$.

1.89. Într-un triunghi ABC avînd toate unghiurile ascuțite, iar înălțimea AD egală cu baza BC se construiește pe CD ca latură pătratul $CDEF$ și pe BD ca latură pătratul $BDGH$. Să se arate că dreptele BF și CH sînt

înălțimile prelungite ale triunghiului ABC.

Soluție. Triunghiurile ACD și BFC sînt egale. $\Rightarrow \sphericalangle ACD = \sphericalangle BFC$ și $\sphericalangle DAC = \sphericalangle FCA$. Rezultă $BF \perp AC$ și analog $CH \perp \perp AB$.

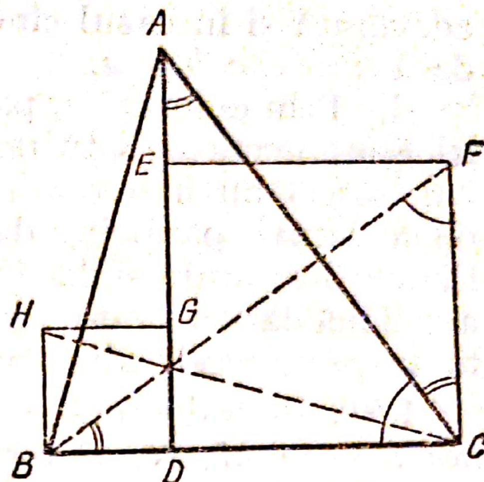


Fig. 1.89

1.90. a). Dacă a, b, c, d sînt lungimile laturilor consecutive ale unui paralelogram, atunci $ab + cd = ad + bc$; dar dacă a, b, c, d sînt laturile consecutive ale unui patrulater, atunci acest patrulater este totdeauna un paralelogram? Justificați răspunsul.

b). Aceeași întrebare dacă în loc de paralelogram avem un trapez isoscel.

c). Să se arate că dacă $ab + cd = ad + bc$ atunci și numai atunci avem cel puțin una din relațiile $b = d$ sau $a = c$.

d). Ce se poate afirma despre un paralelogram sau despre un trapez isoscel cu articulații în cele patru vîrfuri; prin deformare mai rămîne paralelogram, respectiv trapez isoscel, sau nu?

(G.M., E: 4964, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Dacă $a = c$ și $b = d$ atunci $ab + cd = ad + bc$ deci într-un paralelogram de laturi $a = c$ și $b = d$ avem $ab + cd = ad + bc$. Mai putem avea și $a = c$ și $b \neq d$ și totuși $ab + cd = cb + ad$, iar în acest caz patrulaterul avînd $a = c$ poate fi un trapez isoscel oarecare.

b). Deoarece $ab + cd = ad + bc$ dacă $a = c$ sau dacă $b = d$ relația este adevărată, deci patrulaterul poate fi trapez isoscel și menționăm că paralelogramul este un caz particular al unui trapez isoscel.

c). Dacă $b \neq d$ egalitatea $ab + cd = ad + bc$ se mai poate scrie $a(b - d) = c(b - d)$, dar $b - d \neq 0$, deci se mai poate scrie $(b - d)(a - c) = 0$ care este

adevărată și în cazul cînd $a - c = 0$, adică $a = c$; iar dacă $a \neq c \Rightarrow b = d$.

d). Prin deformare, paralelogramul rămîne tot paralelogram deoarece laturile opuse rămîn egale, iar trapezul isoscel nu mai rămîne trapez isoscel nemaiavînd două laturi paralele, dar relația $ab + cd = ad + bc$ rămîne adevărată și dacă patrulaterul de laturi a, b, c, d are două laturi opuse egale și fără ca patrulaterul să fie trapez isoscel, adică sîntem în cazul cel mai general.

1.91. Pe o dreaptă se iau punctele O, A, B, C și se notează cu M, N, P respectiv mijloacele segmentelor AB, BC, CA. Există relația:

$$OM \cdot AB + ON \cdot BC = OP \cdot AC.$$

(G.M.B., 1956, *Mihail Popescu*).

Soluție. Se exprimă toate segmentele în funcție de $OA = a$, $OB = b$ și $OC = c$ și se verifică o identitate algebrică.

Observație. Relația dată se aseamănă ca formă cu relația lui *Euler* relativă la patru puncte coliniare.

1.92. Fie un punct P pe latura AB a unui paralelogram $ABCD$ prin care ducem două drepte paralele: una la BD care taie latura AD în M și alta la AC care taie pe BC în N. Fie E intersecția diagonalelor AC și BD iar punctele R și S intersecțiile dreptelor ME și PD respectiv NE și PC.

Să se demonstreze relația: aria $MPD +$ aria $NPC =$ $=$ aria MNP.

Soluție. Cum MP și DB sînt paralele prin enunț, rezultă:

$$\text{aria } MPD = \text{aria } MPE. \quad (1)$$

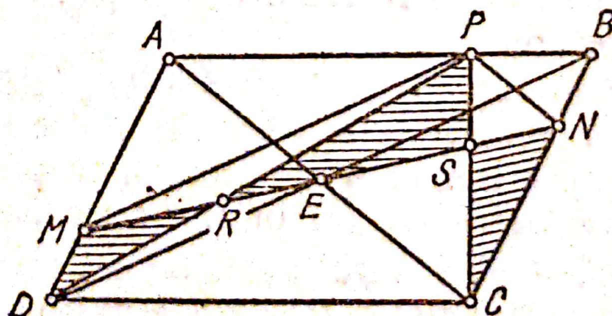


Fig. 1.92

Analog avem:

$$\text{aria } NPC = \text{aria } NPE. \qquad (2)$$

Ținînd seama că M, E, N sînt coliniare și adunînd (1) cu (2) găsim:

$$\text{aria } MPD + \text{aria } NPC = \text{aria } MPN. \qquad (3)$$

1.93. Se dă un triunghi ABC în care unghiul CAB este de 60°. Înălțimile BB' și CC' se intersectează în H, iar bisectoarea unghiului CAB intersectează cele două înălțimi BB' și CC' în O și E. Să se demonstreze că triunghiul OEH este echilateral.

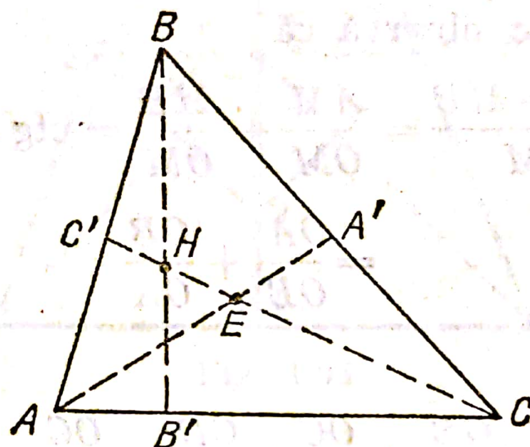


Fig. 1.93

Soluție. Observăm că triunghiurile $AC'E$ și ACC' sînt dreptunghice avînd unghiul drept în C'. Rezultă:

$$\measuredangle C'EA = 90° - \frac{60°}{2} = 60°; \ \measuredangle C'CA = 90° - 60° = 30°.$$

Tot astfel:

$\measuredangle B'HC = 90° - 30° = 60°$. Două unghiuri ale triunghiului avînd cîte 60°, triunghiul OHE este echilateral.

1.94. Fie un patrulater $ABCD$ cu diagonalele perpendiculare. Din punctul O de intersecție a diagonalelor se duc perpendicularele OM, ON, OP, OQ respectiv pe AB, BC, CD, DA. Să se arate că

$$\frac{AB}{OM} + \frac{BC}{ON} + \frac{CD}{OP} + \frac{DA}{OQ} = \frac{BD}{OA} + \frac{AC}{OB} + \frac{BD}{OC} + \frac{AC}{OD}.$$

(G.M., 4990, *I. Safta*).

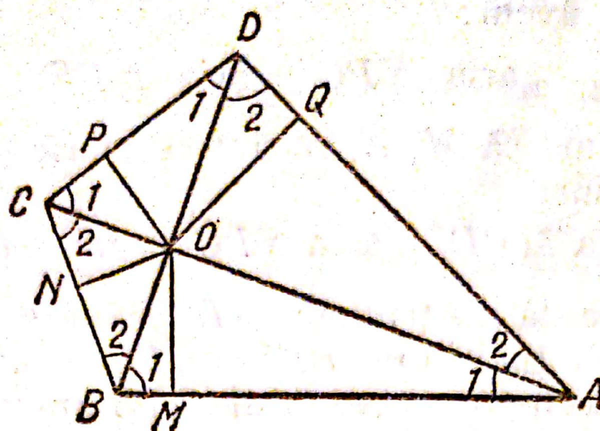


Fig. 1.94

Soluție. Se observă că

$$\frac{AB}{OM}=\frac{AM+MB}{OM}=\frac{AM}{OM}+\frac{MB}{OM}=\text{ctg}\,A_1+\text{ctg}\,B_1=$$

$$=\frac{OA}{OB}+\frac{OB}{OA}$$

și analog

$$\frac{BC}{ON}=\frac{OB}{OC}+\frac{OC}{OB};\quad \frac{CD}{OP}=\frac{OC}{OD}+\frac{OD}{OC};$$

$$\frac{DA}{OQ}=\frac{OD}{OA}+\frac{OA}{OD}.$$

Așadar,

$$\frac{AB}{OM}+\frac{BC}{ON}+\frac{CD}{OP}+\frac{DA}{OQ}=\left(\frac{OB}{OA}+\frac{OD}{OA}\right)+$$

$$+\left(\frac{OA}{OB}+\frac{OC}{OB}\right)+\left(\frac{OB}{OC}+\frac{OD}{OC}\right)+\left(\frac{OA}{OD}+\frac{OC}{OD}\right)=$$

$$=\frac{BD}{OA}+\frac{AC}{OB}+\frac{BD}{OC}+\frac{AC}{OD}.$$

1.95. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, E și F mijloacele laturilor paralele AB și CD, I intersecția diagonalelor AC și BD. Paralela la AB dusă prin I taie pe AD

și BC în G și H, iar paralele duse prin G la AC și BD taie pe EF respectiv în L și M.

a). Să se arate că IG este bisectoarea unghiului AID.

b). Dreapta AC împarte segmentul GM în părți egale.

c). Figura $GMHL$ este romb.

(R.M.T., 12.1937, *C. Ionescu-Țiu*).

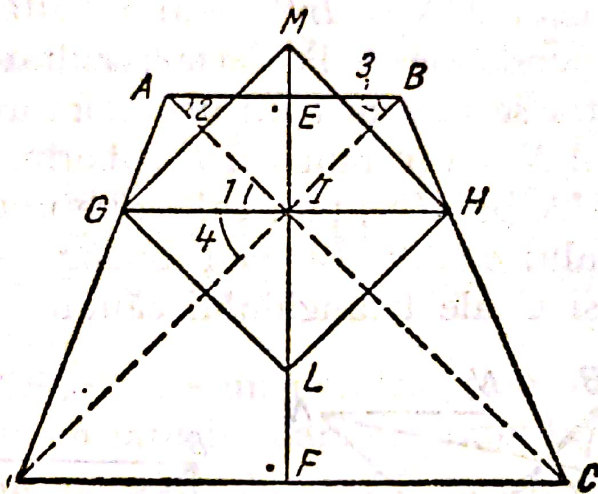


Fig. 1.95

Soluție. a). Avem $\sphericalangle AIG = \sphericalangle IAB = \sphericalangle ABI = \sphericalangle GID$, deci IG este bisectoarea unghiului AID.

b). Paralelogramul $GMHL$ are centrul în I iar paralela din I la laturi trec prin mijlocul laturilor, deci $GN = NM$ unde $N = AC \cap GM$.

c). Paralelogramul $GMHL$ are diagonalele perpendiculare deoarece $EF \perp AB$ și $GH \parallel AB \Rightarrow ML \perp GH$ și deci $GMHL$ este romb.

1.96. Să se construiască triunghiul ABC dacă sînt cunoscute centrele pătratelor construite pe laturile triunghiului, în afara triunghiului.

Soluție. Considerînd problema rezolvată să notăm M, N și P centrele pătratelor și cu A_1, B_1, C_1 mijloacele corespunzătoare ale laturilor triunghiului ABC. Să unim punctul M cu punctul N, punctul P cu punctul B și punctul C_1 cu punctele A_1 și B_1. Mai departe, să luăm segmentul B și punctul $C_1N_1 = A_1N$ paralel și de același sens cu A_1N și să unim pe N_1 cu N.

În acest caz avem $MC_1 = BC_1$, $C_1N_1 = CA_1$, deoarece ambele sînt egale cu $\frac{1}{2} BC$; $N_1N = B_1P$, deoarece ambele sînt egale cu $\frac{1}{2} AC$; $\sphericalangle MC_1N_1 = \sphericalangle BC_1B_1$, deoarece laturile sînt perpendiculare; la fel $\sphericalangle C_1N_1N = \sphericalangle C_1B_1P$. De aici rezultă că poligonul MC_1N_1N se suprapune peste poligonul BC_1B_1P (poligoanele sînt egale), deci $MN = BP$; mai rezultă că MN și BP sînt perpendiculare. Pe baza rezultatelor de mai sus construcția se face în felul următor: unim punctul M cu punctul N și din punctul P coborîm perpendiculara $PB = MN$ pe MN; punctul B este unul din vîrfurile triunghiului căutat. În mod analog se construiesc vîrfurile A și C ale triunghiului căutat.

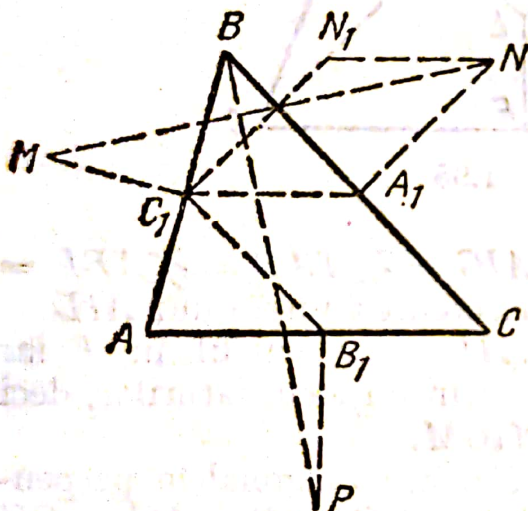


Fig. 1.96

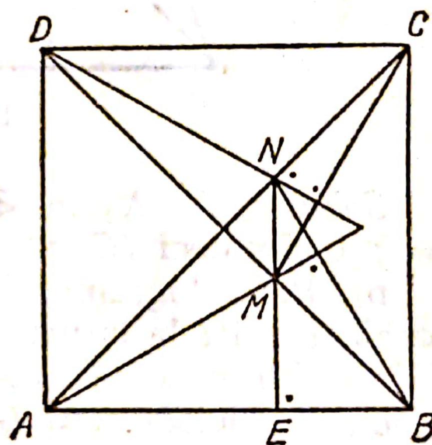


Fig. 1.97

1.97. a). Într-un pătrat $ABCD$ se ia un punct oarecare mobil M pe diagonala BD. Să se arate că perpendiculara din M pe AB, perpendiculara din B pe AM, perpendiculara din D pe CM și diagonala AC sînt 4 drepte concurente într-un punct N. Se dă $AB = 1$ m.

b). Să se arate că suma $S = AM + MN + ND$ cînd M variază pe BD este cuprinsă între $\sqrt{2}$ m și 3 m.

(G.M.B., 14067, C. *Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Fie $AC \cap ME = N$; $AC \perp BD \Rightarrow M$ este ortocentrul triunghiului ABN. Deci $AM \perp BN$. La fel N este ortocentrul triunghiului CDM deoarece $DM \perp CN$, N fiind pe diagonala AC. Deci $DN \perp MC$ deoarece $MN \perp DC$.

b). Patrulaterele $AMND$ și $BMNC$ sînt trapeze isoscele. Dacă M este în B atunci N este în C și $S = 1 + 1 + 1 = 3$ m. Dacă M este în D atunci N este în A și $S = 3$ m. Dacă M este la intersecția diagonalelor, atunci $M \equiv N$ și $S = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ m.

1.98. Se dă un paralelogram $ABCD$. Notăm cu A_1, B_1, C_1, D_1 mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Notăm cu E și G intersecția diagonalei AC cu DA_1 și BC_1, iar cu F și H intersecțiile diagonalei BD cu A_1C și C_1A. Să se arate că:

a). Figura $EFGH$ este un paralelogram avînd laturile sale paralele cu laturile paralelogramului dat.

b). Lungimile laturilor EF și FG sînt a treia parte din lungimile AB și BC.

c). Punctul E se mai află pe BD_1 iar punctul F pe AB_1.

d). $\frac{CF}{FA_1} = \frac{AF}{FB_1} = \frac{DE}{EA_1} = \frac{CE}{EA} = 2.$

Soluție. a). Notăm cu O intersecția diagonalelor AC și BD. Avem $BC_1 \parallel A_1D$. În triunghiul CED avem

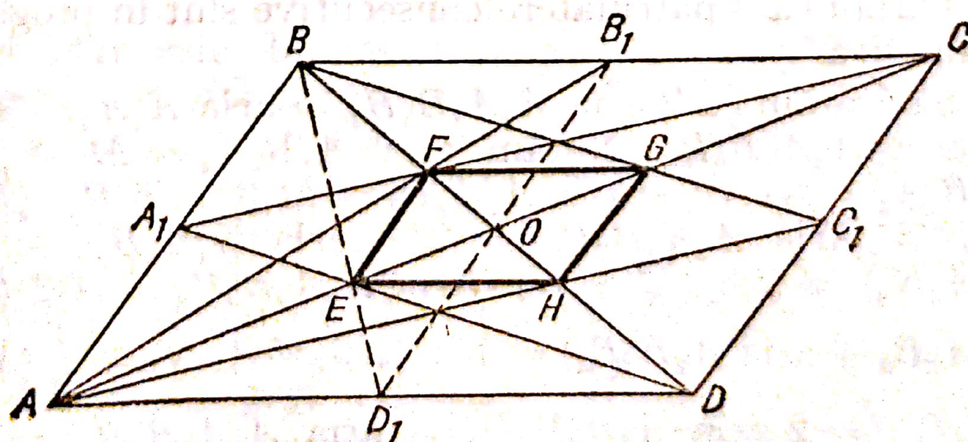


Fig. 1.98

6

$CG = GE$. În triunghiul AGB avem $AE = GE \Rightarrow AE = EG = GC$. De asemenea, $OG = OE$. Analog, $BF = FH = HD$, $FO = OH$.

Deci, $FGHE$ este un paralelogram căci diagonalele se înjumătățesc.

b). $OA = 3OE$; $OD = 3OH$; $EH \parallel AD$, la fel $3EF = AB$.

c). În triunghiul ABD segmentele AO și DA_1 sînt mediane, deci E este centrul lui de greutate și $OA = 3OE$. Idem $BD_1 = 3ED_1$.

În triunghiul ABC, BO și CA_1 sînt mediane, deci și AF va fi mediană și va trece deci prin B_1.

d). Avem $CF = 2FA_1$; $AF = 2FB_1$; $DE = 2EA_1$. $\Rightarrow CG = GE = EA$ și $CE = 2EA$.

1.99. În patrulaterul $ABCD$, laturile opuse AD și BC se divid în cîte 5 părți egale, respectiv prin punctele A_1, A_2, A_3, A_4 și B_1, B_2, B_3, B_4.

a). Să se arate că 2 aria $(A_2A_3B_3B_2)$ = aria $(A_1A_2B_2B_1)$ + aria $(A_3A_4B_4B_3)$ = aria (AA_1B_1B) + aria (A_4BCB_4).

b). Să se arate că ariile celor cinci patrulatere sînt în progresie aritmetică.

c). Generalizare cînd laturile se divid în n părți egale.

(G.M.B., 11109, C. *Ionescu-Țiu*).

Soluție. Cele 3 puncte a), b) și c) cerute rezultă dacă vom arăta că 3 patrulatere consecutive sînt în progresie aritmetică.

Să arătăm că 2 aria $A_2A_3B_3B_2$ = aria $A_1A_2B_2B_1$ + aria $A_3A_4B_4B_3$. Notăm aria $A_1B_1A_4 = M$ și aria $B_1B_4A_4 = N$. Avem aria $A_1A_2B_1 = M/3$; aria $B_3A_4B_4 = N/3$. Aria $A_2A_4B_3B_1 = 2/3$ (aria $A_1A_4B_1$ + aria $B_1A_4N_4$) $= 2/3\ (M + N)$. Aria $A_2A_3B_3B_2 = 1/2$ (aria $B_1A_2B_3$ + aria $A_2B_3B_4$) $= 1/2.\ 2/3(M + N) = \frac{1}{3}(M + N) \Rightarrow$ 2 aria $A_2A_3B_3B_2$ = aria $A_1A_2B_2B_1$ + aria $A_3A_4B_4B_3$.

1.100. Se dă un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) și notăm cu O centrul cercului circumscris lui. Mediatoarea laturii AB taie în M perpendiculara din B pe BC, iar mediatoarea laturii AC taie în N paralela dusă din C la AB.

a). Să se afle cîte grade are fiecare unghi din triunghiul dat ABC știind că unghiul MAN are 120°.

b). Să se demonstreze că punctele A, M, B, O sînt vîrfurile unui romb.

c). Notînd cu M' și N' picioarele înălțimilor duse respectiv din vîrfurile M și N ale triunghiului MAN, să se arate că avem $MN = 2M'N'$.

(G.M.B., 9698, *Gh. Bazacov*).

Soluție. a). Triunghiurile AMB și ANC sînt isoscele, fiindcă M și N se găsesc pe mediatoarele date. Atunci: $A_1 = 90° - B$; $A_2 = C_1$ și cum $C_1 = A$ ca unghiuri alterne interne, rezultă că $A_2 = A$.

Din figură se observă că $\sphericalangle MAN = A_1 + A + A_2$ și atunci $90° - B + A + A = 120°$ sau $2A - B = 30°$. Dar $B = 90° - \frac{A}{2}$ și atunci $2A + \frac{A}{2} - 90° = 30°$ de unde obținem că $5A = 240°$ sau $A = 48°$. Unghiurile triunghiului ABC vor avea: $A = 48°$, $B = C = 66°$.

b). Cele două mediatoare se întîlnesc în O, iar $A_1 = 90° - B$, dar $B = 66°$ și atunci $A_1 = 24°$ sau $A_1 = \frac{A}{2}$. În consecință, latura AB este bisectoarea unghiului MAO și totodată perpendiculară pe OM, de unde rezultă că triunghiul MAO este isoscel și vom avea $AM = AO$. Însă am arătat la început că $MA = MB$ și $OB = OA$ și atunci $AM = MB = OB = OA$ deci patrulaterul $AMNO$ este un romb.

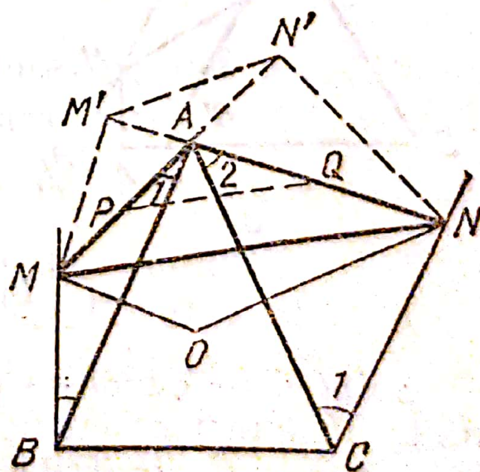


Fig. 1.100

c). Fiindcă triunghiul MAN are un unghi obtuz de 120°, atunci picioarele M' și N' ale înălțimilor din M și N vor fi situate pe prelungirile laturilor AM și AN. Triunghiurile dreptunghice $MM'A$ și $NN'A$ vor avea cîte un unghi de 60°, ca supliment al unghiului de 120°. Celelalte unghiuri ascuțite vor fi deci de cîte 30°.

Atunci putem scrie că $AM' = AP$ și $AN' = AQ$ (unde P și Q sînt mijloacele laturilor AM și AN). Considerînd triunghiurile APQ și $AM'N'$ putem afirma că sînt egale, avînd: $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle M'AN' = 120°$ (opuse la vîrf), $AM' = AP$ și $AN' = AQ$.

Din egalitatea lor rezultă că $M'N' = PQ$; însă PQ este linie mijlocie în triunghiul AMN și deci $M'N' = \frac{MN}{2}$ sau $MN = 2M'N'$.

1.101. Se dă un triunghi echilateral ABC. Să se afle locul geometric al punctelor așezate în planul triunghiului, astfel încît suma distanțelor la laturile triunghiului să fie egală cu un număr dat.

Discuție.

(G.M.B., 11130, *V. Vasu*).

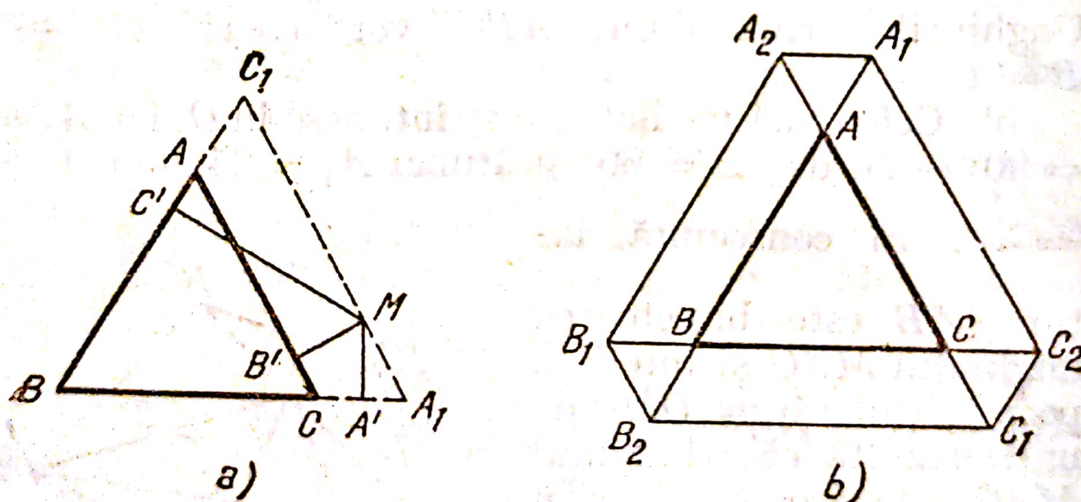


Fig. 1.101

Soluție. Se cunoaște proprietatea: suma distanțelor de la un punct situat pe baza unui triunghi isoscel, la laturile egale, este egală cu înălțimea triunghiului isoscel ce pleacă din extremitățile acestei baze.

De asemenea, se știe că suma distanțelor de la un punct situat în interiorul unui triunghi echilateral la laturile triunghiului este constantă și egală cu înălțimea triunghiului echilateral.

Să dovedim acum teorema contrară acestei teoreme: dacă un punct nu este situat în interiorul sau pe laturile unui triunghi echilateral, suma distanțelor de la punct la laturi nu este egală cu înălțimea triunghiului.

Fie M un punct exterior triunghiului ABC. Însumăm distanțele MA' și MC. Ducînd prin M dreapta $A_1C_1 \| AC$ se formează triunghiul isoscel (de fapt chiar echilateral) A_1BC_1. Aplicînd prima proprietate enunțată, rezultă că $MA' + MC' = h$ unde s-a notat cu h înălțimea triunghiului A_1BC_1. Dar $h > h_a$, deci:

$$(MA' + MC') + MB' = h + MB' > h_a + MB' > h_a.$$

Rezultă *propoziția I:* locul geometric al punctelor astfel așezate încît suma distanțelor la cele 3 laturi ale triunghiului să fie egală cu înălțimea h a triunghiului echilateral dat este *suprafața întregului triunghi inclusiv laturile.*

Propoziția II: dacă suma distanțelor este mai mică decît înălțimea triunghiului, locul geometric este *mulțimea vidă.*

Cazul III: presupunem că suma s a distanțelor este dată mai mare ca h_a.

Avem $(MA' + MC') + MB' = s$ sau, ținînd seama de cele dovedite: $(h + MB') + MB' = s$, deci $2MB' = s - h_a$.

Rezultă că segmentele duse paralel cu laturile triunghiului echilateral, în afara triunghiului, la distanța $\frac{1}{2}(s - h_a)$ și mărginite la prelungirile acestor laturi, conțin puncte care satisfac condiția cerută.

Notăm aceste segmente cu A_2B_1, B_2C_1 și C_2A_1.

Se dovedește ușor că și punctele segmentelor A_1A_2, B_1B_2 și C_1C_2 satisfac proprietatea cerută, precum și teorema contrară: dacă punctul nu este situat pe hexagonul $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, nu satisface condiția.

În acest caz, *locul geometric căutat este hexagonul* $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ (numai punctele care aparţin laturilor hexagonului).

1.102. Se dă un patrulater convex $ABCD$ și se notează vectorii $\vec{AB} = \vec{a}$; $\vec{BC} = \vec{b}$; $\vec{CD} = \vec{c}$; $\vec{DA} = \vec{d}$. Se consideră apoi vectorii liberi: $\lambda\vec{a}$, $\lambda\vec{c}$, $\mu\vec{b}$, $\mu\vec{d}$, λ și μ fiind scalari oarecare. Dacă E, F sînt respectiv mijloacele diagonalelor AC, BD, se cere:

1). Să se exprime suma $\vec{s} = \lambda(\vec{a} + \vec{c}) + \mu(\vec{b} + \vec{d})$ în funcție de vectorul $\vec{EF}$.

2). Să se deducă din expresia obținută:

a). condiția ca $\vec{s} = 0$ pentru un patrulater oarecare;

b). condiția ca $\vec{s} = 0$ pentru λ și μ oricare;

c). notînd $AC = \vec{p}$; $BD = \vec{q}$ să se demonstreze că $\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{p} \cdot \vec{q}$.

(G.M.B., 8916, *Gh. D. Simionescu*).

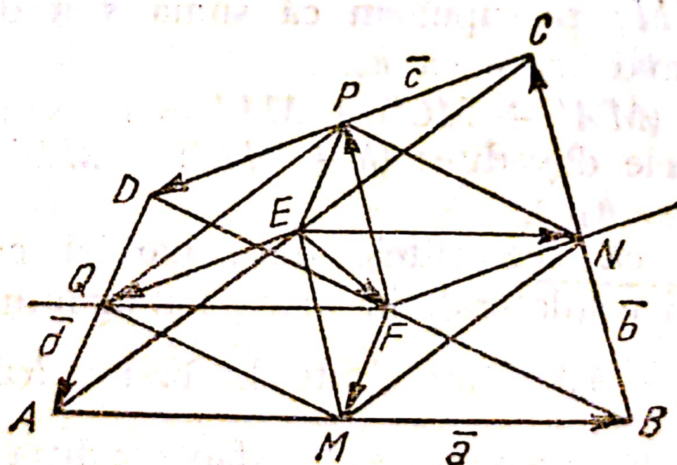


Fig. 1.102

Soluție. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Se ştie că $MNPQ$, $EMFP$, $ENFQ$ sînt paralelograme.

Apoi $AB = 2EN$, $CD = 2EQ$, de unde se deduce

$$\lambda(\vec{a} + \vec{c}) = 2\lambda(\overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EQ}) = 2\lambda\overrightarrow{EF}.$$

În mod asemănător

$$\mu(\vec{b} + \vec{d}) = 2\mu(\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{FM}) = 2\mu\overrightarrow{FE}.$$

Rezultă

$$\vec{s} = \lambda(\vec{a} + \vec{c}) + \mu(\vec{b} + \vec{d}) = 2(\lambda - \mu)\overrightarrow{EF}.$$

Avem $\vec{s} = 0$, dacă

a). $\lambda = \mu$ oricare ar fi patrulaterul, lucru care se verifică imediat, deoarece poligonul de vectori se închide.

b). $\overrightarrow{EF} = 0$, deci $E \equiv F$ în care caz patrulaterul este un paralelogram și vectorii sînt doi cîte doi opuși.

2. Avem $\vec{a} + \vec{b} = \vec{p}$; $\vec{b} + \vec{c} = \vec{q}$, prin urmare $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{p} \cdot \vec{q}$. Însă prima parte se mai scrie $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Dar $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$, deci $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -\vec{d}$ și relația devine $\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{p} \cdot \vec{q}$.

1.103. Fie un patrulater convex $A_1A_2A_3A_4$ iar G intersecția segmentelor care unesc mijloacele laturilor opuse ale acestui patrulater. O dreaptă (d) care trece prin G lasă de o parte punctele A_1 și A_2 și de cealaltă parte punctele A_3 și A_4. Notăm cu B_1, B_2, B_3, B_4 proiecțiile punctelor A_1, A_2, A_3, A_4 pe dreapta (d).

Să se arate că $A_1B_1 + A_2B_2 = A_3B_3 + A_4B_4$.

(G.M., 15235, C. *Ionescu-Țiu*).

Soluție. Notăm cu C și D mijloacele laturilor A_1A_2 și respectiv A_3A_4, iar cu C_1 și D_1 proiecțiile punctelor C și D pe dreapta (d).

Rezultă $CC_1 = DD_1$ dar CC_1 și DD_1 fiind linii mijlocii în trapezele $A_1B_1B_2A_2$ și respectiv $A_3B_3B_4A_4$ avem:

$$A_1B_1 + A_2B_2 = 2CC_1 \text{ și } A_3B_3 + A_4B_4 = 2DD_1.$$

1.104. În patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ notăm cu B_1, B_2, B_3, B_4 respectiv mijloacele segmentelor A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1, iar $I = B_1B_3 \cap B_2B_4$ și fie M un punct din plan, exterior patrulaterului. Să se arate că: aria MA_1A_4 + aria MA_2A_4 + aria MA_3A_4 = aria MB_1B_4 + aria MB_2A_4 + aria MB_3A_4 + aria MB_4A_4 = = 4 aria MIA_4.

(G.M., 15206, *C. Ionescu-Țiu*)

Soluție. Din relațiile:

$$\overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MA}_2 = 2\overrightarrow{MB}_1;\ \overrightarrow{MA}_2 + \overrightarrow{MA}_3 = 2\overrightarrow{MB}_2;$$

$$\overrightarrow{MA}_3 + \overrightarrow{MA}_4 = 2\overrightarrow{MB}_3;\ \overrightarrow{MA}_4 + \overrightarrow{MA}_1 = 2\overrightarrow{MB}_4.$$

Prin adunare obținem:

$$\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{MA}_i = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{MB}_i. \text{ Dar } \overrightarrow{MB}_1 + \overrightarrow{MB}_3 = 2\overrightarrow{MI} \text{ și}$$

$$\overrightarrow{MB}_2 + \overrightarrow{MB}_4 = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{MA}_i = 4\overrightarrow{MI} = \sum_{i=1}^{4} MB_i.$$

Aplicăm teorema momentelor forțelor în raport cu punctul A_4, adică

$$\sum_{i=1}^{4} \mathfrak{M}_{A_4} \equiv \overrightarrow{MA}_i = \sum_{i_j=1}^{4} \mathfrak{M}_{A_4} \equiv \overrightarrow{MB}_i = 4\mathfrak{M}_{A_4} \equiv \overrightarrow{MI}$$

de unde rezultă relațiile cerute dintre arii.

RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIURI ȘI PATRULATERE

1. *Teorema lui Tales.* O dreaptă $B'C'$, $B' \in AB$ și $C' \in AC$ este paralelă cu BC dacă și numai dacă $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$ și reciproc: $B'C'$ este paralelă cu BC atunci și numai atunci cînd $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

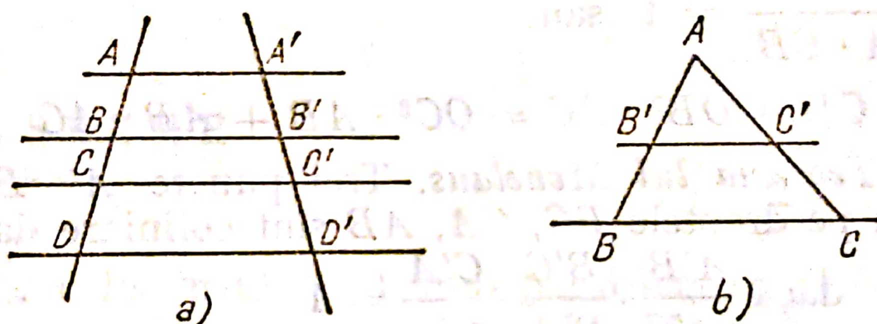


Fig. 2

2. În general, mai multe drepte sînt paralele dacă și numai dacă determină pe două secante arbitrare segmente proporționale

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \ldots$$

3. *Teorema bisectoarelor.* Dacă AD și AE sînt respectiv bisectoarea interioară și exterioară duse din A în triunghiul ABC, atunci

$$\frac{DB}{DC} = -\frac{c}{b} \text{ și } \frac{EB}{EC} = \frac{c}{b}, \text{ deci } \frac{DB}{DC} = -\frac{EB}{EC};$$

relație care spune că punctele B, C, D, E, formează o *diviziune armonică.*

4. *Aria triunghiului.*

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

unde $a + b + c = 2p$.

5. *Teorema lui Pitagora generalizată.* Într-un triunghi oarecare ABC ducem înălțimea AD. Avem cu notațiile cunoscute:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\varepsilon b \cdot AD$ unde $\varepsilon = +1$ dacă unghiul este ascuțit și $\varepsilon = -1$ dacă A este obtuz.

Observație. Dacă $A = 90°$, atunci $AD = 0$ și avem teorema lui *Pitagora* în triunghiul dreptunghic în A; $a^2 = b^2 + c^2$.

6. *Teorema lui Stewart.* Dacă O este un punct exterior dreptei ACB, atunci $\frac{OA^2}{AB \cdot AC} + \frac{OB^2}{BC \cdot BA} + \frac{OC^2}{CA \cdot CB} = 1$ sau

$$OA^2 \cdot CB + OB^2 \cdot AC = OC^2 \cdot AB + AB \cdot AC \cdot CB.$$

7. *Teorema lui Menelaus.* Trei puncte A', B', C' situate pe dreptele BC, CA, AB sînt coliniare dacă și numai dacă $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$

8. *Teorema lui Ceva.* Trei drepte AA', BB', CC' care trec prin vîrfurile unui triunghi, numite și ceviene, sînt concurente dacă și numai dacă:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'D} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1.$$

9. *Relații într-un patrulater convex* $ABCD$ de arie S; M și N mijloacele diagonalelor AC și BD, iar φ unghiul diagonalelor.

$$A + B + C + D = 360°$$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

$$4S = \sqrt{(2AC \cdot BD)^2 - (AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2)^2}$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \varphi.$$

10. *Teorema lui Van Aubel.* Într-un triunghi ABC între segmentele determinate de trei ceviene AA_1, BB_1, CC_1 concurente în punctul O din interior avem relația

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} \text{ și analoagele.}$$

11. Fie un punct M pe diagonala AC a unui patrulater oarecare $ABCD$. Prin M ducem o dreaptă care taie pe dreapta AB în α și pe BC în β. Tot prin M mai ducem o altă dreaptă care taie pe CD în γ și pe AD în δ. Există relația

$$\frac{A\alpha}{B\alpha}\cdot\frac{B\beta}{C\beta}\cdot\frac{C\gamma}{D\gamma}\cdot\frac{D\delta}{A\delta} = 1 \quad (Carnot).$$

PROBLEME

2.1. Prin vîrful A al unui paralelogram $ABCD$ se duce o secantă care taie diagonala BD în E iar laturile BC, CD în F și G. Să se arate că $AE^2 = EF \cdot EG$.

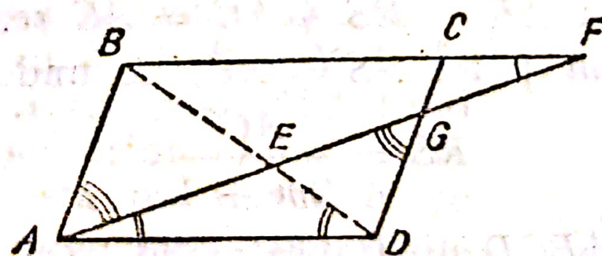


Fig. 2.1

Soluție. Relația cerută se mai scrie $\frac{AE}{FE} = \frac{GE}{AE}$.

Avem: $\frac{AE}{FE} = \frac{ED}{EB}$ din asemănarea triunghiurilor ADE și FEB;

$\frac{GE}{AE} = \frac{ED}{EB}$ din asemănarea triunghiurilor ABE și GDE.

$$\frac{AE}{FE} = \frac{GE}{AE}.$$

2.2. Pe laturile opuse AB și CD ale unui paralelogram, luăm respectiv, punctele M și N astfel că $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = m$. Dreptele DM și BN taie diagonala AC și punctele R și S. Să se arate că: $RS = \frac{AC}{2m+1}$.

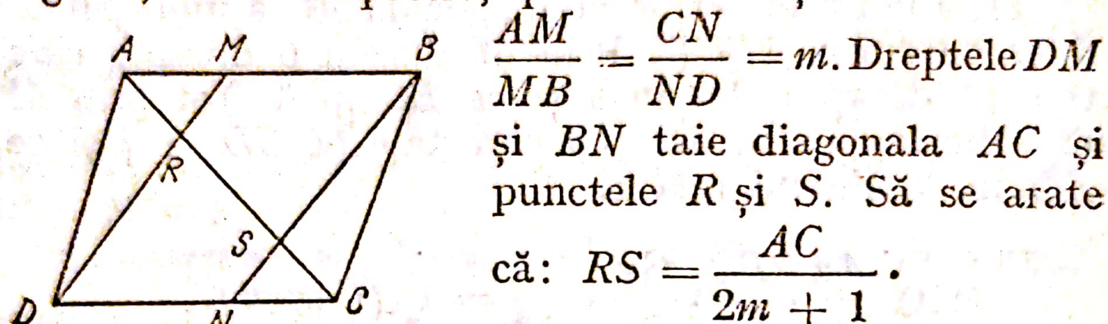


Fig. 2.2

(G.M., 1363, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = m$ și cum $AB = \parallel DC$, rezultă că $AM = CN$. Deci, $MD = \parallel BN$. Din triunghiurile asemenea ASB și ARM deducem $\frac{AR}{RS} = \frac{AM}{MB} = m$, deci $AR = m \cdot RS$.

Analog, $\frac{SC}{RS} = \frac{CN}{ND} = m$, deci $SC = m \cdot RS$.

Din relația $AR + RS + SC = AC$ rezultă

$(2m + 1) \cdot RS = AC$, de unde

$$RS = \frac{AC}{2m+1}.$$

2.3. Fie $ABCD$ un trapez avînd baza mică $AB = a$ și baza mare $DC = b$. Pe latura AD se ia un

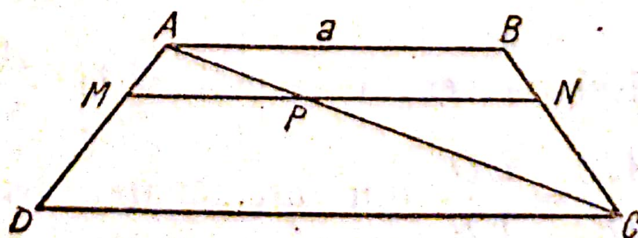


Fig. 2.3

punct M astfel ca $\frac{MA}{MD} = \frac{p}{q}$. Prin M se duce paralela MN la cele 2 baze. Să se calculeze MN în funcție de a, b, p, q.

Soluție. În triunghiul ACD avem:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{p}{q} \text{ sau } \frac{MA}{MA + MD} = \frac{p}{p+q} = \frac{MA}{AD}.$$

Însă:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MP}{b}; \text{ deci, } \frac{MP}{b} = \frac{p}{p+q}; \qquad (1)$$

$$MP = \frac{bp}{p+q}.$$

Analog, din triunghiul ABC se deduce:

$$PN = \frac{aq}{p+q}. \qquad (2)$$

Adunînd pe (1) cu (2) avem:

$$MN = (aq + bp) : (p + q).$$

2.4. În triunghiul oarecare ABC ducem bisectoarea AD. Să se arate că $AD^2 < AB \cdot AC$.

Soluție. Din D ducem DE, $E \in AB$ astfel că $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADE$. Deoarece $\sphericalangle ADB > \sphericalangle ACD$ fiind unghi exterior triunghiului ACD, rezultă că există un punct E pe latura AB care face construcția posibilă.

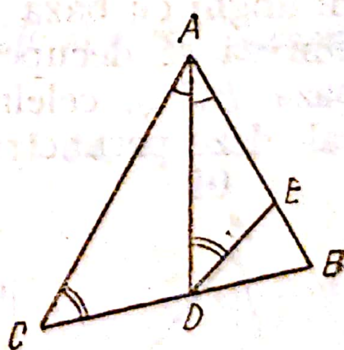


Fig. 2.4

Triunghiurile ACD și ADE sînt asemenea, avînd unghiurile din A egale (CD fiind bisectoare).

Din raportul de asemănare

$$\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{AE} \Rightarrow CD^2 = AE \cdot AC < AB \cdot AC.$$

2.5. Fie AC diagonala cea mai mare a paralelogramului $ABCD$. Ducem $CE \perp AB$ și $CF \perp AD$. Să se arate că

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

Soluție. Ducem $BG \perp AC$. Triunghiurile dreptunghice AEC și AGB sînt asemenea avînd unghiul din A comun. Triunghiurile dreptunghice AFC și CGB sînt asemenea, deoarece $\sphericalangle FAC = \sphericalangle BCG$ ca alterne interne. Avem:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AG} \text{ și } \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{GC}$$

sau

$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC(AG + GC)$$

dar

$$BC = AD \text{ și } AG + GC = AC$$

și prin urmare

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

În cazul cînd paralelogramul este un dreptunghi atunci $B \equiv E$ și $D \equiv F$ și obținem $AB^2 + AD^2 = AC^2 = BD^2$, adică *teorema lui Pitagora.*

2.6. O bucată de tablă are forma de triunghi ascuțit unghi cu baza BC egală cu înălțimea $AA' = 12$ cm. Din ea se decupează un triunghi cu două vîrfuri pe baza BC și celelalte respectiv pe AB și AC. Să se calculeze perimetrul acestui triunghi.

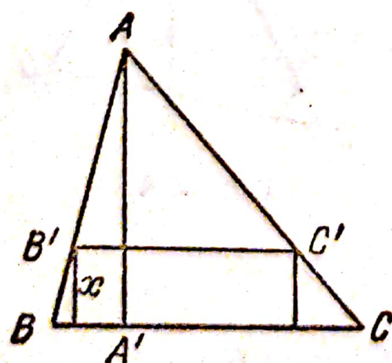


Fig. 2.6

Soluție. Notăm cu x înălțimea dreptunghiului și cu y baza sa care va fi și baza triunghiului $AB'C'$ (vezi figura) $B'C' \parallel BC$.

Din asemănarea triunghiurilor $AB'C'$ și ABC rezultă $\frac{AA'}{BC} = \frac{AA' - x}{B'C'}$. Înlocuind cu va-

lorile cunoscute rezultă $AA' - x = B'C'$. Perimetrul este $2B'C' + 2x$ sau $2AA' - 2x + 2x = 2AA' = 24$.

2.7. $ABCD$ este un pătrat, F mijlocul lui DC. Perpendiculara din A pe BF întîlnește pe aceasta în punctul E. Demonstrați că $AD = DE$.

(Concurs elevi, E: 4475).

Soluție. Notăm latura pătratului cu a. Aplicăm *teorema lui Pitagora* în triunghiul BFC, obținem $BF = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

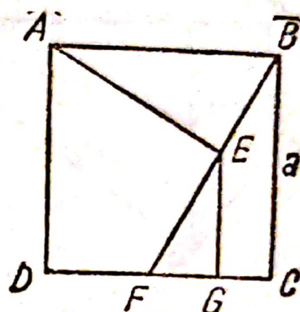


Fig. 2.7

Din asemănarea triunghiurilor AEB și BFC (care sînt dreptunghice și au și cîte un unghi cu laturi perpendiculare) rezultă: $\frac{AB}{BF} = \frac{AE}{BC} = \frac{FB}{FC}$ și de aici rezultă:

$$AE = \frac{2a}{\sqrt{5}},\ EB = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Ducem EG perpendiculara pe FC ($G \in FC$). Segmentul

$$EF = FB - EB = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{5} = a\sqrt{5}\cdot\frac{3}{10}.$$

Din asemănarea triunghiurilor FGE și FBC rezultă

$$\frac{EG}{BC} = \frac{FE}{FB} = \frac{FG}{FC} \text{ sau } EG = \frac{3a}{5} \text{ și } FG = \frac{3a}{10}.$$

În triunghiul DEG, $DG = DF + FG = \frac{a}{2} + \frac{3a}{10} = \frac{4a}{5}$ și aplicînd *teorema lui Pitagora*: $DE^2 = EG^2 + DG^2 = \frac{9a^2}{25} + \frac{16a^2}{25} = a^2$ deci $DE = a$ și cum a este latura pătratului, $DE = AD$.

2.8. Să se demonstreze că dacă unul din unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este de 15°, înălțimea coborîtă din vîrful unghiului drept pe ipotenuză este un sfert din ipotenuză.

(G.M.B., E: 754, *C. Ionescu-Țiu*).

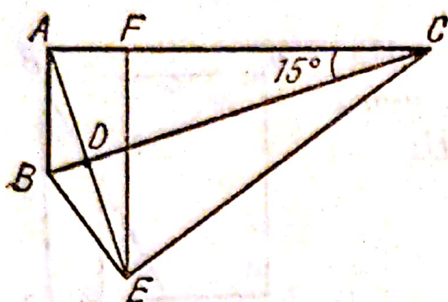


Fig. 2.8

Soluție. Fie triunghiul ABC și D piciorul înălțimii coborîtă pin vîrful unghiului drept A de ipotenuză, iar $\sphericalangle C = 15°$. Notăm cu E simetricul punctului A față de punctul D. Fie F piciorul perpendicularei coborîtă din punctul E pe cateta AC. Se observă că $\sphericalangle ACE = 30°$. Prin urmare, $EF = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}AC$.

Din triunghiurile asemenea ABC și AEF rezultă $\frac{BC}{AE} = \frac{AC}{EF}$.

De aici deducem

$$AE = \frac{BC \cdot EF}{AC} = \frac{BC \cdot \frac{1}{2}AC}{AC} = \frac{1}{2}BC.$$

Dar, $AE = 2AD$ deci

$$AD = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{4}BC.$$

2.9. În mijlocul D al ipotenuzei AB a triunghiului ABC ridicăm o perpendiculară pe ipotenuză. Această perpendiculară taie cateta CB în punctul M, iar prelungirea catetei AC în N. Să se calculeze ipotenuza dacă $DM = 3$ cm și $MN = 9$ cm.

(Matematica v școle, 1960).

Soluție. Triunghiurile AND și BMD sînt asemenea fiind dreptunghice și $\sphericalangle DNA = \sphericalangle DBM$. Astfel:

$$\frac{DB}{DN} = \frac{DM}{DA} \text{ sau } \frac{DB}{12} = \frac{3}{DB},$$

deci $DB = 6$ cm, $AB = 2DB = 12$ cm.

2.10. În mijlocul O al ipotenuzei AB a triunghiului ABC ridicăm o perpendiculară pe ipotenuză. Această perpendiculară taie cateta CB în punctul M, iar prelungirea catetei AC o taie în N. Să se calculeze ipotenuza, dacă $OM = 3$ cm, $MN = 9$ cm.

Soluție. Triunghiul ANO este asemenea cu triunghiul BMO deoarece ambele sînt dreptunghice și $\sphericalangle ONA = \sphericalangle OBM$, laturile corespunzătoare fiind perpendiculare. Putem scrie deci că $\frac{OB}{ON} = \frac{OM}{OA}$. Folosind datele, obținem:

$$\frac{OB}{12} = \frac{3}{OB}; \quad OB^2 = 36, \text{ deci } OB = 6.$$

Deoarece $AB = 2OB$, avem $AB = 12$ cm.

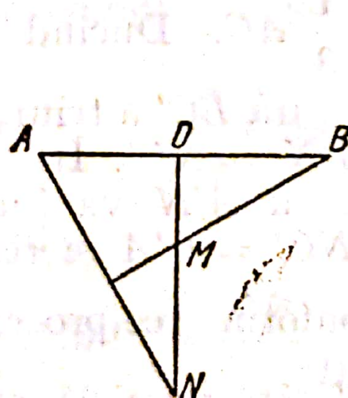


Fig. 2.10

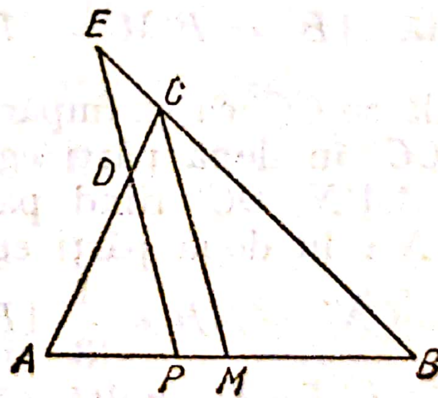


Fig. 2.11

2.11. Pe baza AB a unui triunghi ABC se ia un punct oarecare P din care se duce o paralelă la mediana CM a triunghiului. Această paralelă taie celelalte două laturi (sau prelungirile lor) în punctele D și E. Să se arate că $PD + PE =$ constant.

Soluție. Din asemănarea triunghiurilor (CAM și DAP) și (BCM și EBP) rezultă:

$$\frac{PD}{CM} = \frac{AP}{AM} = \frac{2AP}{AB}; \quad \frac{PE}{CM} = \frac{PB}{MB} = \frac{2BP}{AB},$$

de unde

$$\frac{PD + PE}{CM} = \frac{2(AP + PB)}{AB} = \frac{2AB}{AB} = 2$$

căci $AP + PB = AB$ și deci, $PD + PE = 2CM =$ $=$ constant.

2.12. În triunghiul ABC se notează cu O mijlocul medianei AA'. Se duce BO pînă taie pe AC în B' și CO pînă taie pe AB în C'. Se cere: a). Să se arate că BC și $B'C'$ sînt paralele; b). Să se arate că aria $OB'C' = \frac{1}{18}$ aria ABC.

Soluție. a). Ducînd $A'M$ paralelă la BB', ea va fi linie mijlocie în triunghiul BCB', deci $CM = MB'$.

În triunghiul $AA'M$, OB' fiind paralelă cu MA' va tăia și pe AM în două părți egale, $AB' = B'M$. Rezultă $AB' = B'M = MC = \frac{1}{3} AC$. Ducînd $A'N$ paralelă cu CC' ea va împărți și latura BC' a triunghiului BCC' în două părți egale: $BN = NC'$. În triunghiul $AA'N$, OC' fiind paralelă cu $A'N$ va împărți și pe NA în două părți egale, $NC' = C'A$ și rezultă $AC' = CN' = NB = \frac{1}{3} AB$. Conform reciprocei *teoremei lui Tales* rezultă că $B'C'$ este paralelă cu latura BC a triunghiului ABC.

b). triunghiurile $OB'C'$ și OBC sînt asemenea și raportul de asemănare este $\frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{3}$, deci, aria $OB'C' = \frac{1}{9}$ aria OBC. Însă aria $OBC = \frac{1}{2}$ din aria

ABC, triunghiurile avînd aceeași bază, iar înălțimile în raportul 1:2, rezultă că aria $OB'C' = \frac{1}{18}$ aria ABC.

2.13. Printr-un punct P al bazei BC a unui triunghi oarecare ABC se duce o paralelă cu mediana AD a triunghiului; ea taie dreapta AB în M și dreapta AC în N. a). Să se demonstreze relația $AM \cdot AC = AN \cdot AB$; b). $MP + NP = 2AD$.

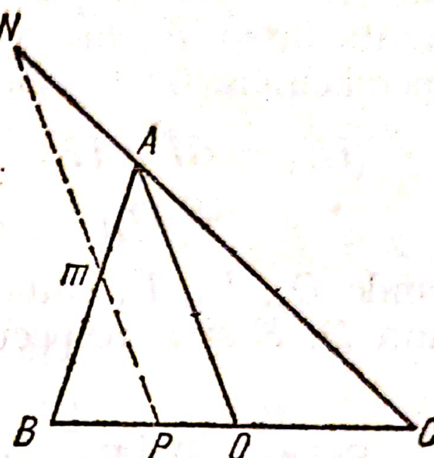


Fig. 2.13

Soluție. a). Deoarece AD și NP sînt paralele conform *teoremei lui Tales* avem:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{PD}{DC} \text{ și } \frac{AM}{AB} = \frac{PD}{BD}.$$

Împărțim aceste două relații și obținem: $\frac{AN \cdot AB}{AC \cdot AM} = \frac{BD}{DC}$, însă $BD = DC$, deci: $\frac{AN \cdot AB}{AC \cdot AM} = 1$ sau $AN \cdot AB = AC \cdot AM$.

b). conform aceleiași teoreme:

$$\frac{MP}{BP} = \frac{AD}{BD} \text{ și } \frac{NP}{PC} = \frac{AD}{DC}$$

de unde,

$$MP = \frac{BP \cdot AD}{BD} \quad \text{și} \quad NP = \frac{AD \cdot PC}{DC}$$

sau adunînd aceste relații:

$$MP + NP = \frac{2AD(BP + PC)}{BC} =$$

$$= \frac{2AD \cdot BC}{BC} = 2AD.$$

2.14. În planul unui triunghi oarecare ABC de laturi $BC = a$, $AC = b$, și $AB = c$ se construiesc în afara triunghiului dat, triunghiurile BCD, ACE, ABF, astfel că $AE = FA = a$, $BD = FB = b$ și $DC = CE = c$. a). Să se arate că perpendicularele duse din D, E și F respectiv pe BC, AC și AB sînt concurente într-un punct G; b). în punctul G se duce perpendiculara GI pe planul ABC. Să se arate că

$$(IE_1 + GE_1)(IE_1 - GE_1) = (ID_1 + GD_1)(ID_1 - GD_1) = (IF_1 + GF_1)(IF_1 - GF_1)$$

unde D_1, E_1, F_1 sînt picioarele perpendicularelor duse din D, E și F respectiv pe BC, AC și AB.

(G.M.B., 14235, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Facem construcția și deducem că A, B, C sînt mijloacele segmentelor EF, DF și DE. Perpendicularele duse din D, E și F respectiv pe BC, AC și AB sînt înălțimile în triunghiul DEF deci concurente într-un punct G.

b). Deoarece GI este catetă comună triunghiurilor dreptunghice IGE_1, IGD_1 și IGF_1, rezultă:

$$IG^2 = IE_1^2 - E_1G^2 = ID_1^2 - D_1G^2 = IF_1^2 - F_1G^2$$

de unde obținem relația din enunț.

2.15. Într-un triunghi ABC cu laturile $AB = 25$ cm, $BC = 17$ cm și $CA = 26$ cm, se construiește înălțimea AD și mediana BE. Se cere:

a). Să se arate că $AD^2 = 2 \cdot BE^2$.

b). Raportul în care mediana BE împarte înălțimea AD.

(G.M., E: 4455, *I. Safta*).

Soluție. a). Din triunghiurile dreptunghice ABD și ADC se obține $AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$, de unde $DC^2 - BD^2 = 26^2 - 25^2 = (26 - 25)(26 + 25) = 51$, deci:
$(DC - BD)(DC + DB) = 51$ și deoarece $DC + DB = 17$, obținem: $DC - BD = 3$.

Din $DC + DB = 17$ și $DC - BD = 3$ se obține $DC = 10$ cm și $BD = 7$ cm. Din triunghiul ABD

obținem $AD^2 = 52^2 - 7^2 = 576$ deci $AD = \sqrt{576} = 24$ cm.

Fie $EF \perp BC$ şi deoarece $AE = EC$ rezultă $EF = \frac{AD}{2} = 12$ cm şi $DF = FC = \frac{10 \text{ cm}}{2} = 5$ cm; $BF = BD + DF = 7$ cm $+ 5$ cm $= 12$ cm.

Din triunghiul dreptunghic BEF obținem:

$$BE^2 = BF^2 + FE^2 = 12^2 + 12^2 = 144 \cdot 2 = 288.$$

Aşadar, $AD^2 = 576 = 2 \cdot 288 = 2 \cdot BE^2$.

b). Fie O punctul de intersecție dintre AD şi BE. Se determină raportul $\frac{AO}{OD}$ sau $\frac{OD}{AO}$.

$$\triangle BOD \sim \triangle BEF \Rightarrow \frac{OD}{EF} = \frac{BD}{BF} \text{ deci } \frac{OD}{12} = \frac{7}{12} \Rightarrow OD = 7 \text{ cm};$$

$$AO = AD - OD = 24 - 7 = 17 \text{ cm}.$$

Aşadar, $\frac{OD}{AO} = \frac{7}{17}$.

2.16. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) şi un punct oarecare D pe latura BC. Se proiectează D pe AC în E şi E pe AB în F. Să se arate că: $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AE$ şi $CE \cdot EF = DE \cdot (AE - AF)$.

(G.M., E: 5012, *I. Safta*).

Soluție. Se construiesc înălțimile AA', BB' şi CC'. $\triangle CDE \sim \triangle BCB'$ determină $\frac{DE}{BB'} = \frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CB'}$; $\triangle EAF \sim \triangle CAC'$ determină $\frac{EF}{CC'} = \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AC'}$. Din $\frac{DE}{BB'} =$

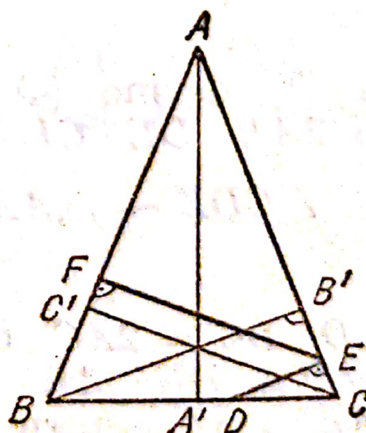


Fig. 2.16

$= \frac{CD}{CB}$ și $\frac{EF}{CC'} = \frac{AE}{AC}$ se obține $\frac{DE}{EF} = \frac{CD}{CB} \cdot \frac{AC}{AE}$ de unde:

$$(1) \quad AC \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AE.$$

Din $\frac{DE}{BB'} = \frac{CE}{CB'}$ și $\frac{EF}{CC'} = \frac{AF}{AC'}$ se obține $\frac{DE}{EF} = \frac{CE}{CB'} \cdot \frac{AC'}{AF}$ de unde $\frac{AC'}{CB'} = \frac{DE \cdot AF}{CE \cdot EF}$ sau $\frac{AC' + CB'}{CB'} = \frac{DE \cdot AF + CE \cdot EF}{CE \cdot EF}$ și deci

$$(2) \quad \frac{AB}{CB'} = \frac{DE \cdot AF + CE \cdot EF}{CE \cdot EF},$$

$\triangle BCB' \sim \triangle AA'C$ determină $\frac{CB'}{\frac{BC}{2}} = \frac{BC}{AC}$ de unde

$CB' = \frac{BC^2}{2AC'}$; deci

$$(3) \quad \frac{BC^2}{2AC} = \frac{AB \cdot CE \cdot EF}{DE \cdot AF + CE \cdot EF}.$$

Din (1) se obține

$$AB \cdot EF = \frac{BC \cdot DE \cdot EA}{CD}$$

și (3) devine (4) $BC \cdot CD(DE \cdot AF + CE \cdot EF) = 2AB \cdot DE \cdot CE \cdot AE.$

$\triangle CDE \sim \triangle AA'C$ determină $\frac{CD}{AC} = \frac{CE}{\frac{BC}{2}}$ de unde

$CD \cdot BC = 2AC \cdot CE$ și (4) devine $DE \cdot AF + CE \cdot EF = DE \cdot AE$ sau $CE \cdot EF = DE \cdot (AE - AF)$; $AE > AF$ pentru orice poziție a lui D pe BC.

2.17. Într-un triunghi isoscel $ABC(AB = AC = 2 \cdot BC)$ se construiește bisectoarea BD și fie M

mijlocul ei. Să se arate că: a). triunghiul CMD este isoscel; b). există relația: $9 \cdot BD^2 = 10 \cdot BC^2$.

(G.M., E: 4970, *I. Safta*).

Soluție. a). Fie I proiecția lui C pe BD. Dreapta ce trece prin I și C intersectează latura AB în E și avem $AE = EB = BC$; $EI = IC$.

Fie F proiecția lui A pe dreapta CI și din egalitatea triunghiurilor AEF și BIE rezultă $EI = EF$ și $AF = BI$, iar din asemănarea triunghiurilor CID și ACF se obține $\frac{ID}{AF} = \frac{CI}{CF}$ adică $\frac{ID}{IB} = \frac{1}{3}$ și deci $BI = 3 \cdot ID$; $BD = 4 \cdot ID$; $MD = 2 \cdot ID$; $MI = ID$. Așadar, triunghiul CMD este isoscel.

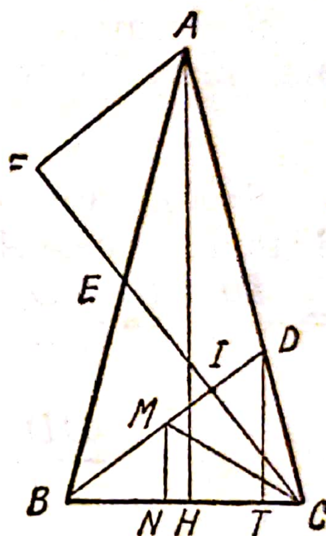


Fig. 2.17

b). Fie MN, AH și DT perpendiculare pe BC. Din $\frac{CD}{DA} = \frac{BC}{AB}$ și $\frac{CT}{CH} = \frac{CD}{CA}$ rezultă că $CH = 3 \cdot CT$ și deci $BC = 6 \cdot CT$, $BT = 5 \cdot CT$; $BN = \frac{BT}{2} = \frac{5 \cdot CT}{2} = \frac{5}{12}\ BC$.

Să observăm că (1) $BD \cdot IC = BC \cdot 2MN$, iar din asemănarea triunghiurilor BMN și BIC rezultă $\frac{MN}{IC} = \frac{BN}{BI}$ și deci

$$\frac{MN}{IC} = \frac{\frac{5 \cdot BC}{12}}{\frac{3}{4} BD}$$ sau (2), $5IC \cdot BC = 9 \cdot MN \cdot BD$.

Împărțind relațiile (1) și (2) membru cu membru obținem

$$\frac{BD}{5BC} = \frac{2BC}{9BD} \text{ și deci } 9 \cdot BD^2 = 10 \cdot BC^2.$$

2.18. În triunghiul oarecare ABC, cu latura AB de 7 ori mai mare decît latura BC, se construiește mediana BD și bisectoarea BE.

Să se arate că aria triunghiului BDE este de 3 ori mai mare decît aria triunghiului BCE.

(G.M.B., E: 4447, *I. Safta*).

Soluție. Fie $AA_1 \perp BC$; $DD_1 \perp BC$; $EE_1 \perp BC$, de unde rezultă $AA_1 \| DD_1 \| EE_1$. $\triangle DD_1C \sim \triangle AA_1C \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{DD_1}{AA_1} = \frac{CD}{CA}$, unde $CA = 2 \cdot CD$ și deci

$$\frac{DD_1}{AA_1} = \frac{1}{2} \text{ sau } DD_1 = \frac{1}{2} AA_1. \qquad (1)$$

$$\triangle EE_1C \sim \triangle AA_1C \Rightarrow \frac{EE_1}{AA_1} = \frac{CE}{CA}. \qquad (2)$$

Deoarece BE este bisectoare în triunghiul ABC, rezultă:

$$\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB} \text{ unde } AB = 7BC \text{ și deci}$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{CE}{CE + EA} = \frac{1}{1+7} \text{ sau } \frac{CE}{CA} = \frac{1}{8}.$$

Înlocuind pe $\frac{CE}{CA}$ în (2) obținem:

$$\frac{EE_1}{AA_1} = \frac{1}{8} \text{ sau } EE_1 = \frac{1}{8} AA_1. \qquad (3)$$

Așadar,

$$DD_1 = \frac{1}{2} AA_1 = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot AA_1 = 4 \cdot EE_1.$$

$$\text{Aria } S_{BCD} = \frac{BC \cdot DD_1}{2} = \frac{BC \cdot (4 \cdot EE_1)}{2} = 4 \cdot$$

$$\cdot \frac{BC \cdot EE_1}{2} = 4 \cdot S_{BCE}.$$

Dar $S_{BDC} = S_{BDE} + S_{BCE}$ și obținem egalitatea
$S_{BDE} + S_{BCE} = 4 \cdot S_{BCE}$ de unde
$S_{BDE} = 4 \cdot S_{BCE} - S_{BCE} = 3 \cdot S_{BCE}.$

(Se constată din compararea segmentelor EE_1 și DD_1 că bisectoarea BE este mai apropiată de BC decît mediana BD).

2.19. Un trapez $ABCD$ cu diagonalele AC și BD perpendiculare, are distanța dintre baze egală cu d. Să se arate că:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2}.$$

(G.M., E: 5162).

Soluție. Distanța dintre bazele trapezului $ABCD$ se determină în funcție de diagonale și baze, astfel: aria $ABCD = \frac{(AB + DC) \cdot d}{2}$; aria $ABCD =$
$= \text{aria } ABD + \text{aria } BCD = \frac{BD \cdot AO}{2} = \frac{BD \cdot OC}{2} =$
$= \frac{BD(AO + OC)}{2} = \frac{BD \cdot AC}{2}.$

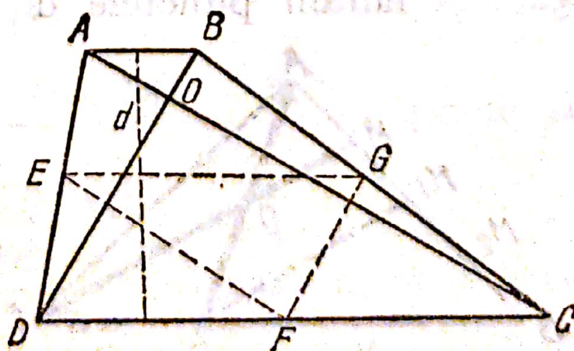


Fig. 2.19

Din egalitatea $\frac{(AB + DC) \cdot d}{2} = \frac{BD \cdot AC}{2}$ rezultă

$$d = \frac{BD \cdot AC}{AB + DC}.$$

Avem $\frac{1}{\frac{BD^2 \cdot AC^2}{(AB + DC)^2}} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2}$ sau $(AB + DC)^2 = AC^2 + BD^2$ unde $AB + DC$ este dublul liniei mijlocii. Fie EG linia mijlocie a trapezului și F mijlocul lui DC. Se observă că EF este linie mijlocie în triunghiul ADC și FG este linie mijlocie în triunghiul BCD. Din $EF \parallel AC$; $FG \parallel BD$ și $AC \perp BD$ rezultă $EF \perp FG$ și deci triunghiul EFG este dreptunghic în F.

Din relațiile $EG^2 = EF^2 + FG^2$; $EG = \frac{AB + DC}{2}$; $EF = \frac{AC}{2}$ și $FG = \frac{BD}{2}$ rezultă: $\frac{(AB + DC)^2}{4} = \frac{AC^2}{4} + \frac{BD^2}{4}$ sau $(AB + DC)^2 = AC^2 + BD^2$.

2.20. Se dă un triunghi ABC. Pe latura AB se alege punctul M astfel încît $AB = 4AM$, iar pe latura BC se alege punctul N astfel încît $BC = 3NC$. Să se arate că dreapta MC trece prin mijlocul dreptei AN.

(G.M.B., E: 1924, *V. Băghină*).

Soluție. Întrucît $AN = \frac{AB}{4}$; împărțim pe AB în 4 părți egale și notăm punctele de diviziune cu

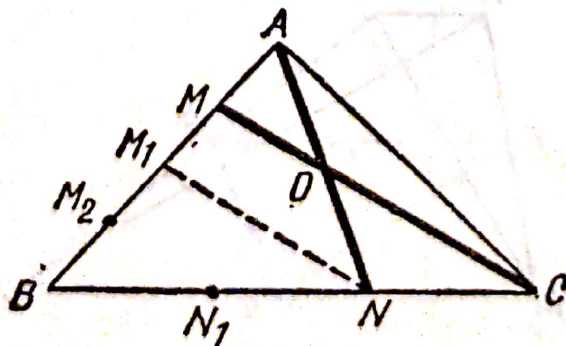


Fig. 2.20

M, M_1, M_2, iar latura BC o împărțim în 3 părți egale și notăm punctele cu N și N_1. Rezultă, conform reciprocei *teoremei lui Tales*, că M_1N este paralelă cu MC.

În triunghiul AM_1N dreapta MC este paralelă cu M_1N și trece prin mijlocul lui AM_1. Deci, dreapta MC trece prin mijlocul lui AN.

2.21. În triunghiul oarecare ABC, $AB < AC$. Bisectoarea interioară a unghiului A intersectează latura BC în punctul D și paralela prin C la AB în punctul E, iar mediana corespunzătoare laturii BC intersectează aceeași paralelă în punctul N. Să se arate că există relația: $EN \cdot BD = CN(DC - BD)$.

(G.M., E: 4527, *Gh. Bostan*).

Soluție. Fie M mijlocul laturii BC. Avem $BM = MC$. $\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMN$ opuse la vîrf; $\sphericalangle ABM = \sphericalangle NCM$ (alterne interne). Deci triunghiurile ABM și CMN sînt egale și deci $AB = CN$ (1). Mai avem:
$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = \frac{\sphericalangle BAC}{2}; \quad \sphericalangle BAD = \sphericalangle CED.$$
De unde, $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CED$ și deci triunghiul ACE este isoscel cu $AC = CE$ (2). Avînd în vedere egalitățile (1) și (2) deducem că
$$EN = AC - AB. \qquad (3)$$

Din $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CED$ și $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDE$ rezultă că triunghiurile ADB și CDE sînt asemenea și deci

$\frac{CE}{AB} = \frac{DC}{BD} = \frac{DE}{AD}$ sau avînd în vedere relația (1)

$\frac{CE}{CN} = \frac{DC}{BD}$; unde aplicăm proprietățile proporțiilor

$\frac{CE - CN}{CN} = \frac{DC - BD}{BD}$ și ținem seama de relația (3), (1) și (2)

$\frac{EN}{CN} = \frac{DC - BD}{BD}$ care se mai scrie $EB \cdot BD = CN(DC - BD)$.

2.22. Pe laturile Ox și Oy ale unghiului xOy luăm $OR = OV$; unim R cu V din O ducem perpendiculara pe VR notînd cu S piciorul acestei perpendiculare. Din V ducem perpendiculara pe OR notînd cu P piciorul acestei perpendiculare care intersectează OS în Z. Pe OV luăm un punct M din care ducem paralela la VP pînă în F de pe OR intersectînd OS în N. Să se demonstreze relația $FN \cdot OV = VZ \cdot OF$.

(G.M.B., E: 3944, *D. Mîrzan*).

Soluție. Prelungim VO cu $OA = OV$. Din A ducem paralela la FM pînă în E de pe prelungirea RO.

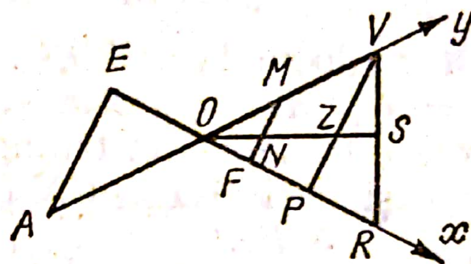


Fig. 2.22

$$\triangle AOE \sim \triangle OFM; \frac{AO}{OM} = \frac{OE}{OF} = \frac{AE}{FM}, \qquad (1)$$

$$\triangle OSV \sim \triangle PVR; \frac{OV}{RV} = \frac{SV}{PR} = \frac{OS}{PV}, \qquad (2)$$

$$\triangle OFN \sim \triangle PVR; \frac{ON}{RV} = \frac{FN}{PR} = \frac{OF}{PV}, \qquad (3)$$

$$\triangle OFN \sim \triangle SVZ; \frac{ON}{VZ} = \frac{FN}{SZ} = \frac{OF}{SV}, \qquad (4)$$

$$\triangle ONM \sim \triangle OZV; \frac{OM}{OV} = \frac{ON}{OZ} = \frac{MN}{VZ}. \qquad (5)$$

Din șirul 1 de rapoarte $AO \cdot OF = OM \cdot OE$.

Din șirul 4 de rapoarte $VZ \cdot OF = ON \cdot SV$ rezultă $AO \cdot ON \cdot SV = VZ \cdot OM \cdot OE$.

Din șirul 5 de rapoarte $OV \cdot MN = VZ \cdot OM$ rezultă $AO \cdot ON \cdot SN = OV \cdot MN \cdot OE$.

Din șirul 2 de rapoarte $RV \cdot SV = OV \cdot PR$ rezultă $AO \cdot ON \cdot PR = RV \cdot MN \cdot OE$.

Din șirul 3 de rapoarte $ON \cdot PR = RV \cdot FN$ rezultă $AO \cdot FN = MN \cdot OE$.

Din șirul 1 de rapoarte $AO \cdot OF = OM \cdot OE$ rezultă $FN \cdot OM = OF \cdot MN$.

Din șirul 5 de rapoarte $VZ \cdot OM = OV \cdot MN$ rezultă $FN \cdot OV = VZ \cdot OF$.

2.23. În triunghiul ABC dreptunghic în A se duce înălțimea AA', apoi din A' se duc paralele la AC și la AB pînă în E pe AB și D pe AC; iar din D și E se duc perpendicularele DD' și EE' pe BC. Știind că $DD' = 6$ cm, $A'D' = 4$ cm și $D'C' = 9$ cm, să se calculeze aria triunghiului $AE'D'$.

(G.M., E: 3319, *D. Mîrzan*).

Soluție. $AEA'D$ este dreptunghi în care AA' este diagonala. Triunghiurile AEA' și $AA'D$ fiind egale atunci și înălțimile DM și DN sînt egale, deci și $A'D' = A'E'$.

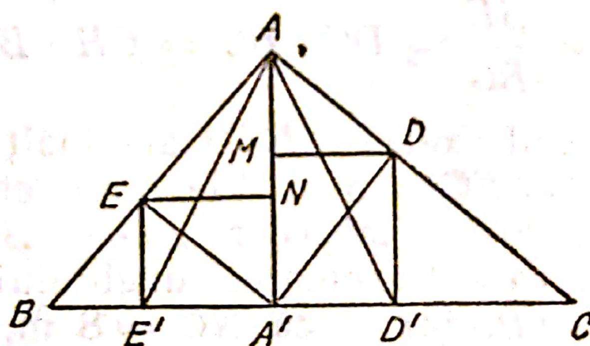


Fig. 2.23

Din asemănarea triunghiurilor $AA'C$ și $DD'C$ calculăm înălțimea AA' și apoi aria triunghiului $AE'D'$.

Aria triunghiului $AE'D' = 34\frac{2}{3}$ cm².

2.24. Se consideră un romb $ABCD$ (AC și BD diagonale). Se ia un punct F pe latura BC. Dreapta DF întîlnește dreapta AB în punctul E. Fie H mijlocul segmentului DF și G mijlocul segmentului EF. Să se arate că:

1). AD este media proporțională a lui AE și CF;
2). Triunghiurile BEF și FDC sînt asemenea;
3). $DC \cdot BG = BE \cdot CH$.

Soluție. 1). Avem $DH = HF$ și $FG = GE$. Triunghiurile ADE și DCF au cîte două unghiuri egale: $\sphericalangle CDF = \sphericalangle AED$ ca alterne interne și $\sphericalangle DCF = \sphericalangle DAE$ fiind unghiuri opuse în romb, deci triunghiurile ADE și DCF sînt asemenea. Proporționalitatea laturilor este:

$$\frac{AD}{FC} = \frac{DE}{DF} = \frac{AE}{DC}, \text{ dar } AD = DC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD^2 = FC \cdot AE. \qquad (1)$$

2). Triunghiurile BEF și FDC au unghiurile egale $\sphericalangle DFC = \sphericalangle BFE$ ca opuse la vîrf, $\sphericalangle EBF = \sphericalangle FCD$ ca alterne interne, de asemenea $\sphericalangle CDF = \sphericalangle BEF$, deci triunghiurile BEF și FDC sînt asemenea.

3). BG și CH fiind mediane în triunghiurile asemenea și plecînd din vîrfurile cu unghiuri egale, ele sînt proporționale cu laturile, adică,

$$\frac{DC}{CH} = \frac{BE}{BG} \Rightarrow DC \cdot BG = CH \cdot BE.$$

2.25. Trapezul isoscel $ABCD$ are înălțimea $DF = 3$ m și $AD = EC = 5$ m. Fie E punctul de intersecție al prelungirilor laturilor AD și BC, iar N și Q punctele în care bisectoarea unghiului AEB taie DC, respectiv AB. Știind că $NC = 8$ m, să se afle: a). aria trapezului $DFBC$; b). lungimea segmentului BE; c). aria triunghiului ABE; d). raportul dintre ariile triunghiurilor AFD și CNE.

Soluție a). Trapezul $ABCD$ fiind isoscel, unghiurile DAB și CBA sînt egale. DC este paralel cu AB, deci unghiul EDC este egal cu DAB (corespondente) și unghiul ECD este egal cu CBA fiind egale, rezultă că și unghiurile EDC și ECD sînt egale. Deci triunghiul EDC este isoscel. Așadar, bisectoarea unghiului AEB este și mediană, deci punctul N se găsește la mijlocul laturii DC. Deci $NC = ND = 8$ m, iar $DC = NC + ND = 8 \text{ m} + 8 \text{ m} = 16$ m.

Ducînd DF și CM perpendiculare pe AB, segmentul FM de pe AB va fi egal cu DC, adică va avea 16 m. În triunghiul dreptunghic CMB aplicăm *teorema lui Pitagora*, știind că $CM = DF = 3$ m și $BC = AD = 5$ m:

$$MB = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} =$$
$$= \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ m}.$$

Deci, $FB = FM + MB = 16 \text{ m} + 4 \text{ m} = 20$ m.

Aria trapezului $DFBC = \dfrac{(DC + FB)\ DF}{2} =$

$$= \frac{(16 + 20)\ 3}{2} = \frac{36 \cdot 3}{2} = 18 \cdot 3 = 54 \text{ m}.$$

b). După cum am demonstrat mai înainte, triunghiul DEC este isoscel, deci bisectoarea unghiului AEB este și mediană și înălțime și mediatoare. Așadar, EN este perpendiculară pe DC și EQ perpendiculară pe AB. De aici rezultă că NC este paralelă cu QB, deci triunghiurile ENC și EQB sînt asemenea. Scriem proporționalitatea laturilor:

$$\frac{NC}{QB} = \frac{EC}{EB} = \frac{EN}{EQ}.$$

Din primele două rapoarte scrise reiese că: $BE \cdot NC = QB \cdot EC$ (produsul mezilor egal cu cel al extremilor).

Notînd EC cu x avem: $NC(x + BC) = QB \cdot x$.

Dar $NC = 8$ m, iar $QB = QM + MC = CN + MC = 8 + 4 = 12$ m iar $BC = 5x$. Deci, înlocuind avem: $8(x + 5) = 12x$; $8x + 40 = 12x$; $4x = 40$; $x = 10$. Deci $EC = 10$ m.

$$BE = BC + CE = 5 \text{ m} + 10 \text{ m} = 15 \text{ m}.$$

c). În triunghiul dreptunghic ENC aplicăm *teorema lui Pitagora*:

$$EN = \sqrt{EC^2 - NC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} =$$
$$= \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6 \text{ m}$$

deci $EN = 6$ m.

$EQ = EN + NQ = 6$ m $+ NQ$. Dar $NQ = DF =$ $= 3$ m; $EQ = 6 + 3 = 9$ m.
$AB = AF + FM + MB$. Trapezul fiind isoscel, $AF =$ $= MB$.
$AB = 2AF + FM = 2AF + DC$(FM este egal cu DC).

Înlocuind cu valorile aflate la punctele anterioare, avem:

$$AB = 2 \cdot 4 + 16 = 18 + 16 = 24 \text{ m.}$$

Aria triunghiului $ABE = \frac{EQ \cdot AB}{2} = \frac{9 \cdot 24}{2} =$ $= 9 \cdot 12 = 108$ m.

d). Aria triunghiului $AFD = \frac{AF \cdot FD}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} =$ $= 2 \cdot 3 = 6$ m.

Aria triunghiului $ENC = \frac{EN \cdot NC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} =$ $= 3 \cdot 8 = 24$ m.

Raportul cerut este $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

2.26. Se dă un trapez $ABCD$ cu laturile paralele BC și AD. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor. Să se stabilească relațiile:

$$\frac{OA \cdot OC}{AC^2} = \frac{OB \cdot OD}{BD^2} \text{ și } \frac{OA \cdot OD}{AD^2} = \frac{OB \cdot OC}{BC^2}.$$

Soluție. În triunghiurile AOD și BOC, avem:

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OD}{BD} \text{ și } \frac{OC}{AC} = \frac{OB}{BD}. \qquad (1)$$

$$\frac{OA}{AD} = \frac{OB}{BC} \text{ și } \frac{OD}{AD} = \frac{OC}{BC}. \qquad (2)$$

Înmulțind membru cu membru relațiile (1), apoi relațiile (2) obținem relațiile cerute.

2.27. Într-un patrulater $ABCD$ o dreaptă variabilă ce trece prin punctul comun al diagonalelor AC şi BD taie laturile AB şi CD în punctele M şi N. Să se arate că $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} =$ constant.

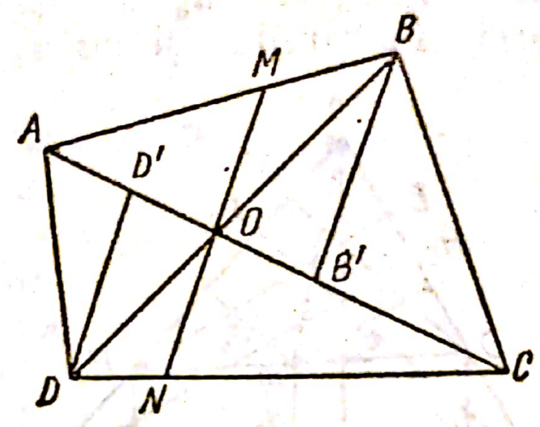


Fig. 2.27

Soluție. Ducem $BB' \parallel MN$, $DD' \parallel MN$, (B' şi D' sînt situate pe AC).
Avem:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AO}{OB'} \quad \text{şi} \quad \frac{ND}{NC} = \frac{OD'}{OC}$$

deci

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{AO}{OB'} \cdot \frac{OD'}{OC}.$$

Dar din asemănarea triunghiurilor $BB'O$ şi $DD'O$ reiese că:

$$\frac{OD'}{OB'} = \frac{OD}{OB}.$$

Deci

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{AO}{OC} = \frac{OD}{OB} = \text{constant}.$$

2.28. Se consideră un punct M mobil în interiorul şi pe laturile triunghiului ABC. Să se determine

pozițiile punctului M pentru care suma distanțelor sale la laturile triunghiului este maximă, respectiv minimă.

(G.M.B., 9539, *I. Tomescu*).

Soluție. Distanțele punctului M la laturile BC, AC, AB le notăm respectiv: d_a, d_b, d_c. Notăm cu H_a, H_b, H_c picioarele înălțimilor și cu $h_a = AH_a$, $h_b =$

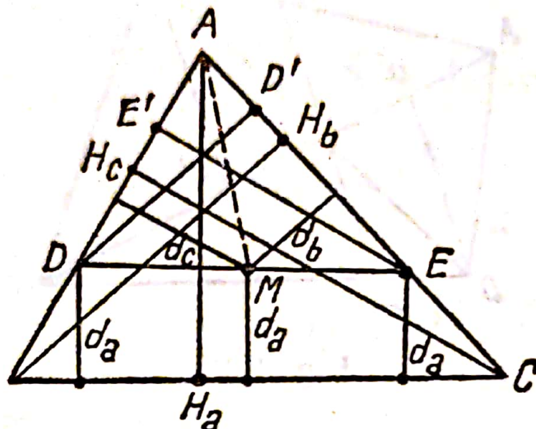


Fig. 2.28

$= BH_b$, $h_c = CH_c$. Presupunem că laturile triunghiului ABC se află în următoarea ordine: $a > b > c$.

Paralela dusă prin M la BC taie laturile AB, AC respectiv în D și E. Notăm cu D', E' respectiv proiecțiile punctelor D și E pe laturile AC, AB. Deoarece $ah_a = bh_b = ch_c$ și $a > b > c$, rezultă că $h_a < h_b < h_c$. Punctele de pe dreapta DE au aceeași distanță la latura BC, egală cu d_a. Să găsim punctele segmentului DE pentru care $d_b + d_c$ este maximă respectiv minimă. Avem respectiv: $d_b \cdot AE + d_c AD = 2S_{AME} + 2S_{AMD} = 2S_{ADF} =$ constant. Dar $2S_{ADE} = EE' \cdot AD = DD' \cdot AE$. Conform teoremei lui Tales, $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} < 1$, deci $AD < AE$. Deci $EE' \cdot AD = d_b \cdot AE + d_c \cdot AD > d_b \cdot AD + d_c \cdot AD$, prin urmare $EE' > d_b + d_c$ și $DD' \cdot AE = d_b \cdot AE + d_c \cdot AD < d_b \cdot AE + d_c \cdot AE$ sau $DD' < d_b + d_c$.

Cele două relații obținute se mai scriu: $d_a + DD' < d_a + d_b + d_c < d_a + EE'$, deci oricare ar fi punctul M în interiorul triunghiului ABC, extremele sumei

$d_a + d_b + d_c$ trebuiesc căutate pe laturile triunghiului ABC. Aplicînd același raționament punctului E mobil pe latura AC, găsim că $h_a < d_a + EE' < h_c$ și punctului D mobil pe latura AB găsim că $h_a < d_a + DD' < h_b$, aceste inegalități avînd loc oricare ar fi punctele E pe AC, respectiv D pe AB. Deoarece am obținut că $d_a + DD' < d_a + d_b + d_c < d_a + EE'$, folosind inegalitățile obținute pentru $d_a + EE'$, respectiv $d_a + DD'$, obținem $h_a < d_a + d_b + d_c < h_c$. Cînd punctul M se găsește în vîrful A, respectiv în vîrful C, suma $d_a + d_b + d_c$ ia evident valorile h_a, respectiv h_c, deci dacă punctul M este mobil în interiorul și pe laturile triunghiului ABC, $h_a \leqslant d_a + d_b + d_c \leqslant h_c$ extremele avînd loc în vîrfurile A respectiv C (deoarece am presupus că $a > b > c$), deci în general $h \leqslant d_a + d_b + d_c \leqslant H$ unde h și H sînt cea mai mică și cea mai mare dintre înălțimile triunghiului ABC; maximul are loc în vîrful triunghiului corespunzător (opus) laturii cele mai mici și minimul are loc în vîrful triunghiului opus laturii celei mai mari. În particular, triunghiul ABC poate fi echilateral și $H = h$, deci din inegalitatea $h \leqslant d_a + d_b + d_c \leqslant H$ deducem că oricare ar fi punctul M mobil în interiorul și pe laturile triunghiului echilateral ABC, $d_a + d_b + d_c =$ constant (înălțimea triunghiului echilateral), proprietate cunoscută.

2.29. Dacă produsul a două laturi opuse ale unui patrulater este egal cu produsul celorlalte două laturi, atunci bisectoarele interioare (exterioare) a două unghiuri se taie pe una din diagonale; iar bisectoarele celorlalte două unghiuri se taie pe cealaltă diagonală. Să se arate că și reciproca este adevărată.

Soluție. Fie AC și BD diagonalele unui patrulater oarecare $ABCD$. Dacă $AB \cdot CD = AD \cdot BC$, rezultă $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$. Dacă BO este bisectoarea interioară a unghiului B, atunci triunghiul ABC ne dă $\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{CO}$; dacă DO' este bisectoarea unghiului D în

triunghiul ADC, atunci $\frac{AD}{CD} = \frac{AO'}{CO'}$. Din ultimele două proporții rezultă $\frac{AO}{CO} = \frac{AO'}{CO'}$ deci O se confundă cu O'.

Tot din ipoteză rezultă $\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AB}$ ceea ce ne conduce la concurența bisectoarelor din A și C, cu diagonala BD.

Reciproca. Dacă bisectoarele unghiurilor B și D se întîlnesc în O pe AC, rezultă $\frac{BC}{BA} = \frac{CO}{OA}$ și $\frac{CD}{DA} = \frac{CO}{OA}$, deci $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

2.30. Fie un unghi xAy și Az o semidreaptă interioară unghiului. Prin I, un punct de pe Az, se duce o dreaptă mobilă care se intersectează cu laturile Ax și Ay în punctele M și N iar o dreaptă perpendiculară pe Az care se intersectează cu laturile unghiului în B și C. Tot prin I se duc dreptele $IP \parallel AB$, $(P \in AC)$ și $IP' \parallel AC (P' \in AB)$. Să se arate că:

a). $\frac{IP}{AN} + \frac{IP'}{AN} = \text{const.}$

b). Dacă I este pe bisectoarea unghiului xAy, atunci $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{2}{AB}$.

Soluție. a). $\triangle(PIN) \sim \triangle(AMN)$ și $\triangle(P'IM) \sim \triangle(AMN)$ conform teoremei fundamentale a asemănării triunghiurilor. Din asemănarea acestor triunghiuri avem:

$$\frac{IP}{AM} = \frac{IN}{NM} \quad \text{și} \quad \frac{IP'}{AN} = \frac{IM}{MN}.$$

Prin adunare membru cu membru, avem:

$$\frac{IP}{AM} + \frac{IP'}{AN} = \frac{IN + IM}{MN} = \frac{MN}{MN} = 1.$$

b). Dacă I este pe bisectoarea unghiului xAy, atunci triunghiul ABC este isoscel, AI fiind și înălțime și bisectoare. Rezultă că AI este și mediană. IP fiind paralelă cu AB, rezultă că IP este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci

$$IP = \frac{AB}{2}; \text{ la fel avem și } IP' = \frac{AC}{2}.$$

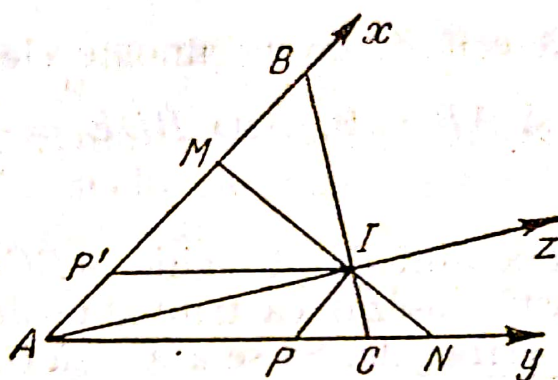


Fig. 2.30

Dar cum $AB = CA$, rezultă că

$$IP = IP' = \frac{AB}{2}.$$

Înlocuim pe IP și IP' și obținem:

$$\frac{IP}{AM} + \frac{IP'}{AN} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{AB}{AM} + \frac{AB}{AN} = 2,$$

de unde

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{2}{AB}.$$

2.31. În triunghiul ABC, laturile AC și BC sînt egale. Punctele D și E sînt pe AC și $AD = DE = EC$. Sînt date $BD = 8{,}5$ m și $BE = 10$ m. Să se calculeze aria triunghiului BDE.

Soluție. Fie D', E', C' proiecțiile punctelor D, E, $C \in AB$. Aria $BDE = \frac{1}{3}$ aria ABC, deoarece cele

3 triunghiuri în care este împărțit triunghiul ABC, au bazele egale și aceeași înălțime. Să calculăm pe AB și pe CC':

$$DD'^2 + D'B^2 = BD^2 \quad \text{adică} \quad \frac{CC'^2}{9} + \frac{25}{36}AB^2 = 8{,}5^2.$$

$$EE'^2 + BE'^2 = BE^2 \text{ sau: } \frac{4CC'^2}{9} + \frac{16}{36}AB^2 = 10^2.$$

Aceste două ecuații cu necunoscutele CC' și AB dau $CC' = 12$ și $AB = 9$. Aria $BDE = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 9}{2} =$ $= 18$ m².

2.32. În triunghiul dreptunghic $ABC(C = 90°)$ se ia punctul O astfel așezat ca triunghiurile OAB, OBC și OCA să aibă arii egale. Să se arate că $OA^2 + OB^2 = 5OC^2$.

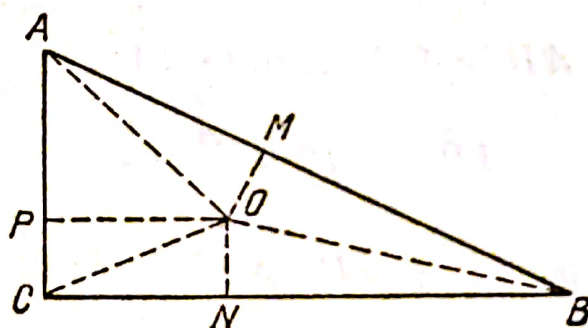


Fig. 2.32

Soluție. Fie OM, ON și OP înălțimile triunghiurilor OAB, OBC și OCA. Aria (OAB) + aria (OBC) + aria (OCA) = aria (ABC) sau

$$AB \cdot OM + BC \cdot ON + CA \cdot OP = BC \cdot AC.$$

Putem scrie $3BC \cdot ON = BC \cdot AC$; $ON = \frac{1}{3}AC$ sau $3CA \cdot OP = BC \cdot AC$; $OP = \frac{1}{3}BC$. Din triunghiurile dreptunghice AOP și BON avem: $OA^2 = AP^2 + PO^2$ și $OB^2 = BN^2 + NO^2$.

Deci $OA^2 + OB^2 = AP^2 + BN^2 + PO^2 + NO^2 = \frac{5}{9}(AC^2 + BC^2)$.

Avem din dreptunghiul $NOPC$ relația $OC^2 = PO^2 + NO^2 = \frac{1}{9}(AC^2 + BC^2)$.

Deci relația $OA^2 + OB^2 = 5OC^2$ este demonstrată.

2.33. a) Un trapez $ABCD$ are laturile paralele AB și CD, iar diagonalele AC și BD se întîlnesc în I.

Știind că $AB = AD = 30$ cm și $BC = 26$ cm, iar înălțimea trapezului este 24 cm, să se calculeze baza CD, arătîndu-se și cîte cazuri sînt posibile, desenîndu-se trapezul în fiecare caz.

(G.M., 14309, *C. Ionescu-Țiu*).

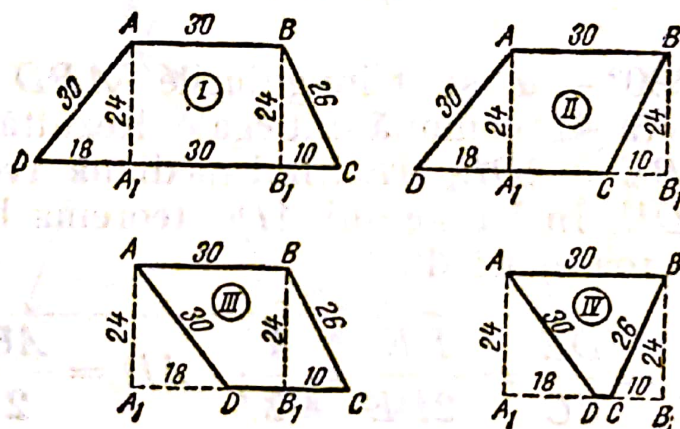


Fig. 2.33

Soluție. a). Deosebim 4 cazuri după cum urmează:

Ducem o paralelă la AB la distanța 24 cm pe care ducem apoi perpendicularele $AA_1 = BB_1 = 24$ cm.

$$A_1D = \sqrt{30^2 - 24^2} = 6\sqrt{5^2 - 4^2} = 18;$$

$$CB_1 = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{(26 + 24)(26 - 24)} = \sqrt{50 \cdot 2} = \sqrt{100} = 10.$$

Cazul I. $DC = 18 + 30 + 10 = 58$ cm;

Cazul II. $DC = 18 + 30 - 10 = 38$ cm;

Cazul III. $DC = 30 - 18 + 10 = 22$ cm;

Cazul IV. $DC = 30 - 18 - 10 = 2$ cm.

2.34. În triunghiul ABC fie AD înălțimea și AE mediana din A. Se dă $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAC$. Să se calculeze unghiurile triunghiului.

Soluție. Notăm cu α valoarea comună a unghiurilor $\alpha = \sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAC$; AD fiind perpendicular pe BC rezultă că $\sphericalangle ABD = 90 - \alpha$; iar

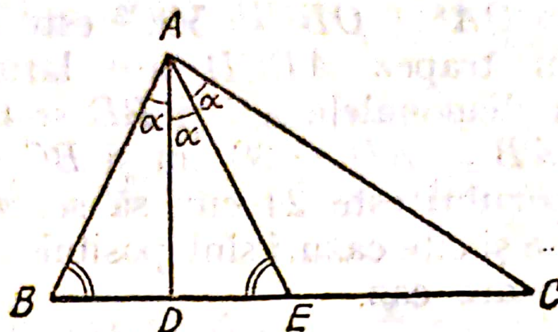


Fig. 2.34

$\sphericalangle AED = 90° - \alpha$ și triunghiurile ABD și ADE avînd și cateta AD comună sînt egale. Rezultă că $BD = DE$ iar $BE = 2DE$, AE fiind mediană avem $BE = EC = 2DE$. În triunghiul ADC teorema bisectoarei (AE = bisectoare) ne dă:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{EC} = \frac{DE}{2DE} = \frac{1}{2}; \quad AD = \frac{AC}{2}.$$

Triunghiul ADC fiind dreptunghic rezultă că $\sphericalangle ACB = 30°$. Unghiul AEB este exterior triunghiului AEC; deci $\sphericalangle AEB = \alpha + 30°$ sau $90° - \alpha = 30° + \alpha$ de unde rezultă $\alpha = 30°$; $\sphericalangle BAC = 3\alpha = 3 \cdot 30° = 90°$ iar unghiul $ABC = 180° - 90° - 30° = 60°$. Unghiurile triunghiului sînt: $A = 90°$; $B = 60°$; $C = 30°$.

2.35. Fie A_1B_1 și A_2B_2 două segmente paralele, B intersecția dreptelor A_1B_2 și A_2B_1, iar A intersecția paralelei dusă prin B la A_1B_1 cu A_1A_2. Analog $C = AB_1 \cap A_1B_1$, $D = AB_2 \cap BA_2$, C_1 și D_1 fiind intersecțiile dreptei A_1A_2 cu paralele la A_1B_1 duse respectiv prin C și D, iar $I = CD_1 \cap C_1D$. Să se arate că $AB = 3AI$.

(R.M.T., 1502, 1939, C. *Ionescu-Țiu*).

Soluție. Vom arăta mai întîi, că CD_1 și C_1D se taie pe AB. Observăm că:

$$\frac{AC_1}{CC_1} = \frac{AA_1}{A_1B_1}; \quad \frac{AD_1}{DD_1} = \frac{AA_2}{A_2B_2};$$

dar

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1B}{BA_2} = \frac{AA_1}{AA_2} \Rightarrow \frac{AA_1}{A_1B_1} = \frac{AA_2}{A_2B_2}$$

deci

$$\frac{AC_1}{CC_1} = \frac{AD_1}{DD_1} \text{ sau } \frac{AC_1}{AD_1} = \frac{CC_1}{DD_1} = \frac{CI}{ID},$$

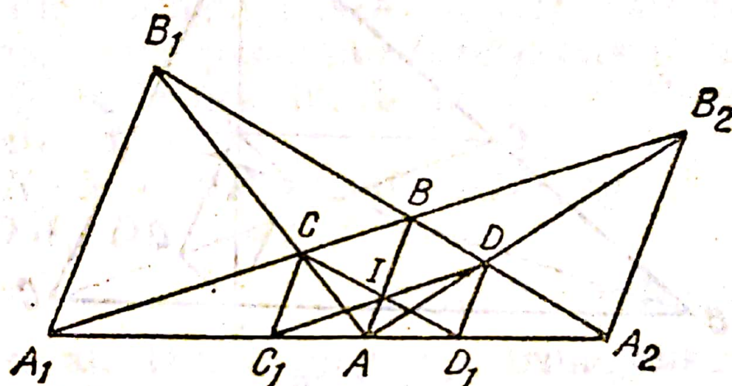


Fig. 2.35

deci AI este paralelă cu DD_1, adică suprapusă pe AB. Se mai observă că:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{A_2A}{A_2A_1}; \quad \frac{AB}{A_2B_2} = \frac{A_1A}{A_2A_1} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} + \frac{AB}{A_2B_2} = 1$$

sau

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{A_1B_1} + \frac{1}{A_2B_2},$$

analog

$$\frac{1}{CC_1} = \frac{1}{A_1B_1} + \frac{1}{AB}; \quad \frac{1}{DD_1} = \frac{1}{A_2B_2} + \frac{1}{AB};$$

deci

$$\frac{1}{IA}=\frac{1}{CC_1}+\frac{1}{DD_1}=\frac{2}{AB}+\frac{1}{A_1B_1}+\frac{1}{A_2B_2}=\frac{3}{AB};$$

adică $AB=3AI$.

2.36. În triunghiul ABC se consideră o paralelă la BC care intersectează laturile AB și AC în D și E iar înălțimea AA' în F. Paralelele duse prin F la AB și AC intersectează respectiv pe BE și CD în punctele P și Q. Să se arate că figura $EPA'Q$ este un paralelogram.

(G.M., E: 4420, *Th. Cocea*).

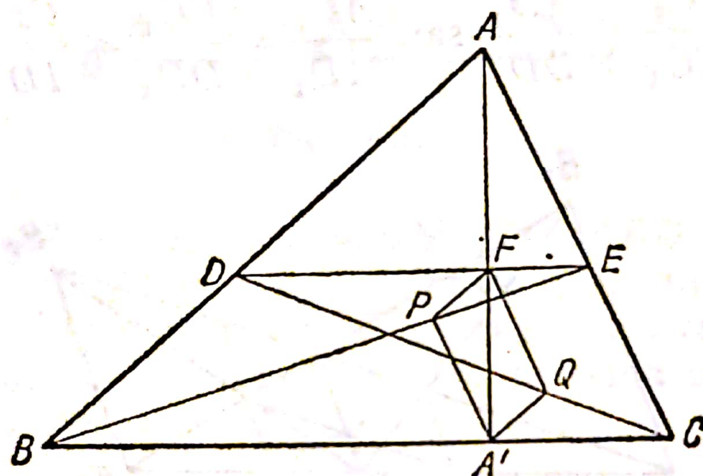


Fig. 2.36

Soluție. Triunghiurile EFP și FDP sînt asemenea și deci

$$\frac{EP}{PB}=\frac{EF}{FD}. \tag{1}$$

Dreptele paralele DE și BC determină pe secantele AB și AC segmente proporționale:

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}. \tag{2}$$

Dar $\triangle AFE \sim \triangle AA'C$ și $\triangle ADF \sim \triangle ABA'$, de unde rezultă:

$$\frac{AE}{EC}=\frac{FE}{A'C} \quad \text{și} \quad \frac{AD}{AB}=\frac{DF}{BA'}$$

sau ținînd seama de (2) avem:

$$\frac{FE}{A'C} = \frac{DF}{BA'} \text{ sau } \frac{FE}{DF} = \frac{A'C}{BA'}$$

și ținînd seama de (1) avem:

$\frac{CA'}{A'B} = \frac{EP}{PB}$ de unde rezultă $A'P \parallel EC$ sau $AC \parallel QF$.

Analog se arată că $A'Q \parallel PF$ și deci figura $FPA'Q$ este un paralelogram avînd laturile opuse două cîte două paralele.

Dacă triunghiul ABC este dreptunghic $\sphericalangle A = 90°$ figura $EPA'Q$ este un dreptunghi.

2.37. Fie triunghiul ABC și AD înălțimea sa, fie M și N proiecțiile punctului D respectiv pe AC și AB, iar P și Q, proiecțiile lui M pe BC și N tot pe BC. Să se arate că:

a). $AN \cdot ND \cdot DP = AM \cdot MD \cdot DQ$.

b). $(DM : DN)^2 = PM : QN$.

(G.M., E: 4421, *V. Greavu*).

Soluție. a). Din asemănarea triunghiurilor AND, DNQ și BNQ avem:

$$\frac{DN}{NQ} = \frac{AN}{DQ} \Rightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{DQ}{QN}$$

sau

$$\frac{AN^2}{ND^2} = \frac{DQ^2}{QN^2} \Rightarrow \frac{AN^2}{ND^2 + AN^2} = \frac{DQ^2}{QN^2 + DQ^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AN^2}{AD^2} = \frac{DQ^2}{DN^2}$$

și asemănător relația:

$$\frac{AM^2}{AD^2} = \frac{DP^2}{DM^2}. \text{ Le împărțim } \Rightarrow \frac{AN^2}{AM^2} =$$

$$= \frac{DQ^2}{DN^2} \cdot \frac{DM^2}{DP^2}$$

sau

$$\frac{AN}{AM}=\frac{DQ}{DN}\cdot\frac{DM}{DP}\Rightarrow AN\cdot ND\cdot DP=AM\cdot MD\cdot DQ.$$

b). Am arătat că

$$\frac{AD^2}{DN^2}=\frac{DN^2}{QN^2} \text{ și } \frac{AD^2}{MD^2}=\frac{DM^2}{PM^2}.$$

Le împărțim și obținem:

$$\frac{MD^2}{ND^2}=\frac{DN^2}{QM^2}\cdot\frac{PM^2}{DM^2}\Rightarrow\frac{DM^4}{DN^4}=\frac{PM^2}{QN^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{DM}{DN}\right)^2=\frac{PM}{QN}.$$

2.38. Fie $ABCD$ un trapez oarecare (AD și BC respectiv baza mare și baza mică). Paralela dusă prin C la AB taie diagonala BD în M și paralela tot la AB, dusă prin D, taie prelungirea diagonalei AC în N. Să se arate că AB este media geometrică a segmentelor CM și DN.

(G.M.B., 7130, *Simon Petru*).

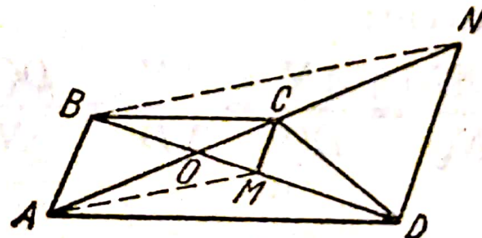


Fig. 2.38

Soluție. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor. Se știe că diagonalele unui trapez se taie într-un raport egal cu raportul bazelor lui, adică

$$\frac{OB}{OD}=\frac{OC}{OA}=\frac{BC}{AD}.$$

În trapezul $ABCM$ avem atunci

$$\frac{OC}{OA}=\frac{CM}{AB}.$$

În trapezul $ABND$ avem

$$\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DN}$$

dar $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD}$, deci $\frac{CM}{AB} = \frac{AB}{DN}$, adică $AB^2 = CM \cdot DN$.

2.39. În patrulaterele convexe $ABCD$ și $A'B'C'D'$ avem relațiile

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$$

și unghiurile $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$. Demonstrați că patrulaterele au unghiurile respectiv egale.

(Concurs elevi).

Soluție. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt asemenea avînd $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ și laturile AB și BC proporționale cu $A'B'$ și $B'C'$.

Rezultă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ și în acest caz triunghiurile ACD și $A'C'D'$ sînt asemenea avînd toate laturile proporționale.

În fine, patrulaterele fiind formate din două triunghiuri asemenea și la fel așezate, ele sînt asemenea.

Mai observăm că, deoarece $\sphericalangle DAC = \sphericalangle D'A'C'$ și $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, rezultă că și sumele lor sînt egale adică $\sphericalangle DAB = \sphericalangle D'A'B'$. Rezultă că $\sphericalangle ADC = \sphericalangle A'D'C'$ și apoi că $\sphericalangle BCD = \sphericalangle B'C'D'$.

Deci, patrulaterele au unghiurile respectiv egale și laturile corespunzătoare proporționale.

2.40. Fie ABC un triunghi oarecare și M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, AB. Dacă A', B' și C' sînt trei puncte pe laturile triunghiului, astfel ca A' să fie în BM, B' în AN și C' în AP, atunci în ipoteza $BC > CA > AB$, există relația: $AA' + BB' + CC' < AB + BC + CA$.

(G.M.B., 8626, *Șerban Bărcănescu*)

Soluție. Fie A'' și A''' punctele în care paralelele la AB, AC duse prin A, taie pe AC, respectiv AB.

Rezolvarea izvorăște din compararea sumei $A''A + A'''A$ cu suma $PA + NA$. Avem, în cazul de față $A'''A = PA + A'''P$ și $A''A = NA - NA''$, de unde

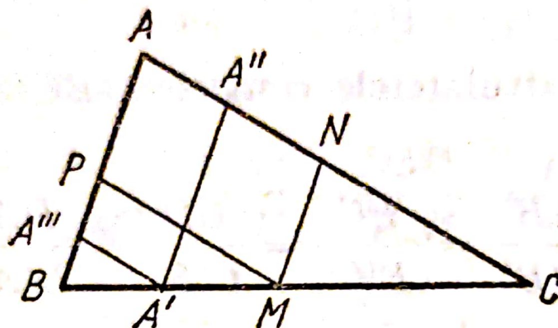


Fig. 2.40

$A''A + A'''A = NA + PA + (A'''P - NA'')$. Notăm $S = A''A + A'''A$ și $S_1 = NA + PA$. Deoarece $A'A'''$ este paralelă cu AC și PM la fel, avem:

$$\frac{A'''P}{A'M} = \frac{A'''B}{A'B} = \frac{BP}{BM} = \frac{\frac{AB}{2}}{\frac{BC}{2}} = \frac{AB}{BC};$$

apoi

$$\frac{A''N}{A'M} = \frac{NC}{MC} = \frac{\frac{AC}{2}}{\frac{BC}{2}} = \frac{AC}{NC}.$$

Făcînd raportul ultimelor relații, obținem:

$\frac{A'''P}{A''N} = \frac{AB}{AC}$; cum avem $S = S_1 + (A'''P - A''N)$, pentru $AB < AC \Rightarrow A'''P < A''N$ deci $S < S_1$.

Situația este analoagă pentru toate cele trei ceviene, întrucît alegerea punctelor B' și C' a fost făcută pentru a fi satisfăcute relații de tipul $S < S_1$.

Acum, în paralelogramul $AA'''A'A''$, avem:

$$AA' < AA''' + A'''A' = AA''' + AA'' < NA + PA = \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2}. \quad (1)$$

Analog, stabilim că:

$$BB' < \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} \quad (2)$$

și

$$CC' < \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2}. \quad (3)$$

Adunînd relațiile (1), (2) și (3) obținem relația din enunț.

2.41. Se dă un triunghi ABC și un punct M în interiorul său. Să se ducă două semidrepte cu originea în M, care împreună cu segmentul MA să împartă triunghiul în trei părți echivalente.

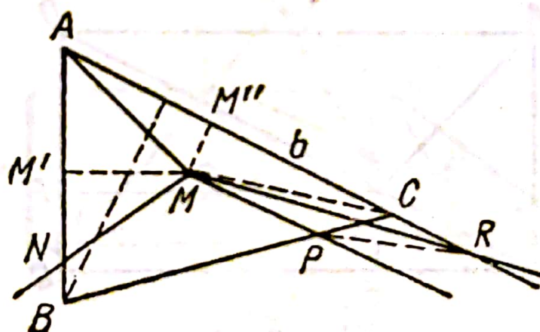


Fig. 2.41

Soluție. Fie M' și M'' proiecțiile punctului M, respectiv pe segmentele AB și AC, iar h_B și h_A, înălțimile din B și C. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că $MM' > \frac{1}{3} h_C$ și $MM'' > \frac{1}{3} h_B$. În acest caz, se vede ușor că o semidreaptă întîlnește latura AB într-un punct N, iar cealaltă semidreaptă trebuie să întîlnească latura BC într-un punct P. Va trebui să avem:

$$S_{AMN} = \frac{1}{3} S_{ABC} \text{ deci: } \frac{1}{2} AN \cdot MM' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} b \cdot h_B,$$

de unde:

$$\frac{AN}{b} = \frac{h_B}{3MM'}$$

şi se construieşte AN ca al patrulea proporţional.

Pentru a determina punctul P, construim ca mai sus, punctul R pe prelungirea de dincolo de C a laturii AC, astfel ca $S_{AMR} = \frac{1}{3} S_{ABC}$. Paralela prin R la MC întîlneşte pe BC în punctul P căutat, deoarece triunghiurile MCR şi MCP sînt echivalente.

2.42. Din vîrful A al dreptunghiului $ABCD$ se coboară perpendiculara AP pe diagonala $BD = d$, iar din P se coboară perpendiculara $PE = m$ şi $PF = n$ respectiv pe laturile BC şi CD. Să se arate că

$$m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}}.$$

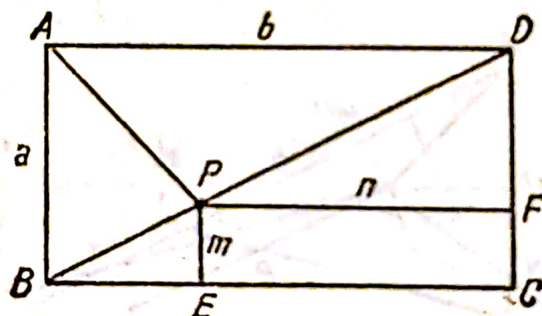


Fig. 2.42

Soluţie. Să notăm $AB = a$ şi $BC = b$. Triunghiurile BEP şi BCD fiind asemenea, avem:

$$\frac{m}{a} = \frac{BP}{d}. \qquad (1)$$

Mai putem scrie

$$a^2 = BP \cdot d. \qquad (2)$$

Eliminînd pe BP între ecuaţiile (1) şi (2), rezultă

$$a^3 = md^2$$

sau încă

$$a^2 = m^{\frac{2}{3}} d^{\frac{4}{3}}. \qquad (3)$$

Analog obținem

$$b^2 = n^{\frac{2}{3}} d^{\frac{4}{3}}. \qquad (4)$$

Adunăm relațiile (3) și (4) și ținem seama că $a^2 + b^2 = d^2$, obținem

$$d^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}}.$$

2.43. În planul unui unghi xOy se consideră două puncte fixe A și B și o dreaptă care se rotește în jurul punctului A, dreaptă care taie pe Ox în M și pe Oy în N. Paralela dusă prin N la AB taie pe MB în P. Să se afle locul lui P.

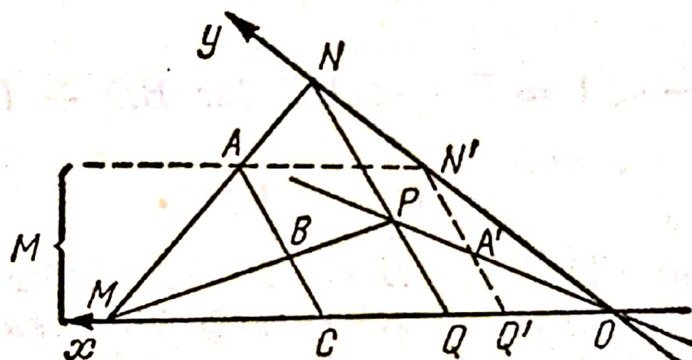


Fig. 2.43

Soluție. AB taie pe Oy în C, iar NP în Q. Știm că un fascicul de drepte determină pe două paralele segmente proporționale. Deci, pentru fasciculul de drepte MN, MP, MQ avem:

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{AB}{BC} = \text{constant},$$

căci punctele A, B, C sînt fixe.

Întrucît NQ se deplasează paralel cu ea însăși, punctul P care împarte segmentul într-un raport constant descrie dreapta PO.

2.44. Să se arate că în orice triunghi bisectoarea interioară se află între înălțimea și mediana duse din același vîrf.

Soluție. Fie AD, AH și AM respectiv bisectoarea, înălțimea și mediana duse din A. Dacă $AB = AC$

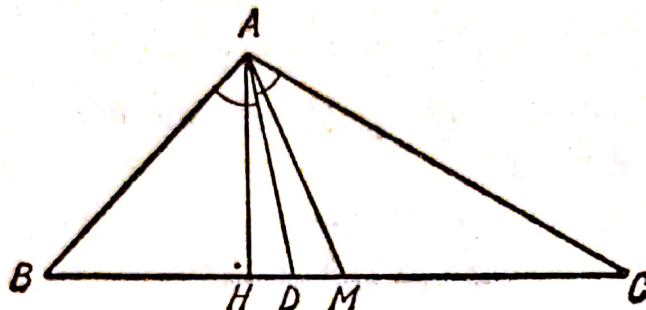


Fig. 2.44

atunci AD, AH și AM coincid. Presupunem $\sphericalangle B > \sphericalangle C$ adică $AC > AB$.

Teorema bisectoarei arată că:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} < 1 \Rightarrow DB < DC \text{ dar } BD + DC = BC;$$

$$\Rightarrow BD < BM$$

și deci D se află între B și M. Să arătăm că D se află între H și C. Dacă $\sphericalangle B \geqslant 90°$ este evident. Dacă $\sphericalangle B < 90°$ avem $\sphericalangle B > \sphericalangle C \Rightarrow \sphericalangle BAH < \sphericalangle HAC < \sphericalangle BAH < \frac{1}{2} \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD \Rightarrow BH < BD$, deci D se află între H și M.

2.45. Se dă triunghiul dreptunghic ABC. Perpendiculara în C pe ipotenuza BC taie pe AB în D; perpendiculara în D pe CD taie pe AC în E; perpendiculara în E pe DE taie pe AB în F iar perpendiculara în F pe EF taie pe AC în G. Perpendiculara în B pe BC taie pe AC în I; perpendiculara în I pe BI taie pe AB în J; perpendiculara în J pe IJ taie pe AC în K iar perpendiculara în K pe JK taie pe AB în L. Să se arate că:

a). Dreptele LC şi BG sînt paralele.
b). $BC^2 = KL \cdot FG$.
c). $AC^5 = AG \cdot AB^4$.

(R.M.F., 694, 1953, *C. Ionescu-Ţiu*).

Soluţie. a, b). Se observă uşor că

$$\frac{AC}{AG} = \frac{BC}{FG} = \frac{AB}{AF} = \frac{AI}{AE} = \frac{AJ}{AD} = \frac{AL}{AC} =$$
$$= \frac{LK}{BC} = \frac{AL}{AB}.$$

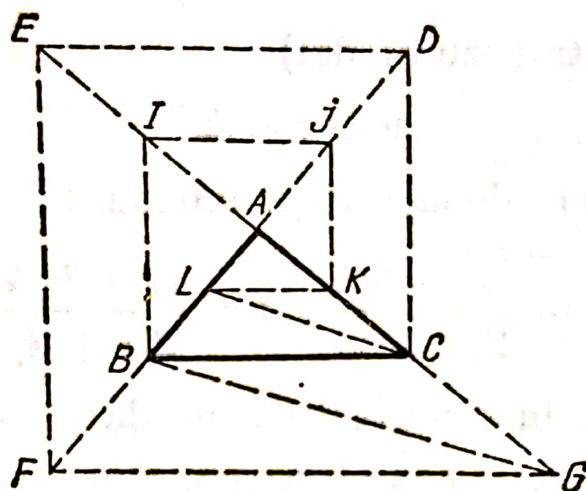


Fig. 2.45

Din acest şir de rapoarte egale reţinem proporţiile:

$$\frac{AC}{AG} = \frac{AL}{AB} \quad \text{şi} \quad \frac{BC}{FG} = \frac{LK}{BC}.$$

Din prima rezultă $CL \parallel BG$, iar din a doua $BC^2 = LK \cdot FG$.

c). În triunghiurile dreptunghice BCD, CDE, DEF, EFG, avem:

$$AD = \frac{AC^2}{AB}; \quad AE = \frac{AD^2}{AC} = \frac{AC^3}{AB^2};$$
$$AF = \frac{AE^2}{AD} = \frac{AC^4}{AB^3}; \quad AG = \frac{AF^2}{AE} = \frac{AC^5}{AB^4}.$$

Prin urmare, $AC^5 = AG \cdot AB^4$.

2.46. Un trapez are lungimea bazei mari a, și a bazei mici, b.

a). Să se afle lungimea segmentului paralel cu bazele și care împarte trapezul în două părți avînd ariile egale.

b). Să se exprime aria trapezului, știind că înălțimea este media proporțională între cele două baze.

Soluție. a). Fie $MN = x$ lungimea segmentului paralel cu bazele și y, z respectiv înălțimile celor două trapeze formate. Atunci conform enunțului avem:

$$\frac{(a+x)\,y}{2} = \frac{(b+x)\,z}{2} = \frac{(a+b)\,h}{4}$$

(h înălțimea trapezului dat)

$$y + z = h.$$

Din primele două ecuații scoatem:

$$y = \frac{(a+b)\,h}{2(a+x)}, \quad z = \frac{(a+b)\,h}{2(b+x)}$$

care înlocuite în ecuația treia ne dă:

$$\frac{(a+b)\,h}{2(a+x)} + \frac{(a+b)\,h}{2(b+x)} = h$$

și de aici

$$2x^2 = a^2 + b^2; \quad x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

lungimea segmentului căutat.

b). $h = \sqrt{ab}$ și deci aria $= \dfrac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$.

2.47. Fie un dreptunghi $ABCD$ cu AB mai mare ca BC. Perpendiculara din punctul D pe diagonala AC intersectează AC în O și AB în E. Notăm lungimile segmentelor OE, OA, OB, OC, cu a_1, a_2, a_3, a_4. Să se arate că a_1, a_2, a_3, a_4 formează o progresie geometrică.

(G.M.B., 10416, *W. Maurer*).

Soluție. Din asemănări de triunghiuri dreptunghice, avem:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = k,$$

de unde $a_1 = ka_2$, $a_2 = ka_3$, $a_3 = ka_4$.

Prin urmare, a_1, a_2, a_3, a_4 sînt în progresie geometrică.

2.48. În triunghiul ABC cu toate unghiurile ascuțite, înălțimea AD este egală cu latura BC. Bisectoarele

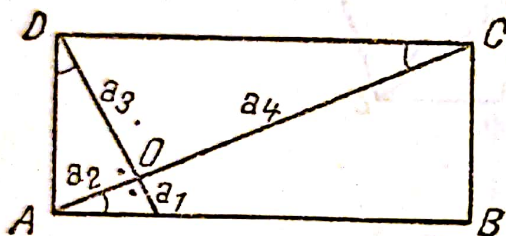


Fig. 2.47

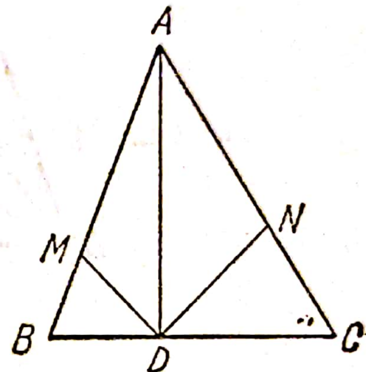


Fig. 2.48

unghiurilor ADB și ADC intersectează respectiv pe AB și AC în M și N. Să se arate că:

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1.$$

(G.M.F., E: 378, *Mihail Popescu*).

Soluție. Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiurile ADB și ADC, rezultă:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{DB}{DA} \quad (1) \quad \text{și} \quad \frac{NC}{NA} = \frac{DC}{DA} \quad (2).$$

Prin adunarea relațiilor (1) și (2) se obține relația din enunț.

Observație. În cazul cînd $B > 90°$ sau $C > 90°$ relația dată devine:

$$\frac{NC}{NA} - \frac{MB}{MA} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{MB}{MA} - \frac{NC}{NA} = 1.$$

2.49. Fie P un punct pe latura AB a paralelogramului $ABCD$. Dreptele PC și PD intersectează diagonalele BD și AC respectiv în M și N. Să se stabilească relația:

$$\frac{MP}{MC} + \frac{NP}{ND} = 1.$$

(R.M.F., 1038, *Mihail Popescu*).

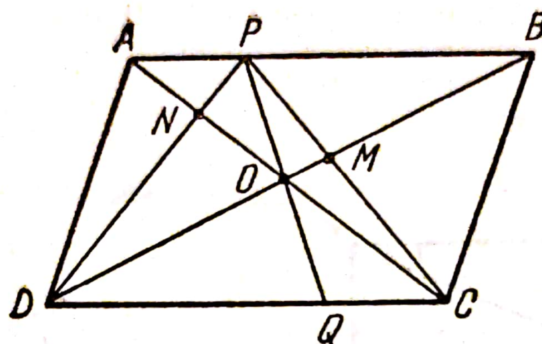


Fig. 2.49

Soluția I-a. Din asemănarea triunghiurilor MCD și MPB rezultă:

$$\frac{MP}{MC} = \frac{PB}{CD}. \tag{1}$$

Analog, din triunghiurile NCD și NPA se obține:

$$\frac{NP}{ND} = \frac{PA}{CD}. \tag{2}$$

Prin adunarea relațiilor (1) și (2) se obține relația din enunț.

Soluția a II-a. Se notează cu O intersecția diagonalelor și cu Q intersecția dreptelor OP și DC.

Conform *teoremei lui Van Aubel* rezultă:

$$\frac{MP}{MC} + \frac{NP}{ND} = \frac{OP}{OQ}.$$

În cazul problemei $OP = OQ$ și se obține relația din enunț.

Observație. Relația dată se mai poate scrie $\frac{MB}{MD} + \frac{NA}{NC} = 1$ și cum $MN = BD - MD$ și $NA = AC - NC$, rezultă $\frac{AC}{NC} + \frac{BD}{MD} = 3$.

2.50. Într-un patrulater complet $ABCDMN$ există relația:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{MC}{MD} = \frac{NA}{NB} \cdot \frac{NC}{ND}.$$

(G.M.F., 1552, *Mihail Popescu*).

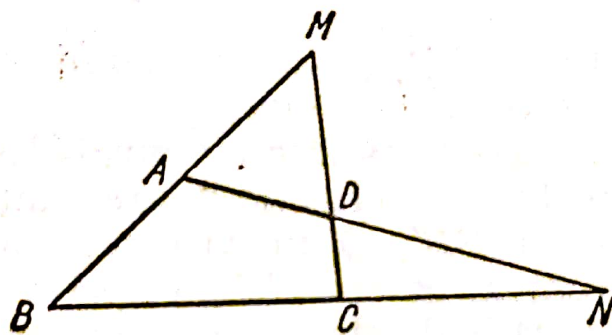


Fig. 2.50

Soluție. Aplicînd *teorema lui Menelaus* triunghiurilor NAB și NDC tăiate de secantele MDC și MAB rezultă:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{CB}{CN} \cdot \frac{DN}{DA} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{MC}{MD} \cdot \frac{AD}{AN} \cdot \frac{BN}{BC} = 1. \qquad (2)$$

Prin înmulțirea relațiilor (1) și (2) se obține relația din enunț.

2.51. Se dă patrulaterul $ABCD$ în care $BC = AD$. Bisectoarele unghiurilor A și B intersectează diagonalele BD și AC respectiv în M și N. Să se arate că: $MB \cdot NC = NA \cdot MD$.

(G.M.F., E: 404, *Mihail Popescu*).

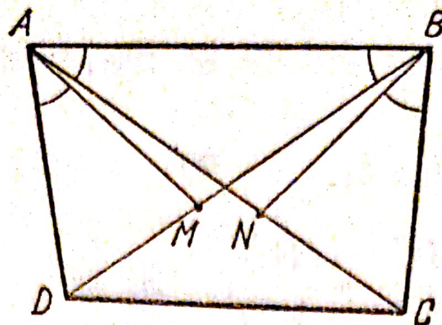


Fig. 2.51

Soluție. Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiurile ABD și ABC se obțin relațiile:

$$\frac{MB}{MD}=\frac{AB}{AD} \quad (1) \qquad \frac{NA}{NC}=\frac{AB}{BC}. \quad (2)$$

Împărțind relațiile (1) și (2) și ținînd seama că $BC = AD$ rezultă relația din enunț.

2.52. Să se construiască un triunghi ABC astfel ca cele trei puncte de intersecție dintre înălțimile AA', CC' și bisectoarea BB', să fie vîrfurile unui triunghi echilateral și echivalent cu ABC. În acest caz, latura triunghiului echilateral este media geometrică a laturilor BA și BC.

(G.M.B., 1132, *Gh. Bazacov*).

Soluție. Însemnăm cu H, M, N cele trei puncte de intersecție dintre înălțimile AA', CC' și bisectoarea BB'. Să presupunem cazul că triunghiul HMN ar fi echilateral, fără să fie și echivalent cu ABC. Atunci

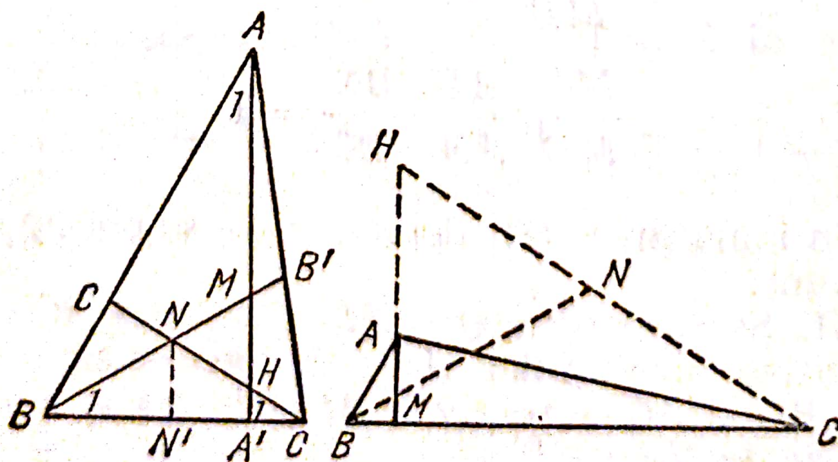


Fig. 2.52

unghiurile patrulaterului $BNHA'$ sînt: $\sphericalangle N = 120°$; $\sphericalangle H = 120°$; $\sphericalangle A' = 90°$ și atunci $\sphericalangle NBA' = 30°$, dar BNB' este bisectoare și deci $\sphericalangle B = 60°$. Putem afirma atunci că dacă triunghiul HMN este echilateral, unghiul B trebuie să aibă $60°$ și reciproc (se poate demonstra).

Trecem acum la cazul cînd triunghiul HMN trebuie să fie și echivalent cu ABC. Să calculăm aria triunghiului HMN:

Proiecția pe BC a laturii HN o notăm cu $H'N'$ și avem: $A'N' = A'B - N'B$ dar $A'B = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$ fiindcă $A_1 = C_1 = 30°$ în triunghiul $AA'B$, $N'B = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$ fiindcă triunghiul BNC este isoscel. Rezultă că: $A'N' = \frac{c-a}{2}$ și atunci

$$HN = \frac{A'N'}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c-a}{\sqrt{3}}. \qquad (1)$$

În consecință,

$$S_{HMN} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

dar

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Egalînd cele două suprafețe, obținem condiția:

$$\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sau

$$(c-a)^2 = 3ac.$$

Construcția triunghiului ABC se poate face ținînd seamă de relațiile $B = 60°$; $(c-a)^2 = 3ac$.

Se va construi unghiul B, una din laturile lui, fie a, fie c ce se considera dată, iar cealaltă se poate căpăta din relația ultimă. Dacă în relația $(c - a)^2 = 3ac$ înlocuim pe $c - a$ cu $HN\sqrt{3}$ din (1) se obține:

$$HN^2 = AB \cdot CB.$$

2.53. Fie P punctul de intersecție al coardelor perpendiculare între ele AB și CD duse într-un cerc de centru O. Să se arate că:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OP}.$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} +$$

$$+ \overrightarrow{OD} + 4\overrightarrow{PO} = 2\overrightarrow{PO}.$$

Soluție. Fie M și N respectiv mijloacele coardelor AB și CD. Avem

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \text{ și } \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = 2 \cdot \overrightarrow{OP};$$

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP};\ \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP};\ \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} -$$

$$- \overrightarrow{OP};\ \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OP};$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} +$$

$$+ \overrightarrow{OD} - 4\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OP} - 4\overrightarrow{OP} = -2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{PO}.$$

2.54. Într-un triunghi oarecare ABC ducem bisectoarele AA', BB', CC' și fie A'' intersecția bisectoarei AA' cu $B'C'$. Să se arate că:

$$\frac{A''C'}{BC'} \cdot \frac{B'C}{A''B'} = \frac{AC}{AB}.$$

(Rev. Pitagora, 1939, *C. Ionescu-Țiu*).

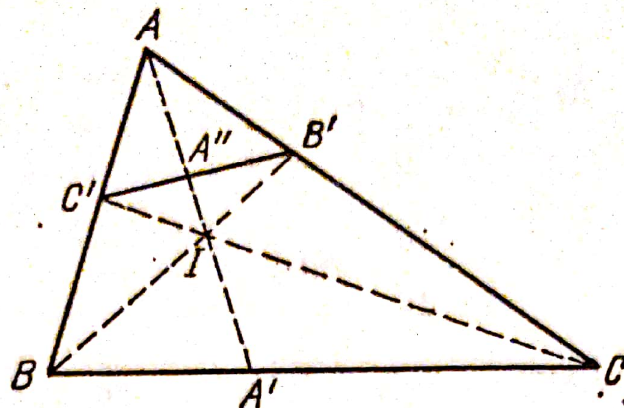


Fig. 2.54

Soluție. Conform teoremei bisectoarei

$$\frac{A''C'}{A''B'}=\frac{AC'}{AB'}; \quad \frac{AC'}{BC'}=\frac{AC}{BC} \text{ și } \frac{B'C}{AB'}=\frac{BC}{AB}.$$

$$\frac{A''C'}{BC'}\cdot\frac{B'C}{A''B'}=\frac{A''C'}{A''B'}\cdot\frac{AC'}{AB'}\cdot\frac{B'C}{BC'}=\frac{AC'}{BC'}\cdot\frac{B'C}{AB'}=$$

$$=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BC}{AB}=\frac{AC}{AB}.$$

2.55. În triunghiul ABC $(B>C)$ fie I proiecția vîrfului B pe bisectoarea AM. Să se arate că:

$$\frac{IA}{IM}=\frac{b+c}{b-c}.$$

(G.M., 11661, *L. Constantinescu*).

Soluție. Triunghiul ABD este isoscel căci AI este bisectoare și înălțime, deci $AD=AB=c$ și $IB=$ $=DI \Rightarrow DC=b-c$.

Ducem $DE \parallel AM$, $DE=2MI$.

În triunghiul AMC avem:

$$\frac{CD}{CA}=\frac{DE}{AM}\Rightarrow\frac{b-c}{b}=\frac{2MI}{AM}$$

sau

$$\frac{b-c}{2b}=\frac{MI}{AM} \Rightarrow \frac{b-c}{2b-b+c}=\frac{MI}{AM-MI}.$$

$$\Rightarrow \frac{b-c}{b+c}=\frac{IM}{AI} \quad \text{sau} \quad \frac{IA}{IM}=\frac{b+c}{b-c}.$$

2.56. Fie ABC un triunghi oarecare, AD bisectoarea interioară a unghiului A și AE bisectoarea unghiului BAD. Să se arate că:

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{DC}{AC \cdot DE}.$$

(G.M., 14971, *D. Firu*).

Soluție. Aplicăm teorema bisectoarei:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC} \quad \text{sau} \quad \frac{\text{aria } ABD}{\text{aria } ACD}=\frac{BD}{DC},$$

$$\frac{\text{aria } ABD}{\text{aria } ACD}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow \text{aria } ABD=\frac{AB}{AC}\cdot \text{aria } ACD.$$

$$\frac{\text{aria } ABE}{\text{aria } AED}=\frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{\text{aria } ABD}{\text{aria } AED}=\frac{AB+AD}{AD};$$

$$\Rightarrow \text{aria } ABD=\frac{AB+AD}{AD}\cdot \text{aria } AED.$$

Deci

$$\frac{\text{aria } ACD}{\text{aria } AED}=\frac{AB\cdot AC+AD\cdot AC}{AB\cdot AD}=\frac{AC}{AD}+$$

$$+\frac{AC}{AB}=AC\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}\right);$$

dar

$$\frac{\text{aria } ACD}{\text{aria } AED}=\frac{DC}{DE};$$

deci

$$AC\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}\right)=\frac{DC}{DE}\Rightarrow\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{DE}{AC\cdot DE}.$$

2.57. Pe laturile AB, AC ale unui triunghi dat se iau de la B și C către vîrful A, segmentele egale BD și CF.

a). Să se arate că dacă M este punctul de intersecție al dreptelor BC și DE, avem relația

$$AB\cdot MD=AC\cdot ME\ \ (AC>AB).$$

b). Să se cerceteze cazul particular cînd punctul D coincide cu punctul A.

c). Să se determine lungimea segmentului BD în funcție de laturile triunghiului astfel ca $MC=CB$.

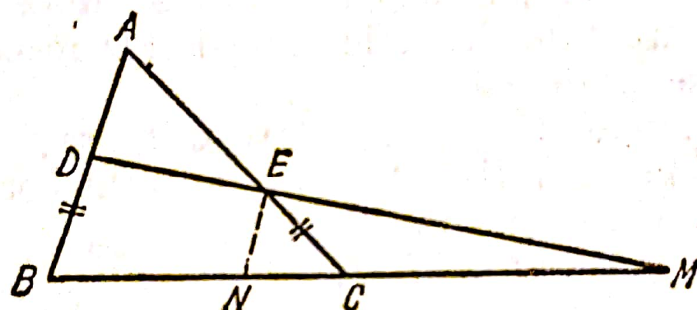


Fig. 2.57

Soluție. a) Ducem $EN\parallel AB$, $N\in BC$ și avem:

$$\triangle MNE\sim\triangle MDB\Rightarrow\frac{EM}{MP}=\frac{NE}{BD}\qquad(1)$$

$$\triangle CEN\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{EC}{AC}=\frac{NE}{AB}.\qquad(2)$$

Din (1) și (2) prin împărțire obținem:

$$\frac{ME\cdot AC}{MD\cdot EC}=\frac{AB}{BD}\Rightarrow AB\cdot MD=AC\cdot ME;\ (BD=EC).$$

b). Dacă D coincide cu A atunci M coincide cu C, iar E se află pe AC astfel că $EA=AC-AB$. În acest caz $MD=AC$ și $ME=AB$ așa că relația devine identitate, deci se verifică în acest caz.

c). Dacă $MC = CB$, aplicînd *teorema lui Menelaus* triunghiului ABC tăiat de transversala MED, avem:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \Rightarrow \frac{2AD}{EA} = 1.$$

Dar

$$AD = AB - BD$$

şi

$$EA = AC - EC = AC - BD.$$

Deci,

$$2(AB - BD) = AC - BD \text{ sau } BD = 2AB - AC.$$

2.58. Se dă un paralelogram $ABCD$ şi se iau pe latura AB de la B către A segmentul $BM = BC$, iar pe latura AD de la D către A segmentul $DN = DC$. Prin vîrful C al paralelogramului se duce o dreaptă variabilă care taie dreptele AB şi AD respectiv în P şi Q. Să se arate că:

a). Punctele, C, M, N sînt coliniare;

b). Produsul $BP \cdot QD$ este constant oricum s-ar roti dreapta PQ în jurul lui C.

c). $CP \cdot QN = CQ \cdot PM$.

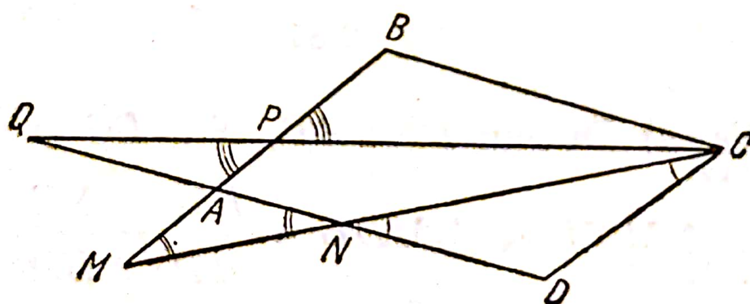


Fig. 2.58

Soluţie. a). Unim N cu C şi M. Triunghiul NDC este isoscel. $\sphericalangle DCN = \sphericalangle DNC$. Triunghiul MAN este isoscel, deci $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ANM$, $2\sphericalangle ANM = 180° - \sphericalangle MAN$ şi $2\sphericalangle CND = 180° - \sphericalangle CDN$, dar $\sphericalangle CDN = \sphericalangle MAN \Rightarrow \sphericalangle ANM = \sphericalangle CND \Rightarrow \sphericalangle MNC = 180°$, adică punctele M, N, C sînt coliniare.

b). $\triangle BPC \sim \triangle CDQ \Rightarrow \dfrac{BC}{QD} = \dfrac{BP}{CD} = \dfrac{CP}{CQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow BP \cdot QD = BC \cdot CD = \text{const.}$

c). $\dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{BC}{QD} = \dfrac{BP}{CD} = \dfrac{BC - BP}{QD - CD} =$

$$= \frac{BM - BP}{DQ - DN} = \frac{PM}{QN} \Rightarrow CP \cdot QN = CQ \cdot PM.$$

2.59. Pe baza AB a unui triunghi ABC se ia un punct oarecare P din care se duce o paralelă la mediana CM a triunghiului. Această paralelă taie celelalte două laturi sau prelungirile lor în punctele D și E. Să se arate că $PD + PE = 2MC$.

Soluție. Din asemănarea triunghiurilor (CAM cu DAP) și (BCM cu EBP) rezultă:

$$\frac{PD}{CM} = \frac{AP}{AM} = \frac{2AP}{AB} \quad \text{și} \quad \frac{PE}{CM} = \frac{PB}{MB} = \frac{2BP}{AB},$$

de unde

$$\frac{PD + PE}{CM} = \frac{2(AP + PB)}{AB} = \frac{2AB}{AB} = 2.$$

Deci $PD + PE = 2MC$.

2.60. Dacă diagonalele unui trapez dreptunghic sînt perpendiculare, atunci în acest trapez înălțimea este medie proporțională între baza mare și baza mică.

(G.M., E: 1391, *Stelian Lambă*).

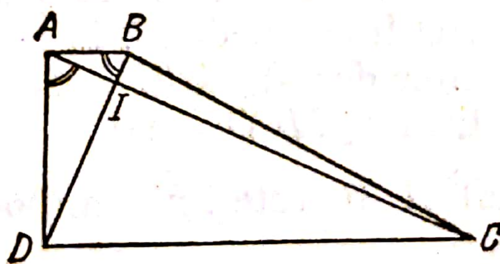


Fig. 2.60

Soluție. Să considerăm trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \perp AD$ și $AC \perp BD$. Fie I intersecția diagonalelor. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice ADI și CDI avem:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AI}{DI} = \frac{DI}{CI}$$

şi de aici deducem

$$\frac{AD^2}{CD^2} = \frac{AI}{CI}.$$

Din asemănarea triunghiurilor ABI și CDI avem:

$$\frac{AI}{CI} = \frac{AB}{CD}, \text{ de unde rezultă } \frac{AD^2}{CD^2} = \frac{AB}{CD}$$

sau

$$AD^2 = AB \cdot CD.$$

2.61. Se dă triunghiul isoscel $ABC(AB = AC)$. Se prelungește BA cu segmentul $AM = AB$. Pe latura AC se ia punctul D astfel ca $AD = \frac{1}{3}AC$. Fie O mijlocul lui BC.

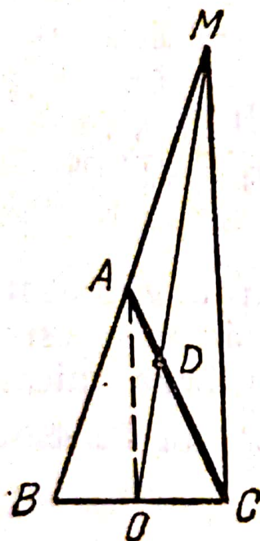


Fig. 2.61

a). Să se arate că $MC \perp BC$.

b). Triunghiul $AOD \sim DOM$.

c). Punctele M, D, O sînt coliniare.

(G.M., E: 4694, *Elena Panaitopol*).

Soluție. a). AO este linie mijlocie în $\triangle BMC$, deci AO paralelă cu MC. AO fiind mediană în ABC este și înălțime deci $\sphericalangle AOC = 90°$ și din paralelism $\sphericalangle MCO = 90°$.

b). Din faptul că AO este linie mijlocie: $\frac{AO}{MC} = \frac{1}{2}$, dar și $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$ și $\sphericalangle OAC = \sphericalangle ACM$ deci triunghiurile AOD și ACM sînt asemenea.

c). Din această asemănare rezultă că $\sphericalangle ADO = \sphericalangle MDC$. Dar $\sphericalangle ADO$ are ca suplement pe $\sphericalangle ODC$, deci $\sphericalangle MDC$, de asemenea, deci M, D, O sînt coliniare.

2.62. Se dă un patrulater $ABCD$ ale cărui diagonale AC și BD se taie în I, circumscris unui cerc,

a). Să se arate că suma a două laturi opuse este egală cu suma celorlalte două.

b). Dacă avem relația $\frac{AI}{IC} = \frac{BI}{ID} = \frac{AD}{BC}$, atunci patrulaterul este romb.

(G.M., E: 5108, *V. Matrosenco*).

Soluție. a). $AM + MB + DP + PC = AQ + QD + BN + NC$ unde M, N, P, Q sînt punctele de tangență respectiv ale laturilor AB, BC, CD, DA. Se ține seama că $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$ și $DP = DQ$.

b). Din relația $\frac{AI}{IC} = \frac{BI}{ID} \Rightarrow \triangle AIB \sim \triangle DIC$ și dacă $\frac{AI}{IC} = \frac{BI}{ID} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{AD + BC}{BC} = \frac{AB + DC}{DC} \Rightarrow BC = DC$ deci triunghiul este isoscel.

Analog avem:

$$\frac{AD}{BC + AD} = \frac{AB}{DC + AB} \Rightarrow AD = AB,$$

deci triunghiul ABD este isoscel.

Latura BD este comună triunghiurilor ABD și BCD iar $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB$;

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle DBC.$$

Dar din asemănarea triunghiurilor AIB și DIC rezultă că $\sphericalangle ABI = \sphericalangle IDC$ $\sphericalangle BAI = \sphericalangle ICD$. Triunghiurile ABD și BCD fiind egale, rezultă că $AB = CD = BC = DA$, deci patrulaterul $ABCD$ este romb.

2.63. Se dau două axe fixe. Din punctul lor de intersecție pleacă în cele patru direcții, cu viteze diferite, punctele mobile A, B, C și D. Să se arate că:

$$\frac{AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2}{AC \cdot BD} = \text{constant}.$$

(G.M.B., 3824, *V. Brișcă*).

Soluție. Fie α unghiul format de axe la intersecția lor O. Avem relațiile:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos\alpha,$$
$$BC^2 = BO^2 + OC^2 + 2BO \cdot OC \cos\alpha,$$
$$CD^2 = CO^2 + OD^2 - 2CO \cdot OD \cos\alpha,$$
$$DA^2 = DO^2 + OA^2 + 2DO \cdot OA \cos\alpha.$$

Prin urmare,

$$\frac{AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2}{AC \cdot BD} = 2 \cos\alpha \cdot$$

$$\cdot \frac{-AO \cdot OB - BO \cdot OC - DO \cdot OC - DO \cdot OA}{AC \cdot BD} =$$

$$= 2 \cos \alpha \cdot \frac{-AO(OB + DO) - OC\,(OB + OD)}{AC \cdot BD} =$$

$$= -2 \cos \alpha = \text{const.}$$

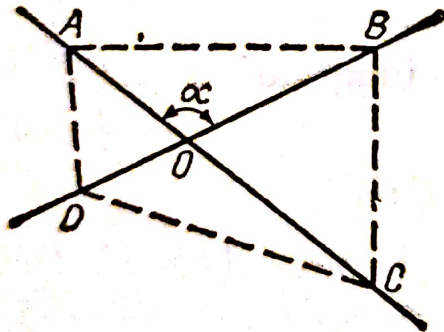


Fig. 2.63

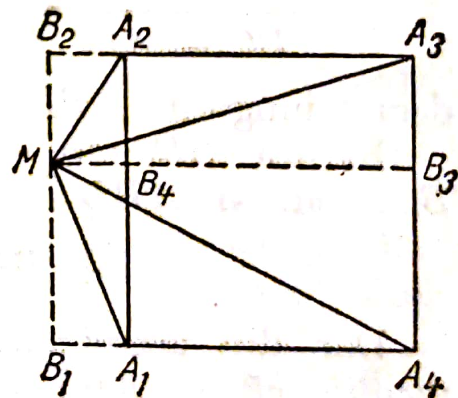


Fig. 2.64

2.64. Se consideră pătratul $A_1A_2A_3A_4$ și un punct M în planul său. Să se stabilească relația: $MA_1^2 + MA_3^2 = MA_2^2 + MA_4^2$.

Soluție. Considerăm punctul M exterior pătratului și-l proiectăm ortogonal pe laturile pătratului. Fie B_1, B_2, B_3, B_4 proiecțiile sale. Evident: $A_1B_1 = A_2B_2$; $A_3B_3 = A_2B_4$; $B_3A_4 = A_1B_4$. Folosind relația lui Pita-

gora pentru triunghiurile MA_1A_4, MA_1A_2, MA_2A_3, MA_3A_4 obținem respectiv:

$$MA_1^2 = MA_4^2 + A_1A_4^2 - 2A_1A_4 \cdot B_1A_4,$$
$$MA_1^2 = MA_2^2 + A_1A_2^2 - 2A_1A_2 \cdot A_2B_4,$$
$$MA_3^2 = MA_2^2 + A_2A_3^2 + 2A_2A_3 \cdot A_2B_2,$$
$$MA_3^2 = MA_4^2 + A_3A_4^2 - 2A_3A_4 \cdot B_3A_4.$$

Adunînd relațiile obținute și ținînd seamă că

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_1 \quad \text{și} \quad B_1A_4 = = B_1A_1 + A_1A_4,$$

prin simplificare se obține relația din enunț.

La fel pentru cazul punctului interior.

2.65. Să se demonstreze că două triunghiuri dreptunghice care au medianele corespunzătoare catetelor respectiv egale, sînt egale.

(Concurs elevi, 1975)

Soluție. Fie ABC și $A_1B_1C_1$ cele două triunghiuri dreptunghice, $BM = B_1M_1$ și $CN = C_1N_1$ ca mediane corespunzătoare catetelor.

Notăm $AC = b$; $A_1C_1 = b_1$; $AB = c$; $A_1B_1 = c_1$.

Din relația

$$CN = C_1N_1 \Rightarrow b^2 + \frac{c^2}{4} = b_1^2 + \frac{c_1^2}{4};$$

iar din relația

$$BM = B_1M_1 \Rightarrow \frac{b^2}{4} + c^2 = \frac{b_1^2}{4} + c_1^2.$$

Adunînd relațiile obținute, rezultă că $b^2 + c^2 = b_1^2 + c_1^2$ deci ipotenuzele BC și B_1C_1 sînt egale.

Ținînd seama că $b^2 + c^2 = b_1^2 + c_1^2$ și că $4b^2 + c^2 = 4b_1^2 + c_1^2$ rezultă că $3b_1^2 = 3b_1^2$, adică $b = b_1$, analog rezultă $c = c_1$.

Prin urmare, triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt egale.

2.66. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC, unghiul A este de 60°, atunci $h_a = \frac{bc\sqrt{3}}{2a}$.

Soluție. Fie AA', BB', CC', înălțimile triunghiului. Avem:

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2s} = \frac{2a}{bh_b + ch_c}; \qquad h_b = c \sin 60° = \frac{c\sqrt{3}}{2};$$

$$h_c = b \sin 60° = \frac{b\sqrt{3}}{2}; \text{ deci } \frac{1}{h_a} = \frac{2a}{bc\sqrt{3}};$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{bc\sqrt{3}}{2a}.$$

2.67. Fie ABC un triunghi oarecare. Dreptele paralele (D_1) și (D_2) trec respectiv prin punctele B și C. Pe (D_1) și (D_2) și de aceeași parte a laturii BC, se iau, respectiv, punctele B_1 și C_1 astfel ca $BB_1 = AB$ și $CC_1 = CA$. Să se arate că perpendiculara în A pe bisectoarea unghiului A și B_1C_1 se întîlnesc într-un punct fix.

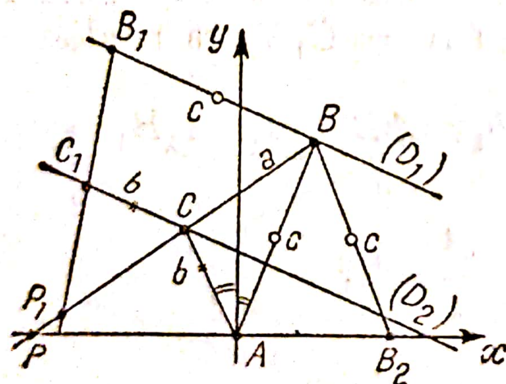


Fig. 2.67

Soluție. Notăm $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, Ay bisectoarea unghiului A, Ax perpendiculara în A pe bisectoare. Construim BB_2 paralelă la AC; $B_2 \in Ax$; $\sphericalangle BB_2A = \sphericalangle CAP$ și $\sphericalangle CAP = \sphericalangle BAB_2$. Rezultă $AB = BB_2 = BB_1 = c$.

Fie $P = B_2A \cap BC$ și $P_1 = BC \cap B_1C_1$. Dacă demonstrăm că P coincide cu P_1, problema este rezolvată.

Din asemănarea triunghiurilor PAC și PBB_2 obținem:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{BB_2}{CA} = \frac{c}{b}.$$

Din asemănarea triunghiurilor P_1CC_1 și P_1BB_1, $\frac{P_1B}{P_1C} = \frac{B_1B}{C_1C} = \frac{c}{b}$. Rezultă $\frac{PB}{PC} = \frac{P_1B}{P_1C}$ și deci P_1 coincide cu P.

Dreapta B_1C_1 va trece întotdeauna prin punctul P de concurență al perpendicularei în A pe bisectoarea unghiului A cu prelungirea laturei opuse unghiului A.

2.68. Perpendicularele pe diagonala BD a dreptunghiului $ABCD$ duse în B și D intersectează laturile DC și BC în M și N. Să se arate că:

a). $\frac{AB}{BC} = \frac{BN}{DM}$; b). $\frac{BM}{BN} = \frac{AD}{DN}$; $\frac{BM}{DM} = \frac{AB}{DN}$;

c). $AB^2 + BC^2 = BM \cdot DN$.

Soluție. a). Din asemănarea triunghiurilor ABD și BDN avem:

$$\frac{AD}{DN} = \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BN} \Rightarrow AD \cdot BN = BD^2. \qquad (1)$$

Din asemănarea triunghiurilor DBM și ABD rezultă:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BM}{AD} = \frac{DM}{BD} \Rightarrow AB \cdot DM = BD^2. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$AD \cdot BN = AB \cdot DM \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BN}{DM}.$$

b). Din asemănarea triunghiurilor BDM și BDN avem:

$$\frac{BD}{DN} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow BD^2 = BM \cdot DN. \qquad (3)$$

Deci

$$AD \cdot BN = BM : DN \Rightarrow \frac{AD}{DN} = \frac{BM}{BN}$$

și

$$AB \cdot DM = BM \cdot DN \Rightarrow \frac{AB}{DN} = \frac{BM}{DM}.$$

c). Cum $BD^2 = AB^2 + BC^2$, relația (3) devine: $AB^2 + BC^2 = BM \cdot DN$.

2.69. Un trapez dreptunghic $ABCD$ are unghiurile drepte în A și D. Bazele au lungimile $AB = a$ și $DC = 3a$, iar diagonala BD este perpendiculară pe latura BC.

a). Să se arate că $AB \cdot DC = BD^2$.

b). Să se calculeze aria trapezului $ABCD$.

c). Să se calculeze cosinusul unghiului ABC.

d). Diagonalele AC și BD se taie în punctul E.

Să se calculeze tangenta geometrică a unghiului BEC.

(G.M., 14225, C. *Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$ ca alterne interne. $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BCD$ avînd același complement.

Din asemănarea triunghiurilor ABD și BCD avem $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BC}$ de unde $AB \cdot DC = BD^2$.

b). Egalitățile rapoartelor de la punctul a) se mai pot scrie:

$$\frac{a}{BD} = \frac{BD}{3a} = \frac{AD}{BC}. \text{ Rezultă } BD^2 = 3a^2 \text{ sau}$$

$$BD = a\sqrt{3}.$$

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

Aria trapezului este

$$S = \frac{(a + 3a)\, a\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \cdot a^2.$$

c). $\cos ABC = -\cos BCD = -\cos ADB = -\frac{AD}{BD} = -\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$

d). $\operatorname{tg} BEC = \frac{BC}{BE}$. Ducem $BF \perp DC$ și avem $BF = AD = a\sqrt{2}$.

$$BC = \sqrt{BF^2 + FC^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}.$$

Din asemănarea triunghiurilor ABE și CDE avem:

$$\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE = 3BE;$$

dar

$$BE + DE = BD = a\sqrt{3} \Rightarrow BE + 3BE = a\sqrt{3},$$

deci

$$BE = \frac{a\sqrt{3}}{4}; \quad \operatorname{tg} BEC = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{3}:4} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}.$$

2.70. Fie un paralelogram $ABCD$, M și N mijloacele laturilor AB și CD. Prin M și N se duc paralele la diagonala BD. Aceste paralele taie dreptele AN și CM în P și Q. Aria paralelogramului $ABCD$ fiind de 12 unități pătratice să se afle aria $MNPQ$.

(Concurs elevi, 1956).

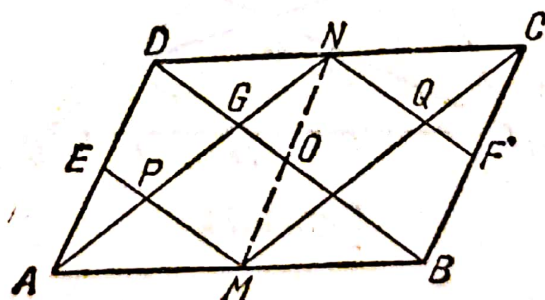


Fig. 2.70

Soluție. Dreapta MN împarte paralelogramul $ABCD$ în două paralelograme egale. Notăm $G = BD \cap AN$. În triunghiul ABG avem $MP \parallel BG$, deci $AP = PG$. În triunghiul MNP avem $PM \parallel GO \Rightarrow PG = GN$ deci $AP = PG = GM$, idem $3CQ = CM$.

Aria cuprinsă între $MPNQ$ și $ABCD$ se compune din ariile ADN și BCM care împreună fac jumătate din

aria $ABCD$ plus ariile APM și CQN care fac o treime din aria $AMCN$. Deci aria $MPNQ = \frac{1}{3}$ aria $ABCD$.

2.71. Se dă triunghiul ABC și se consideră punctul N pe latura AC. Paralela dusă din N la BC întîlnește pe AB în punctul E; iar paralela dusă tot din N la mediana AQ întîlnește pe BC în F. Dreapta EF intersectează AQ în punctul R. Să se demonstreze relația:

$$\frac{AR}{RQ} - 2\frac{AN}{NC} = 1.$$

(G.M.B., 1768, *L. Mănescu*).

Soluție. Construind dreapta EH paralelă cu FN se formează paralelogramul $NEHF$ avînd ca diagonală segmentul EF. Întrucît AQ este mediana triunghiului rezultă că segmentul PQ unește mijloacele a două laturi opuse ale paralelogramului $NEHF$; deci diagonala EF împarte segmentul PQ în două părți egale și deci $PR = RQ$.

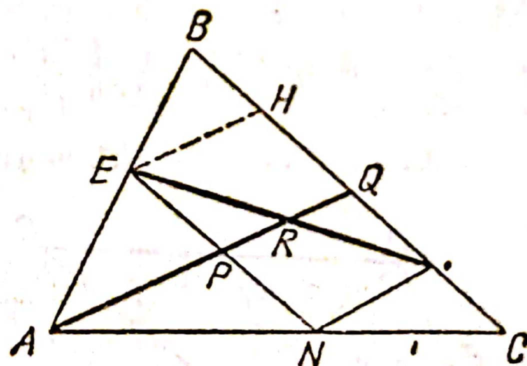


Fig. 2.71

Notăm $\frac{AN}{NC} = k$. Atunci, din triunghiul ACQ rezultă $\frac{AP}{PQ} = k$, deoarece PN și CQ sînt paralele.

Deoarece $PQ = 2QR$ avem $\frac{AP}{2PQ} = \frac{k}{2}$ sau $\frac{AP}{4QR} = \frac{k}{2}$ sau $\frac{AP}{2QR} = k$.

Adunăm $\frac{1}{2}$ la ambele părți și obținem:

$$\frac{AP}{2QR}+\frac{1}{2}=k+\frac{1}{2}.$$

Aducem la același numitor:

$$\frac{AP+QR}{2QR}=k+\frac{1}{2} \text{ sau } \frac{AP+PR}{2QR}=k+\frac{1}{2}$$

sau

$$\frac{AR}{2QR}=\frac{AN}{NC}+\frac{1}{2}, \text{ deoarece } k=\frac{AN}{NC}.$$

De unde

$$\frac{AR}{RQ}-2\frac{AN}{NC}=1.$$

2.72. Se dă un triunghi ABC și punctele K, L situate respectiv pe laturile AB, AC astfel ca $\frac{KB}{AK}+\frac{LC}{AL}=1$. Să se arate că segmentul KL trece prin centrul de greutate al triunghiului.

(G.M.B., 7290).

Soluția I. Notăm $AC=b$, $AB=c$, $AK=x$, $AL=y$ și relația din enunț se mai scrie:

$$\frac{c-x}{x}+\frac{b-y}{y}=1$$

sau

$$\frac{c}{x}+\frac{b}{y}=3. \qquad (1)$$

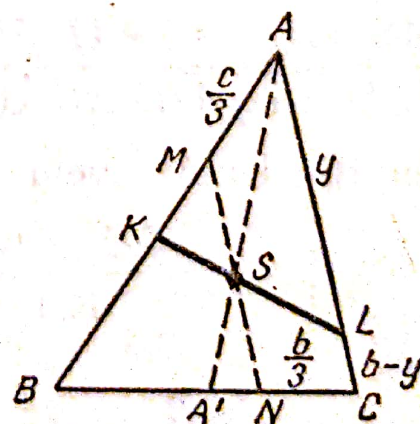


Fig. 2.72

Fie S intersecția segmentului KL cu mediana AA' dusă din A. Paralela dusă din S la AC taie pe AB în

M şi pe BC în N. Din asemănarea triunghiurilor KMS şi KAL avem $\frac{MS}{AL} = \frac{MK}{AK}$. (2)

Dacă S ar fi centrul de greutate, atunci $AM = \frac{c}{3}$, $MS = \frac{b}{3} = SN$, $CN = \frac{a}{3}$ şi astfel relaţia precedentă (2) devine:

$$\frac{\frac{b}{3}}{y} = \frac{x - \frac{c}{3}}{x} \quad \text{sau} \quad \frac{b}{3y} = 1 - \frac{c}{3x};$$

$$\frac{b}{3y} + \frac{c}{3x} = 1; \quad \frac{b}{y} + \frac{c}{x} = 3,$$

adică (1) şi deci KL trece prin centrul de greutate.

II. Schiţăm una din soluţii bazată pe arii.

Comparăm ariile triunghiurilor ASK şi $AA'C$, deci

$$\frac{2S(ASL)}{S(ABC)} = \frac{AS}{AA'} \cdot \frac{AL}{AC};$$

Analog,

$$\frac{S(ALK)}{S(ABC)} = \frac{AS}{AB} \cdot \frac{AL}{AC} \quad \text{şi} \quad \frac{2S(ASK)}{S(ABC)} = \frac{AS}{AA'} \cdot \frac{AK}{AB}$$

de unde rezultă

$$\frac{AS}{AA'} = 2 \cdot \frac{AS \cdot AL}{AB \cdot AC} : \left(\frac{AL}{AC} + \frac{AK}{AB}\right) = 2 : \left(\frac{AB}{AK} + \frac{AC}{AL}\right),$$

dar din enunţ avem

$$\frac{BK + KA}{KA} + \frac{LC + AL}{AL} = 3$$

sau

$$\frac{AB}{AK} + \frac{AC}{AL} = 3, \text{ deci } \frac{AS}{AA'} = \frac{2}{3}.$$

2.73. Se consideră un triunghi ABC de arie S. Pe dreptele BC, CA, AB se iau respectiv punctele A_1, B_1, C_1 astfel că

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = m.$$

a). Să se exprime aria S_1 a triunghiului $A_1B_1C_1$ în funcție de S și m.

b). Să se afle valoarea lui m pentru care aria S_1 este cea mai mică.

c). Pentru care valoare a lui m avem $S_1 = 7S$ și în acest caz să se facă construcția.

(Concurs elevi, 1958, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Notăm $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ și obținem:

$$BA_1 = \frac{ma}{m+1}; \; A_1C = \frac{a}{m+1}; \; CB_1 = \frac{mb}{m+1};$$

$$B_1A = \frac{b}{m+1}, \ldots$$

a). Fie $S_a =$ aria (AC_1B_1); $S_b =$ aria (BA_1C_1); $S_c =$ aria (CB_1A_1).

Triunghiurile AC_1B_1 și ABC avînd unghiul A comun, avem:

$$\frac{S_a}{S} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC} = \frac{m}{(m+1)^2} \text{ și } \frac{S_b}{S} = \frac{S_c}{S} = \frac{m}{(m+1)^2}.$$

Se deduce

$$S_1 = S - (S_a + S_b + S_c) = S\left[1 - \frac{3m}{(m+1)^2}\right] =$$

$$= S\,\frac{m^2 - m + 1}{(m+1)^2}.$$

b). Notînd $\frac{S_1}{S} = \lambda$ rezultă $\frac{m^2 - m + 1}{(m+1)^2} = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda - 1)\, m^2 + (2\lambda + 1)\, m + \lambda - 1 = 0$. Ecuația în m are rădăcini reale dacă $\Delta = (2\lambda + 1)^2 - 4(\lambda - 1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \lambda \geqslant \frac{1}{4}$.

Valoarea minimă a lui λ este 1/4 în care caz $m = 1$.

c). $S_1 = 7S$ are loc numai dacă A_1, B_1, C_1 sînt pe prelungirile laturilor. Relația conduce la ecuația $2m^2 + 5m + 2 = 0$ cu rădăcinile $m_1 = -2$ și $m_2 = -\frac{1}{2}$, ambele valabile.

Dacă A_1 este în exterior laturii BC, dincolo de B, astfel că $A_1B = BC$, atunci $\frac{BA_1}{A_1C} = -\frac{1}{2}$, iar dacă punctul A se află dincolo de C astfel că $CA_1 = BC$, atunci $\frac{BA_1}{A_1C} = -2$. La fel se construiesc punctele B_1 și C_1.

2.74. Fie triunghiul ABC și dreptele AA_1, AA_2, AA_3 care împart unghiul BAC în patru părți egale (A_1, A_2, A_3 situate pe BC în ordinea dată).

a). Să se arate că

$$\frac{A_1B}{A_1A_2} \cdot \frac{A_3A_2}{A_3C} \cdot \frac{A_2C}{A_2B} = 1.$$

b). Dacă $BA_1 = CA_3$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

c). Să se arate că în nici un triunghi nu poate avea loc relația

$$AA_2^2 = AB \cdot AC$$

(G.M., 14101, *L. Panaitopol*)

Soluție. a). Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiurile ABA_2, AA_2C și ABC, avem următoarele relații:

$$\frac{A_1B}{A_1A_2} = \frac{AB}{AA_2}, \quad \frac{A_3A_2}{A_3C} = \frac{AA_2}{AC}, \quad \frac{A_2C}{A_2B} = \frac{AC}{AB}.$$

Făcînd produsul acestor relații se obține:

$$\frac{A_1B}{A_1A_2}\cdot\frac{A_3A_2}{A_3C}\cdot\frac{A_2C}{A_2B}=1.$$

b). Ținînd seama că $BA_1 = CA_3$ și de relația demonstrată anterior, avem:

$$A_2B \cdot A_2A_1 = A_2A_3 \cdot A_2C,$$

dar cum $A_2B = A_2A_1 + A_1B$ și $A_2C = A_2A_3 + A_3C$, înlocuind și făcînd calculele, obținem:

$$(A_2A_3 - A_1A_2)(BA_1 + A_2A_3 + A_1A_2) = 0.$$

Cum $BA_1 + A_2A_3 + A_1A_2 \neq 0$, avem $A_2A_3 = A_1A_2$. Ținînd cont însă de ipoteză rezultă $A_2B = A_2C$ deci triunghiul ABC este isoscel.

c). Presupunem că în triunghiul ABC are loc relația:

$$AA_2^2 = AB \cdot AC \text{ sau } \frac{AA_2}{AB}=\frac{AC}{AA_2}.$$

Cum AA_2 este bisectoare, rezultă $\triangle ABA_2 \sim \triangle AA_2C$.

$\sphericalangle B = \sphericalangle AA_2C$ dar $\sphericalangle AA_2C$ este unghi exterior triunghiului ABA_2. Deci contradicție.

2.75. Se consideră o dreaptă orientată (Δ) și pe (Δ) un punct fix. Se consideră apoi trapezul $ABCD$ avînd segmentul AB drept bază mare, situat pe (Δ) în sens pozitiv; fie E și F mijloacele bazelor AB și CD.

Se cere să se determine locurile geometrice ale vîrfurilor B, C, D cînd elementele trapezului verifică în același timp condițiile:

a). $AB \leqslant a$ (a fiind dat)

b). $EF = l$ (l este constant)

c). Suma pătratelor laturilor neparalele este constantă.

Notă. Se presupune că constantele sînt astfel date ca problema să fie posibilă.

(G.M.B., 9293, *Gh. D. Simionescu*).

Soluție. a) Fie $I = AD \cap BC$. Se știe că EF trece prin I și este mediană în triunghiul IAB. Ducem $DG \parallel CB$ și $DH \parallel EF$ ($H, G \in AB$).

Este evident că triunghiurile ABI, AGD sînt asemenea și că DH este mediană în triunghiul AGD. Rezultă

$$DH^2 = c^2 = \frac{2(AD^2 + GD^2) - AG^2}{4}. \qquad (1)$$

Dar $AD^2 + GD^2 = k^2$ (constante), apoi notăm $AB = x$, $DC = y$, și avem:
$4c^2 = 2k^2 - (x - y)^2$ sau $(x - y)^2 = 2k^2 - 4c^2 =$ const., adică $AG =$ constant și punctul G este fix.

2.76. Fie I intersecția bisectoarelor AA', BB', CC' în triunghiul ABC. Să se arate că avem relația:

$$\frac{AI}{IA'} \cdot A'C + \frac{BI}{IB'} + \frac{CI}{IC'} \cdot C'B = 2p$$

unde p este semiperimetrul triunghiului ABC.

(G.M.E.B., 3422, *L. Lupaș*).

Soluție. În triunghiul $AA'C$ avem conform cu teorema bisectoarei:

$$\frac{AI}{IA'} = \frac{AC}{A'C}$$

și analog:

$$\frac{BI}{B'I} = \frac{AB}{AB'}; \quad \frac{CI}{C'I} = \frac{BC}{C'B}.$$

Deci:

$$\frac{AC}{A'C} \cdot A'C + \frac{AB}{AB'} \cdot B'A + \frac{BC}{C'B} : C'B = 2p.$$

2.77. Fiind dată parcela plană $ABCD$, se cere ca ea să fie împărțită în patru parcele echivalente $AEOH$, $EBFO$, $FCGO$, $GOHD$, unind mijloacele E, F, G, H ale laturilor AB, BC, CD, DA ale parcelei cu un punct O din interiorul ei, punct ce urmează a fi determinat.

Soluție. Fie M și N mijloacele diagonalelor AC și BD și O intersecția dreptei MO, paralelă cu BD, cu NO, paralelă cu AC. Punctul O este punctul căutat. Pentru a demonstra aceasta, este suficient a arăta că, de exemplu, aria $FCGO$ este $\frac{1}{4}$ din aria parcelei. Pentru aceasta observăm că avem

aria ABM = aria BMC

ca avînd aceeași înălțime și bazele AM și MC egale. La fel, avem

aria DMA = aria DMC,

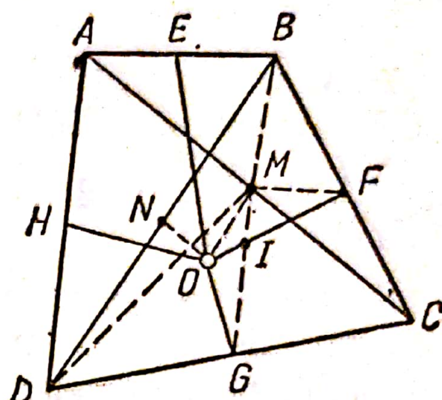


Fig. 2.77

deci

aria ABM + aria DMA = aria MBC + aria DMC,

de unde

$$\text{aria } ABMD = \text{aria } BMDC = \frac{1}{2} \text{aria } ABCD.$$

Se observă apoi că avem

$$\text{aria } CFM = \frac{1}{2} \text{aria } CBM \text{ și aria } CMG = \frac{1}{2} \text{aria } CMD,$$

de unde

$$\text{aria } CFM + \text{aria } CMG = \text{aria } CFMG =$$

$$= \frac{1}{2} (\text{aria } CBM + \text{aria } CMD) = \frac{1}{4} \text{aria } ABCD.$$

Dar, deoarece FG este paralelă cu BD și aceasta este paralelă cu MO, rezultă că avem:

aria $CFMG$ = aria $CFOG$,

căci I fiind intersecția (FO, MG), triunghiurile FMI, IOG sînt echivalente, deoarece FMO și GMO sînt echivalente ca avînd OM paralelă cu FG. Deoarece

ele au GIM, comun rezultă că FMI și IOG sînt echivalente, deci avem relația (1), de unde rezultă că avem:

$$\text{aria } CMOG = \frac{1}{4} \text{ aria } ABCD.$$

2.78. În triunghiul oarecare ABC, bisectoarele BE și CF taie mediana AD în punctele M și N. Să se arate că $\frac{AM}{MD} + \frac{ND}{AN} > 2$.

Soluție. Proprietatea bisectoarei unui unghi al unui triunghi, de a determina pe latura opusă segmente proporționale cu celelalte două laturi ne permite a scrie în triunghiurile ABD și ACD pentru bisectoarele BM și CN.

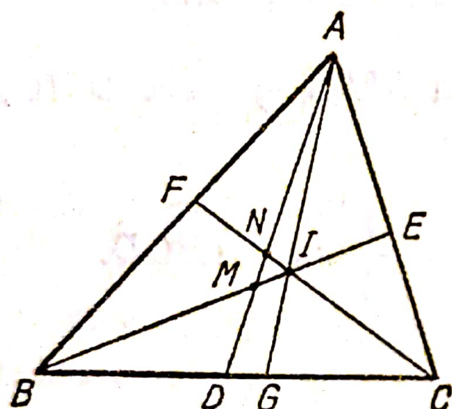


Fig. 2.78

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AB}{BD} \text{ și } \frac{AN}{ND} = \frac{AC}{DC}$$

de unde

$$\frac{AM}{MD} + \frac{AN}{ND} = \frac{AB}{BD} + \frac{AC}{DC} =$$

$$= 2 \cdot \frac{b+c}{a} > 2,$$

sau

$$\frac{b+c}{a} > 1;\ b + c > a,$$

ceea ce este evident.

2.79. Se dă un triunghi ABC. Cevienele AM și AN împart unghiul A în trei părți egale. Fie R și R' cercurile circumscrise respectiv triunghiurilor ABC și AMN și fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar I mijlocul segmentului MN. Să se stabilească relația

$$\frac{R}{R'} = \frac{BM \cdot CN}{MN^2}.$$

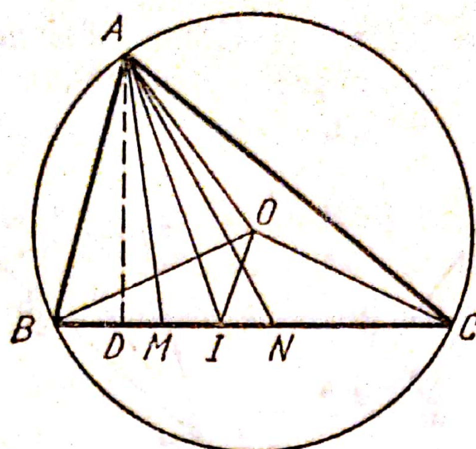


Fig. 2.79

Soluție. Aplicînd teorema bisectoarei interioare în triunghiul ABN, avem:

$$\frac{MB}{MN} = \frac{BA}{AN}, \qquad (1)$$

Analog în triunghiul AMC:

$$\frac{NC}{MN} = \frac{AC}{MA}. \qquad (2)$$

Înmulțind relațiile (1) și (2) și ținînd seama că $BA \cdot AC = 2R \cdot AD$ și $AM \cdot AN = 2R' \cdot AD$, unde AD este înălțimea din A pe BC, obținem prima relație

$$\frac{BM \cdot NC}{MN^2} = \frac{BA \cdot AC}{AN \cdot MA} = \frac{2R \cdot AD}{2R'AD} = \frac{R}{R'}.$$

2.80. Într-un triunghi oarecare ABC luăm un punct oarecare M pe latura BC. Bisectoarea unghiului AMC taie latura AC în R, iar bisectoarea unghiului AMB taie latura AB în S. Să se arate că dreptele AM, BR și CS sînt concurente.

Soluție. Teorema bisectoarei interioare aplicată în triunghiurile AMC și AMB ne dă:

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AR}{RC} \quad (1) \quad \text{și} \quad \frac{AN}{MB} = \frac{AS}{SB}. \quad (2)$$

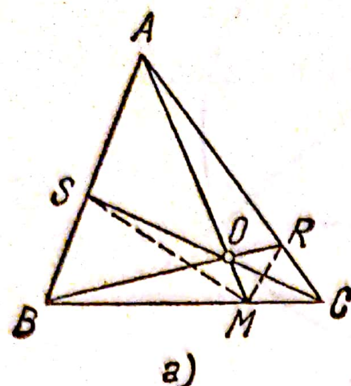


Fig. 2.80 a

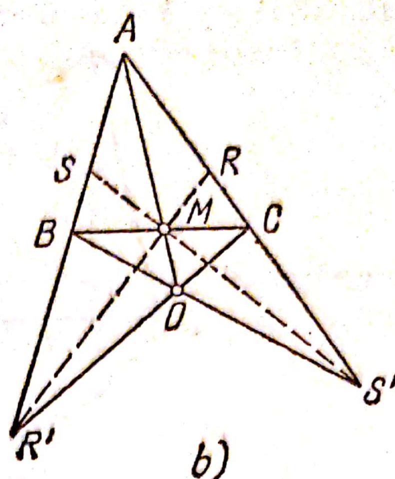


Fig. 2.80 b

Aplicăm teorema lui Ceva:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{RC}{RA}\cdot\frac{SA}{SB}=1,$$

ceea ce se verifică conform relațiilor (1) și (2):

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{MC}{AM}\cdot\frac{MB}{MC}=1.$$

2.81. Bisectoarea unghiului B al unui triunghi ABC dreptunghic în A întîlnește respectiv înălțimea AD și mediana AM în F și E. Să se stabilească relația $AE\cdot AF=2EM\cdot DF$.

Soluție. Din triunghiurile ABM și ABD aplicînd teorema bisectoarei obținem respectiv:

$$\frac{AB}{BM}=\frac{AE}{EM} \text{ și } \frac{AB}{BD}=\frac{AF}{FD}.$$

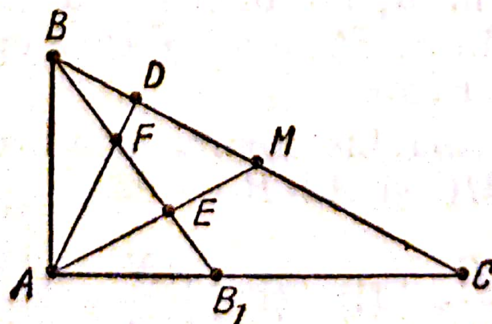


Fig. 2.81

Înmulțind aceste relații și ținînd seama că $BC = 2BM$ și din triunghiul dreptunghic ABC, $AB^2 = BC \cdot BD$, obținem relația din enunț $AE \cdot AF = 2EM \cdot DF$.

2.82. Bisectoarea unghiului B al unui triunghi ABC întîlnește respectiv înălțimea AD și mediana AM în F și E. Să se stabilească relația:

$$\frac{AE \cdot AF}{FM \cdot ED} = \frac{4AB^2}{AC^2 - AB^2 - BC^2}.$$

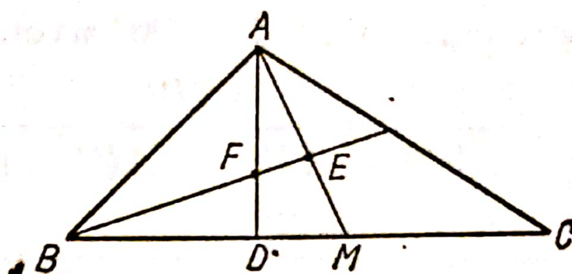


Fig. 2.82

Soluție. Ținînd seama de teorema bisectoarei interioare putem scrie:

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AB}{BD} \qquad (1)$$

și

$$\frac{AE}{EM} = \frac{AB}{BM} = \frac{2AB}{BC}$$

sau

$$\frac{AE}{EM} = \frac{2AB}{BC} \qquad (2)$$

și înmulțind relația (1) cu (2) obținem:

$$\frac{AE \cdot AF}{FM \cdot ED} = \frac{2AB^2}{BC \cdot BD}$$

și cum

$$BD = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{\pm 2BC}.$$

(± după cum unghiul B este obtuz sau ascuțit), rezultă:

$$\frac{AE \cdot AF}{FM \cdot ED} = \frac{2AB^2}{BC \cdot BD} =$$

$$= \frac{2AB^2 \cdot 2BC}{BC \cdot AC^2 - AB^2 - BC^2} =$$

$$= \frac{4AB^2}{AC^2 - AB^2 - BC^2}.$$

Pentru cazul particular $A = 90°$ avem,

$$\frac{AF \cdot AE}{FM \cdot ED} = \frac{4AB^2}{AC^2 - AB^2 - (AB^2 + AC^2)} =$$

$$= \frac{4AB^2}{AC^2 - AB^2 - AB^2 - AC^2} = 2.$$

2.83. Într-un patrulater convex ortodiagonal $ABCD$, de laturi $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, să se stabilească relația:

$$a^2b^2(a^2 - b^2) + b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2d^2(c^2 - d^2) +$$
$$+ d^2a^2(d^2 - a^2) = 0.$$

Soluție. Să notăm cu O intersecția diagonalelor. Conform *teoremei lui Pitagora* generalizată avem:

$$a^2 = d^2 + BD^2 - 2BD \cdot OD$$
$$b^2 = c^2 + BD^2 - 2BD \cdot OD.$$

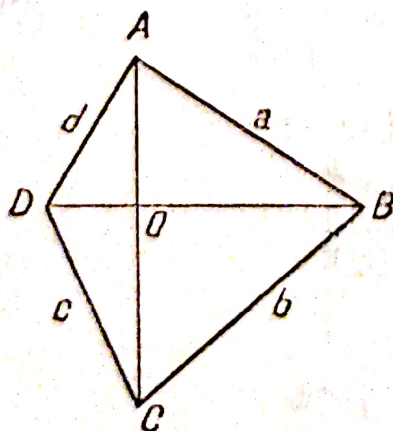


Fig. 2.83

Prin scădere, obținem:

$$a^2 - b^2 = d^2 - c^2$$

din care deducem:

$$b^2 - c^2 = a^2 - d^2;$$
$$c^2 - d^2 = b^2 - a^2;$$
$$d^2 - a^2 = c^2 - b^2.$$

Avem: $a^2b^2(a^2 - b^2) + b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2d^2(c^2 - d^2) + d^2a^2(d^2 -$

$-a^2) = a^2b^2(d^2 - c^2) + b^2c^2(a^2 - d^2) + c^2d^2(b^2 - a^2) + d^2a^2(c^2 - b^2) = a^2b^2d^2 - a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 - b^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 - a^2c^2d^2 + a^2c^2d^2 - a^2b^2d^2 = 0$, ceea ce era de demonstrat.

2.84. Se dă triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$, $\sphericalangle A = 20°$. Pe AC se ia un punct M astfel că $\sphericalangle MBA = 20°$, iar pe AB se ia un punct N astfel că $\sphericalangle NCA = 30°$. Se cere $\sphericalangle NMB$.

(Concurs, U.R.S.S.).

Soluție. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 80°$; $\sphericalangle BCN = 80° - 30° = 50°$; $\sphericalangle CBN = 180° - 80° - 50° = 50°$. Triunghiul BCN este isoscel $BC = BN$.

Ducem BE astfel că $\sphericalangle CBE = 20°$, $E \in AC$. $\Rightarrow$ Triunghiul BCE este isoscel $BC = BE$ dar $BC = BN \Rightarrow BE = BN$ dar $\sphericalangle NBE = 80° - 20° = 60°$, astfel că triunghiul NBE este echilateral.

$\sphericalangle BEM = 180 - 80° = 100°$, $\sphericalangle EBM = \sphericalangle EBN - 20° = 60° - 20° = 40°$. $\Rightarrow \sphericalangle EMB = 180° - 100° - 40° = 40°$, adică triunghiul BEM este isoscel. $BE = ME \Rightarrow BN = ME$, deci și triunghiul NME este isoscel $\Rightarrow \sphericalangle NME = 70°$;

$\Rightarrow \sphericalangle NMB = \sphericalangle NME - \sphericalangle BME = 70° - 40° = 30°$.

2.85. a). Dacă în triunghiul ABC mediana din A, bisectoarea din B și înălțimea din C sînt concurente, atunci între laturile triunghiului există relația:

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{2ac^2}{a + c}.$$

b). Dacă $c > a$, atunci între laturile triunghiului ce satisface condiția de la punctul a), există inegalitatea:

$$a < b < c.$$

(G.M.B., 9317, *I. Moiseev*).

Soluție. Pentru stabilirea relației, ne folosim de *relația lui Ceva* privind condiția necesară și suficientă ca trei drepte ce trec prin vîrfurile unui triunghi să fie concurente.

$$BM \cdot CN \cdot AP = MC \cdot NA \cdot PB. \qquad (1)$$

Segmentele BM, CN, AP, MC, NA, PB se calculează ținînd seama că dreptele AP, BN, CP sînt respectiv mediana, bisectoarea, înălțimea.

$$BM = \frac{a}{2}; \quad MC = \frac{a}{2}. \tag{2}$$

$$NC = \frac{a \cdot b}{a + c}; \quad NA = \frac{c \cdot b}{a + c}; \tag{3}$$

$$AP = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}; \quad BP = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \tag{4}$$

Înlocuind valorile segmentelor din relațiile (2), (3), (4) în relația (1) obținem:

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{a + c} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = \frac{a}{2} \cdot \frac{bc}{a + c} \cdot$$

$$\cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}. \tag{5}$$

Simplificînd relația (5) cu $\frac{ab}{4c(a + c)} \neq 0$ se obține:

$$a(b^2 + c^2 - a^2) = c(a^2 + c^2 - b^2), \tag{6}$$

$$ab^2 + ac^2 - a^2 = a^2c + c^2 - b^2c,$$

sau

$$ab^2 + b^2c = a^3 + c^3 + a^2c - ac^2 = b^2(a + c) =$$

$$= a^2(a + c) + c^3 + ac^2 - 2ac^2 = a^2(a + c) + c^2(a +$$

$$+ c) - 2ac^2 = (a^2 + c^2)(a + c) - 2ac^2,$$

de unde

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{2ac^2}{a + c}.$$

b). Pentru punctul b) ne folosim de relația stabilită

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{2ac^2}{a+c}. \qquad (7)$$

$$b^2 - a^2 = c^2 - \frac{2ac^2}{a+c} = \frac{ac^2 + c^3 - 2ac^2}{a+c} =$$

$$= \frac{c^3 - ac^2}{a+c} = c^2\frac{(c-a)}{a+c} = b^2 - c^2 = a^2 -$$

$$- \frac{2ac^2}{a+c} = \frac{a^3 + a^2c - 2ac^2}{a+c} =$$

$$= \frac{a^3 - ac^2 + a^2c - ac^2}{a+c} = \frac{a(a^2 - c^2) + ac(a-c)}{a+c} =$$

$$= \frac{(a-c)(a^2 + ac + ac)}{a+c} = \frac{(a-c)(a^2 + 2ac)}{a+c}.$$

Relația (7) se poate pune deci sub formele:

$$b^2 - a^2 = \frac{c^2(c-a)}{a+c}. \qquad (I)$$

$$b^2 - c^2 = \frac{(a-c)(a^2 + 2ac)}{a+c}. \qquad (II)$$

Dacă $c > a$, din (I) rezultă că $c - a > 0$ și deci $b^2 - a^2 > 0$.

Din (II) rezultă că $(a - c) < 0$ deci $b^2 - c^2 < 0$.

Prin urmare, dacă $c > a$, atunci rezultă: $b > a$ și $b < c$.

Deci avem îndeplinită inegalitatea: $a < b < c$.

2.86. Se dă paralelogramul $ABCD$ și un punct E pe latura AB. Trei paralele duse prin A, B, C întîlnesc dreapta DE respectiv în M, N, P.

a). Să se demonstreze că $MN = DP$.

b). Fie Q intersecția paralelei duse din N la AD cu dreapta CP. Să se arate că $PQ = AM$.

c). Se cere locul geometric al punctului Q, cînd AM, BN, CP se rotesc respectiv în jurul punctelor A, B, C, rămînînd paralele între ele.

Soluție. a). Triunghiurile AME, BNE, CPD sînt asemenea între ele avînd cîte două unghiuri egale

$$\sphericalangle MAE = \sphericalangle NBE = \sphericalangle PCD = \sphericalangle BNE = \sphericalangle CDP.$$

Rezultă

$$\frac{ME}{AE} = \frac{EN}{EB} = \frac{ME + EN}{AE + EB} = \frac{MN}{AB}, \text{ iar } \frac{ME}{AE} = $$
$$= \frac{DP}{CD} \text{ și } AB = CD,$$

deci $\frac{MN}{AB} = \frac{DP}{CD}$ sau $MN = DP$.

b). De asemenea,

$$\frac{ME}{AM} = \frac{EN}{BN} = \frac{MN}{AM + BN}; \quad \frac{ME}{AM} = \frac{DP}{CP},$$

deci

$$\frac{MN}{AM + BN} = \frac{DP}{CP}, \text{ însă } MN = DP,$$

prin urmare

$$AM + BN = CP = CQ + QP = BN + QP,$$

deci

$$AM = QP.$$

c). Patrulaterul $CBNQ$ fiind paralelogram, $NQ \parallel BC$ și $NQ = BC$.

Cînd dreptele paralele BN, CP se rotesc, atunci NQ ia o mișcare de translație și deci locul lui Q este pe o paralelă la dreapta fixă DE.

2.87. În triunghiul oarecare ABC se duc dreptele concurente AA', BB', CC' astfel încît AA' și BB' sînt respectiv mediană și bisectoare în triunghiul considerat. Să se construiască grafic triunghiul ABC cunoscîndu-se triunghiul $A'B'C'$.

Soluție. Aplicînd *teorema lui Ceva* în triunghiul ABC, obținem

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AC'}{C'B}$$

deci, $B'C \parallel BC$ și triunghiul $BC'B'$ este isoscel. Ducem cercul cu centrul în C' și de rază $C'B'$. Ținînd seama de aceste observații, construcția triunghiului este următoarea:

Cercul intersectează paralela la $B'C'$ dusă prin A' în B; intersectînd BC' cu mediana triunghiului $A'B'C'$ referitoare la vîrful A', obținem vîrul A, iar C este situat la intersecția dreptelor BA', AB'. Construcția este totdeauna posibilă.

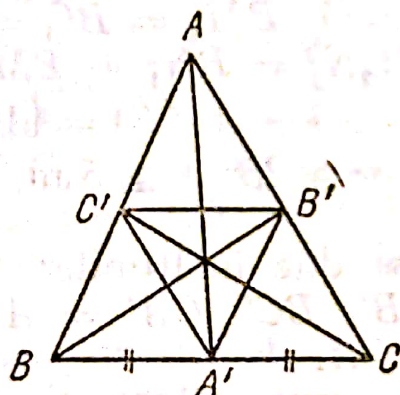


Fig. 2.87

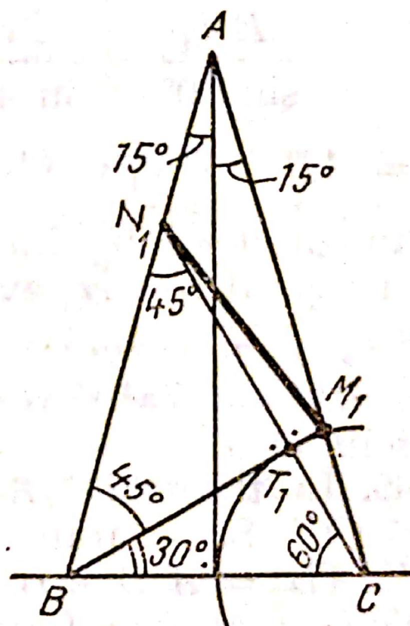


Fig. 2.88

2.88. Într-un triunghi isoscel ABC, $AB = AC$, $\sphericalangle A = 30°$. Din C ca centru se descrie un cerc cu raza $\frac{BC}{2}$. Se duc tangentele BT_1 și BT_2 la cerc. Notăm $M_1 = BT_1 \cap AC$, $N_1 = CT_1 \cap AB$, $M_2 = BT_2 \cap AC$ și $N_2 = CT_2 \cap AB$.

Cunoscîndu-se $M_1N_1 = 8{,}78$ m $< M_2N_2$ să se calculeze BC.

(G.M.B., 12995, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Notăm $BC = 2x$ și avem $R = x$, $AB \cos 75° = x$.

$$x = \frac{1}{4} AB(\sqrt{6} - \sqrt{2}); \quad AB = \frac{4x}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = $$
$$= (\sqrt{6} + \sqrt{2})\, x.$$

Mai avem

$$BC = 2CT_1; \quad \sphericalangle CBT_1 = 30°; \quad \sphericalangle BCT_1 = 60°,$$
$$\sphericalangle M_1BN_1 = 45°, \; \sphericalangle BN_1C = 45°; \; \sphericalangle BM_1C = 75°,$$
$$\sphericalangle CN_1M_1 = 15°.$$

Din triunghiul BN_1C avem:

$$\frac{BN_1}{\sin 60°} = \frac{2x}{\sin 45°}; \quad BN_1 = x\sqrt{6}.$$

$$AN_1 = AB - BN_1 = (\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{6})x = x\sqrt{2}.$$

Triunghiul CBM_1 fiind isoscel, $BM_1 = BC = 2x$. Din triunghiul BM_1N_1 avem $M_1N_1^2 = BN_1^2 + BM_1^2 - 2BN_1 \cdot BM_1 \cos 45° = x^2(6 + 4 - 4\sqrt{3}) = (10 - 4\sqrt{3})x^2 = 8{,}78^2$ și rezultă $x^2 \cong 25$; $x \cong 5$ m, deci $BC \cong 10$ m.

2.89. În triunghiul ABC se duc înălțimile: AA', BB' și CC'. Să se arate că $AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot AB' = A'B' \cdot B'C' \cdot C'A$.

Soluție. Înălțimile fiind concurente, din *teorema lui Ceva* rezultă că:

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB'. \qquad (1)$$

Dreptele $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ fiind antiparalele laturilor c, a, b rezultă:

$$A'B' = \frac{c}{a} \cdot CB'; \quad B'C' = \frac{a}{b} \cdot AC'; \quad A'C' = \frac{b}{c} \cdot BA'.$$

Prin înmulțire rezultă

$$A'B' \cdot B'C' \cdot C'A' = AC' \cdot BA' \cdot CB'. \qquad (2)$$

Comparînd (1) cu (2) rezultă relația din enunț.

2.90. Fie ABC un triunghi, $A'B'C'$ triunghiul său median și $A'X$, $B'Y$, $C'Z$ trei ceviene concurente în triunghiul median. Să se arate că AX, BY, CZ sînt de asemenea concurente (enunț generalizat).

(G.M.B., 7215, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Dreapta AX taie în X_1 pe BC, BY taie CA în Y_1, CZ taie AB în Z_1; deoarece $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$, $AB \parallel A'B'$, avem:

$$\frac{BX_1}{X_1C} \cdot \frac{CY_1}{Y_1A} \cdot \frac{AZ_1}{Z_1B} = \frac{C'X}{XB'} \cdot \frac{A'Y}{YC'} \cdot \frac{B'Z}{ZA'} =$$

$$= \left(\frac{B'X}{XC'} \cdot \frac{C'Y}{YA'} \cdot \frac{A'Z}{ZB'}\right)^{-1} = 1,$$

deci AX, BY, CZ sînt concurente.

2.91. Pe o dreaptă (D) se găsesc următoarele puncte: B și C extremitățile segmentului BC, ipotenuză în triunghiul dreptunghic ABC; B_1 și C_1 intersecțiile paralelelor duse din A la bisectoarele unghiurilor din B și C; A_1 și A_2 picioarele bisectoarelor din A în triunghiurile ABC și AB_1C_1. Notînd $AB_1 = m$, $AC_1 = n$ și cu a, b, c laturile triunghiului ABC să se arate că:

a). punctul A_1 împarte segmentele BC și B_1C_1 în același raport;

b). punctele A_1 și A_2 împart segmentul B_1C_1 în două rapoarte k_1 și k_2 care satisfac egalitatea

$$\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{a+b}{a+c}};$$

c). avem relația $\sqrt{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{m^2+n^2}} = R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

(G.M.B., 5234, *Gh. Bazacov*).

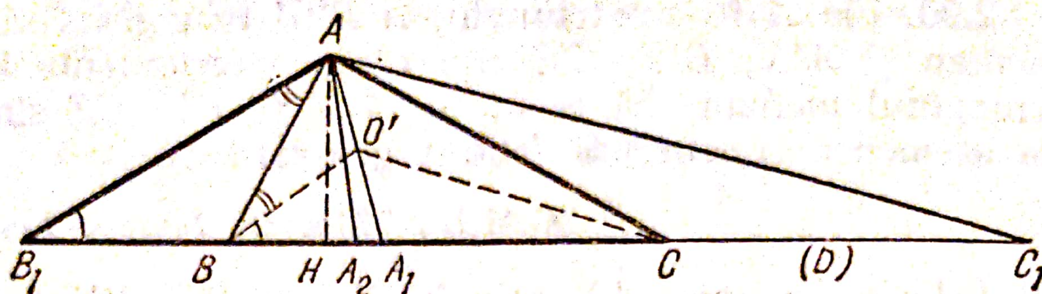


Fig. 2.91

Soluție. a). Punctul A_1 fiind piciorul bisectoarei din A al triunghiul ABC, împarte latura BC în raportul

$$k_1 = \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b}. \tag{1}$$

Triunghiul ABB_1 este isoscel, avînd unghiurile din B_1 și A egale. Tot astfel și triunghiul ACC_1 este isoscel. Putem scrie că $BB_1 = AB = c$ și $CC_1 = AC = b$. Atunci:

$$\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_1B + c}{A_1C + b} = \frac{c}{b} = k_1$$

și

$$A_1B = \frac{ac}{b + c}, \quad A_1C = \frac{ab}{b + c}.$$

b). Punctul A_2 fiind piciorul bisectoarei unghiului A în triunghiul AB_1C_1, împarte latura B_1C_1 în raportul:

$$k_2 = \frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{AB_1}{AC_1}.$$

Ducînd înălțimea AH putem scrie:

$$AB_1^2 = AH^2 + B_1H^2 = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{a} + c\right)^2;$$

sau ținînd seama că $b^2 + c^2 = a^2$,

$$AB_1^2 = \frac{2c^2}{a}(a + c). \tag{2}$$

Analog se arată că:

$$AC_1^2 = \frac{2b^2}{a}(a + b). \qquad (3)$$

Deci:

$$k_2^2 = \frac{AB_1^2}{AC_1^2} = \frac{2c^2}{a}(a + c) : \frac{2b^2}{a}(a + b) = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a + c}{a + b}.$$

Conform cu (1) rezultă

$$k_2^2 = k_1^2 \frac{a + c}{a + b}$$

de unde

$$\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{a + b}{a + c}}.$$

c). Adunînd relațiile (2) și (3) obținem:

$$AB_1^2 + AC_1^2 = \frac{2c^2}{a}(a + c) + \frac{2b^2}{a}(a + b) =$$

$$= \frac{2}{a}[a(b^2 + c^2) + b^3 + c^3] = \frac{2}{a}(a^3 + b^3 + c^3),$$

de unde, cu notațiile problemei

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{m^2 + n^2} = \frac{a}{2},$$

cum $\frac{a}{2} = R$ demonstrează relația din enunț:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{m^2 + n^2} = R.$$

Dacă A se mișcă pe cercul cu diametrul $BC = a$, atunci raportul $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{m^2 + n^2}$ își păstrează o valoare constantă.

2.92. Dacă într-un patrulater convex oarecare $ABCD$ notăm cu E, F, G, H mijloacele laturilor AB, BC și respectiv CD și DA; cu $M = (CH; AG)$, $N = (DF; BG)$, $P = (PH; DE)$ și $Q(AF; CE)$, între laturile a, b, c, d ale patrulaterului $ABCD$ și m, n, p, q, și laturile patrulaterului $MNPQ$ există relația:

$$\frac{abcd}{mnpq} = 81.$$

(G.M.F.B., 2396, *G. Baltag*).

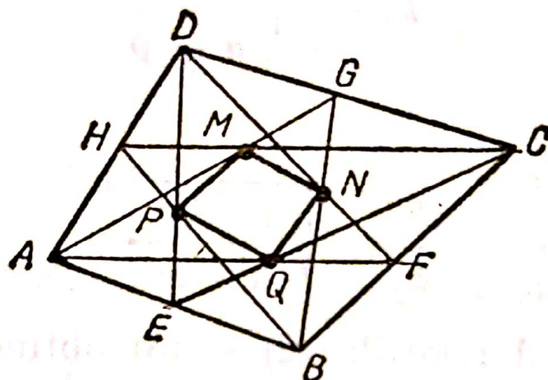


Fig. 2.92

Soluție. Aplicînd *teorema lui Menelaus* în triunghiul AGD cu transversala HMC și în triunghiul BGC cu transversala DNF, avem:

$$\frac{HA}{HD} \cdot \frac{MG}{MA} \cdot \frac{CD}{CG} = 1$$

și

$$\frac{FC}{FB} \cdot \frac{NB}{NG} \cdot \frac{DG}{DC} = 1.$$

Ținînd seama de condițiile problemei avem:

$$\frac{MA}{MG} = 2 \text{ și } \frac{NB}{NG} = 2$$

de unde

$$\frac{GA}{GM} = \frac{GB}{GN} = \frac{a}{m} = 3.$$

Analog,

$$\frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \frac{d}{a} = 3$$

şi rezultă $\dfrac{abcd}{mnpq} = 81.$

2.93. Se consideră triunghiul ABC în care P este intersecţia cevienelor AA_1, BB_1, CC_1, iar M un punct oarecare pe dreapta AA_1. Fie punctele: $N = (BC \cap \cap MC_1)$; $Q = (BC \cap MB_1)$. Paralelele duse prin N şi Q la AA_1 întîlnesc laturile AB, AC respectiv în R şi S. Să se arate că dreptele AA_1, BS şi CR sînt concurente.

(G.M.F.B., 3488, *St. Gruian*).

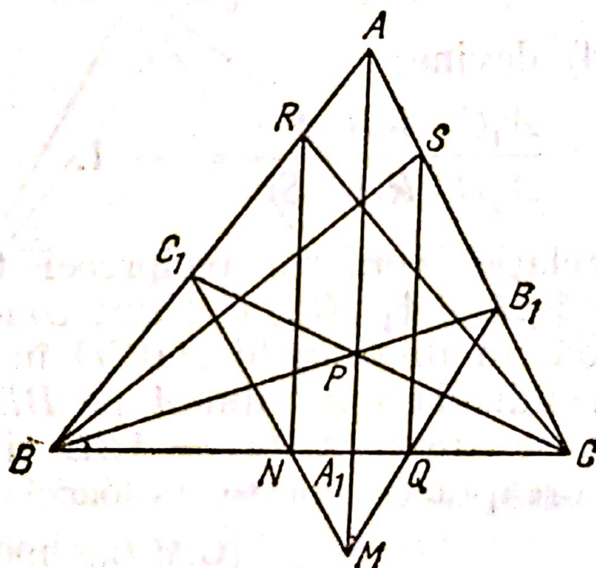


Fig. 2.93

Soluţie. Conform *teoremei lui Menelaus*, în triunghiul ABA_1 tăiat de transversala C_1NM şi triunghiul ACA_1 tăiat de transversala B_1QM, avem

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{NB}{NA_1} \cdot \frac{MA_1}{MA} = 1 \qquad (1)$$

şi

$$\frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{MA}{MA_1} \cdot \frac{QA_1}{QC} = 1. \qquad (2)$$

Teorema lui Ceva aplicată cevienelor AA_1, BB_1, CC_1 în raport cu triunghiul ABC, ne dă:

$$\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}=-1. \quad (3)$$

Înmulțind parte cu parte relațiile (1), (2) și (3) deducem după simplificări:

$$\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{NB}{NA_1}\cdot\frac{QA_1}{QC}=-1. \quad (4)$$

Laturile unghiurilor ABC și ACB fiind tăiate de paralelele AA_1, NR, respectiv AA_1, QS, avem:

$$\frac{NB}{NA_1}=\frac{RB}{RA} \text{ și } \frac{QA_1}{QC}=\frac{SA}{SC}.$$

Relația (4) devine:

$$\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{RB}{RA}\cdot\frac{SA}{SC}=-1.$$

Această relație, conform reciprocei teoremei lui Ceva, ne arată că AA_1, BS, CR sînt concurente.

2.94. Se dă un dreptunghi $ABCD$ în care $BC = 2AB$. Perpendiculara AO din A pe BD taie latura BC în E. Să se arate că $BC = 4BE$ și că punctul O se află pe dreapta ce unește mijloacele BE și AD.

(G.M.B., 1964, pag. 88).

Soluție. a). Triunghiurile dreptunghice BAE și CBD sînt asemenea, deci $\frac{BE}{CD}=\frac{BA}{BC}$ sau $\frac{BE}{BA}=\frac{BA}{BC}$;

$$BE=\frac{BA^2}{BC}=\frac{\frac{BC^2}{2}}{BC}=\frac{BC}{4};$$

deci $BC = 4BE$.

b). În triunghiul dreptunghic OBE, punctul N este mijlocul lui BE și deci mediana $ON=\frac{BE}{2}=BN$

de unde $\sphericalangle NOB = \sphericalangle NBO$. La fel în triunghiul dreptunghic ODA avem $\sphericalangle MOD = \sphericalangle MDO$. În dreptunghiul $ABCD$ avem $\sphericalangle NBO = \sphericalangle MDO$, deci $\sphericalangle NOB = \sphericalangle MOD$, dar cum OB este în prelungirea lui OD iar M și N de o parte și alta a dreptei BD rezultă că N, O, M sînt pe aceeași dreaptă.

2.95. Într-un triunghi ascuțitunghic ABC se consideră punctele A_1, B_1, C_1 pe laturile BC, CA, AB astfel ca punctele de intersecție $D = (AA_1 \cap BB_1)$, $E = (BB_1 \cap CC_1)$, $F = (CC_1 \cap AA_1)$ să fie vîrfurile unui triunghi echilateral. Să se arate că

$$\frac{AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1}{B_1C \cdot A_1B \cdot C_1A} = \frac{AD}{AF} \cdot \frac{BE}{BD} \cdot \frac{CF}{CE}.$$

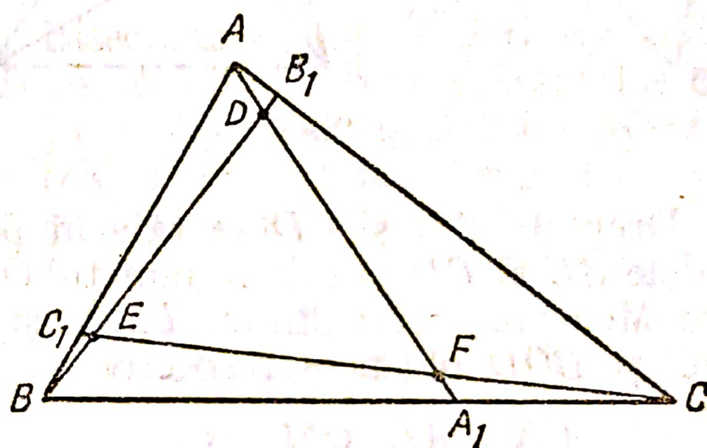


Fig. 2.95

Soluție. Aplicînd *teorema lui Menelaus* triunghiului ACF și transversalei BB_1, avem:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{EC}{EF} \cdot \frac{DF}{DA} = 1$$

sau deoarece $EF = DF$;

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AD}{CE}.$$

Analog deducem

$$\frac{CA_1}{B_1C} = \frac{CF}{BD} \quad \text{și} \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BE}{AF}$$

care înmulțite dau relația din enunț.

2.96. Într-un patrulater $ABCD$, o dreaptă variabilă ce trece prin punctul comun diagonalelor AC și BD taie laturile AB și CD în punctele M și N. Să se arate că:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \text{constant}.$$

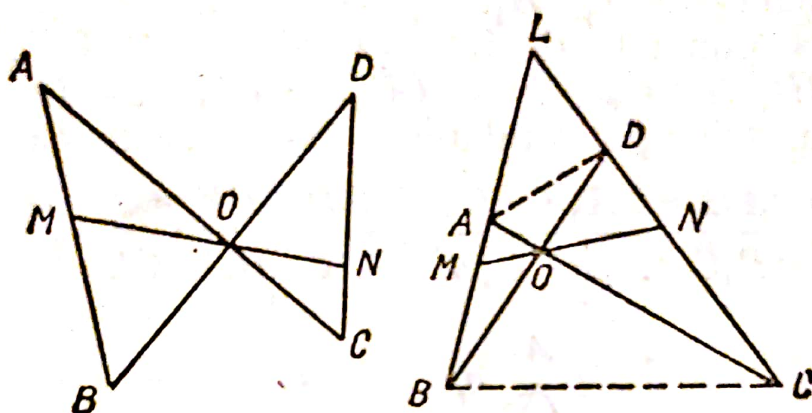


Fig. 2.96

Soluție. Dreptele AB și CD se taie în punctul L, iar diagonalele AC și BD se taie în punctul O. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului LMN și transversalelor AOC și BOD obținem respectiv

$$\frac{CN}{CL} \cdot \frac{AL}{AM} \cdot \frac{OM}{ON} = 1;$$

$$\frac{BM}{BL} \cdot \frac{DL}{DN} \cdot \frac{ON}{OM} = 1$$

relații care înmulțite dau:

$$\frac{BM}{BL} \cdot \frac{DL}{DN} \cdot \frac{CN}{CL} \cdot \frac{AL}{AM} = 1,$$

sau

$$\frac{BM}{AM} \cdot \frac{CN}{DN} = \frac{BL}{AL} \cdot \frac{CL}{DL}$$

de unde rezultă relația din enunț

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} \cdot \frac{LA}{LB} \cdot \frac{LD}{LC} = \text{constant}.$$

2.97. Bisectoarea unghiului A din paralelogramul $ABCD$ întîlnește diagonala BD în Q și latura BC în T. Fie un punct oarecare P pe segmentul QT. Dreptele BP și DP întîlnesc laturile DC și BC în M respectiv N. Să se demonstreze că $BN = DM$.

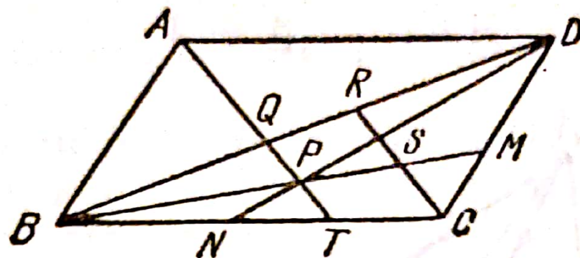


Fig. 2.97

Soluție. Bisectoarea unghiului C intersectează diagonala BD în R, iar intersecția dreptelor CR și BM se notează cu S. Aplicînd *teorema lui Menelaus* triunghiurilor CDR și BQT tăiate respectiv de transversalele BM și DN, obținem:

$$\frac{SR}{SC} \cdot \frac{BD}{BR} \cdot \frac{MC}{MD} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{PT}{PQ} \cdot \frac{DQ}{DB} \cdot \frac{NB}{NT} = 1. \qquad (2)$$

Înmulțind relațiile (1) cu (2) membru cu membru și ținînd seama că avem $\frac{SR}{SC} = \frac{PQ}{PT}$ obținem $\frac{MC}{MD} = \frac{NT}{NB}$.

Dar $DC = BT$, deci rezultă că $MD = NB$.

2.98. Fie AA_1, BB_1, CC_1 cevienele unui punct M în raport cu triunghiul ABC. Dacă notăm cu A_2, B_2, C_2 intersecțiile cevienelor AA_1, BB_1, CC_1 cu segmentele B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, iar

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \alpha, \quad \frac{CB_1}{A_1C} = \beta, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \gamma.$$

Să se demonstreze relațiile:

$$\frac{C_1B_2}{B_2A_1} = \frac{\gamma(\alpha+1)}{\gamma+1}; \quad \frac{A_1C_2}{C_2B_1} = \frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+1};$$

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{\beta(\gamma+1)}{\beta+1}.$$

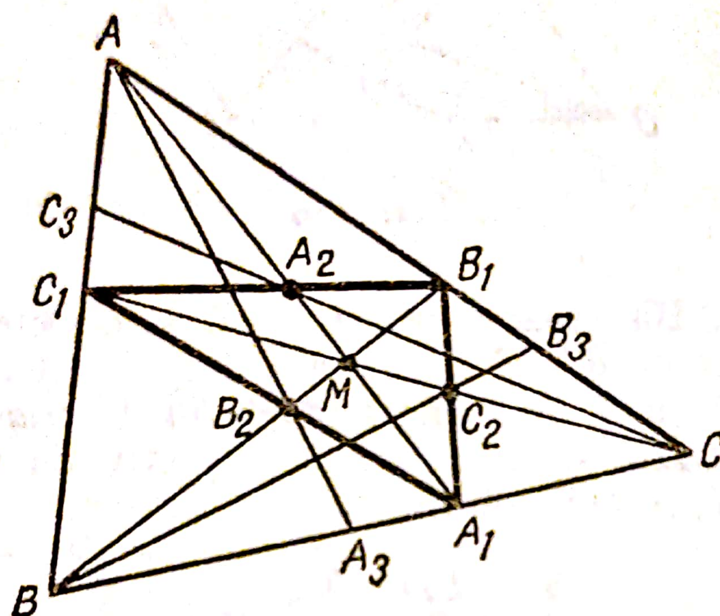


Fig. 2.98

Soluție. Dreptele AB_2, BC_2, CA_2 intersectează laturile BC, CA, AB în punctele A_3, B_3, C_3. În patrulaterul complet $AC_1B_2MBA_1$ diagonala BC este împărțită armonic de celelalte două:

$$\frac{A_3A_1}{BA_3} = \frac{A_1C}{BC} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Conform *teoremei lui Menelaus*, din triunghiul A_1BC_1 cu transversala AB_2A_3 avem:

$$\frac{A_1A_3}{A_3B}\cdot\frac{C_1B_2}{B_2A_1}\cdot\frac{AB}{AC_1} = 1 \quad \text{și} \quad \frac{AB}{AC_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma}.$$

Din *relația lui Menelaus* avem:

$$\frac{C_1B_2}{B_2A_1} = \frac{A_3B}{A_1A_3}\cdot\frac{AC_1}{AB} \quad \text{sau} \quad \frac{C_1B_2}{B_2A_1} = \frac{\gamma(\alpha+1)}{\gamma+1}.$$

Prin permutări circulare obținem și celelalte relații:

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1} = \frac{\alpha(\beta + 1)}{\alpha + 1}; \quad \frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{\beta(\gamma + 1)}{\beta + 1}.$$

Observare. Făcînd produsul acestor rapoarte, observăm că ele verifică *teorema lui Ceva* (ținînd seama că $\alpha\beta\gamma = 1$).

2.99. Fie un punct O pe linia mijlocie corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC. Dreptele BO și CO taie laturile AC și AB în B' și C'. Să se arate că aria $B'AC' = 2$ aria $B'OC'$.

Soluție. Avem:

$$\frac{\text{aria } AB'C'}{\text{aria } ABC} = \frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC} \quad \text{și} \quad \frac{\text{aria } B'OC}{\text{aria } BOC} = \frac{B'O \cdot C'O}{BO \cdot CO}.$$

Cum aria $BOC = \frac{1}{2}$ aria ABC rămîne, pentru a demonstra relația cerută, să arătăm că:

$$\frac{BB' \cdot AC'}{AB \cdot AC} = \frac{B'O \cdot C'O}{BO \cdot CO}. \tag{1}$$

Scriem *relația lui Menelaus* pentru triunghiul ACC' și transversala BOB':

$$\frac{C'O}{CO} \cdot \frac{B'C}{AB'} \cdot \frac{AB}{BC'} = 1. \tag{2}$$

Aplicînd *teorema lui Menelaus* pentru triunghiul ABB' și transversalei COC', avem:

$$\frac{B'O}{BO} \cdot \frac{B'C}{AC'} \cdot \frac{AC}{B'C} = 1. \tag{13}$$

Prin înmulțirea relațiilor (2) și (3) obținem tocmai relația (1) și deci, implicit avem: aria $AB'C' = 2$ aria $B'OC'$.

2.100. Fie două drepte d și d' în același plan, trei puncte fixe A, B, C pe dreapta d și un punct mobil

M pe dreapta d'. Paralelele duse prin C la AM și BM intersectează respectiv pe BM și AM în punctele P și R, care descriu drepte paralele cu d'. Să se arate că intersecția Q a dreptelor CM și PR descrie de asemenea o paralelă cu d'.

(R.M.T., 60, 1937, *C. Ionescu-Țiu*).

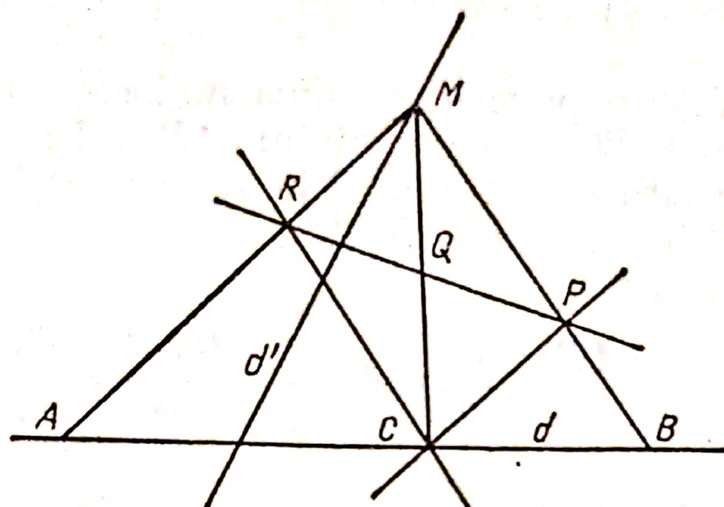


Fig. 2.100

Soluție. Punctul Q din intersecția diagonalelor paralelogramului $MPCR$, este mijlocul segmentului MC; C fiind fix iar M descrie pe d', Q descrie o paralelă la d'.

Din asemănarea perechilor de triunghiuri ABM, CBP și ABM, ACR rezultă că:

$$\frac{BM}{BP} = \frac{AB}{BC} = \text{const.}, \quad \frac{AM}{AR} = \frac{AB}{AC} = \text{const.},$$

de unde mai rezultă că și P și R descriu paralele la d'.

2.101. În triunghiul ABC se iau pe latura BC de la B către C în ordine, punctul M, apoi N. Paralela dusă prin M la AB taie pe AC în M_1 iar paralela dusă prin N la AC taie pe AB în N_1. Să se găsească locul geometric al intersecției dreptelor MN_1 și NM_1 știind că raportul $BN : CM$ rămîne constant.

(G.M.B., 9373, *I. Strătescu*).

Soluție. Notăm cu P intersecția dreptelor MN_1 și NM_1. Dreapta PA taie pe BC în punctul S.

Notăm

$$\frac{BN}{BM} = k. \qquad (1)$$

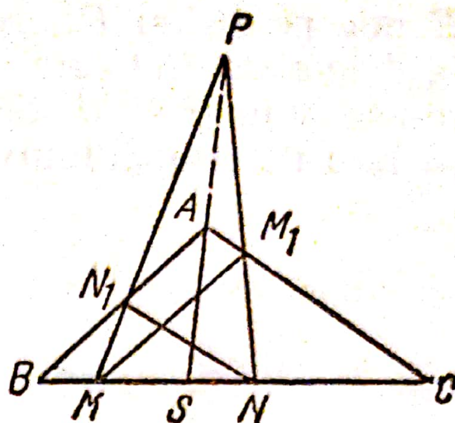


Fig. 2.101

Teorema lui Menelaus aplicată triunghiului ABC tăiat de dreapta MN_1 ne dă:

$$\frac{BM}{SM} \cdot \frac{AN_1}{CM_1} \cdot \frac{PS}{PA} = +1. \qquad (2)$$

Teorema lui Menelaus aplicată triunghiului ACS tăiat de dreapta NM_1 dă:

$$\frac{CN}{SN} \cdot \frac{AM_1}{CM_1} \cdot \frac{PS}{PA} = +1. \qquad (3)$$

Dar, cum dreptele NN_1 și AC sînt paralele, mai avem:

$$\frac{AN_1}{BN_1} = \frac{CN}{BN}. \qquad (4)$$

Dreptele paralele MM_1 și AB ne dau:

$$\frac{AM_1}{CM_1} = \frac{BM}{CM}. \qquad (5)$$

Împărțind relațiile (2) la (3) și ținînd seama de (4) și (5) obținem:

$$\frac{SN \cdot CM}{SM \cdot BN} = 1, \quad \text{sau} \quad \frac{SN}{SM} = \frac{BN}{CM} = \frac{BN - SN}{CM - SM} = \frac{BS}{CS}$$

și ținînd seama de (1) obținem: $\frac{BS}{CS} = k =$ constant, deci S este un punct fix.

Locul lui P este dreapta AS fixă — determinată de punctele fixe A și S.

2.102. Fie $ABCD$ un trapez oarecare. Să notăm cu E mijlocul bazei mari DC și cu F mijlocul bazei mici AB. Paralela la diagonala AC care trece prin

E taie pe BC și BD respectiv în N și G, iar paralela la diagonala BD care trece prin E taie pe AC și AD respectiv în H și M. Să se arate că punctele G, H sînt pe laturile triunghiului FMN.

(G.M.B., 3511, *Stelian Lambă*).

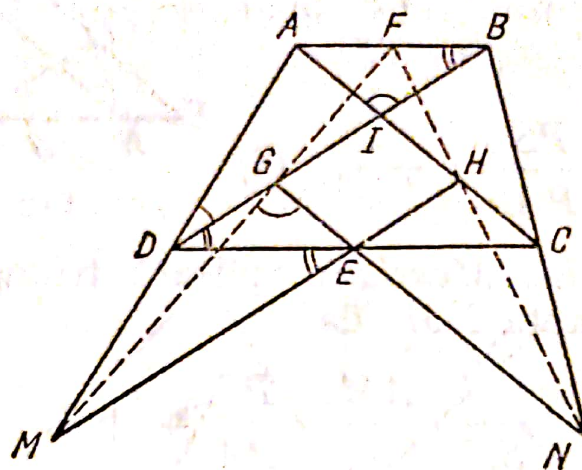


Fig. 2.102

Soluție. Să numim I intersecția diagonalelor AC și BD. Triunghiurile asemenea ABD și DEM, ABI și DEG, dau:

$$\frac{MD}{DA} = \frac{DE}{AB} \quad \text{și} \quad \frac{DE}{AB} = \frac{GD}{BI}$$

deci

$$\frac{MD}{DA} = \frac{GD}{BI}$$

proporție în care aplicînd o proprietate cunoscută scriem:

$$\frac{MD}{MD + DA} = \frac{GD}{BI + GD},$$

deci

$$\frac{MD}{MA} = \frac{GD}{BG}; \quad \frac{MD}{MA} \cdot \frac{BG}{GD} = 1.$$

(E fiind mijlocul lui DC și $EG \parallel AC$, avem $IG = GD$.)

Întrucît $\frac{AF}{FB} = 1$, putem scrie:

$$\frac{MD}{MA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BG}{GD} = 1$$

și în virtutea reciprocei *teoremei lui Menelaus*, punctele M, G, F sînt coliniare.

În același fel, se arată că punctele N, H, F sînt coliniare.

2.103. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare și A_1, B_1, C_1, D_1 mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Fie A', B', C', D' respectiv mijloacele segmentelor B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1B_1. Să se arate că intersecțiile dreptelor (AA', CC') și (BB', DD') se află pe segmentul MH (unind mijloacele diagonalelor), împărțindu-l pe MH în 3 părți egale.

(G.M.B., 8724, Ș. *Bărcănescu*).

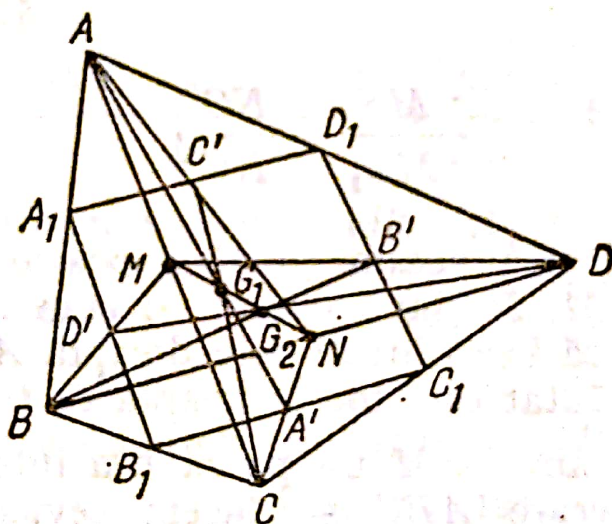


Fig. 2.103

Soluție. Fie H mijlocul lui BD și M al lui AC. Dreapta CH, mediană în triunghiul BCD, trece prin mijlocul A' al liniei mijlocii B_1C_1. Conform *teoremei lui Tales*, $CA' = A'H$. Analog, $C'A = C'H$. Deci, în triunghiul AHC, CC' și AA' sînt mediane, deci se taie pe MH, la o treime din MH de M.

Considerînd triunghiul BMD, analog BB' și DD' sînt mediane, deci se taie pe MH la o treime de H.

Notînd $(AA' \cap CC') = G_1$ și $(BB' \cap DD') = G_2$, rezultă $G_1M = G_1N = \frac{1}{3}\ MH$, de unde $M_1G = G_1G_2 = G_2H$.

2.104. Trei drepte concurente în O intersectează o a patra dreaptă ce nu trece prin O, în punctele A, B, C. Prin S, un punct oarecare al dreptei OA, ducem drepte paralele la OB și OC care intersectează dreapta ABC în B_1 și C_1.

Să se găsească locurile geometrice ale picioarelor bisectoarelor din B_1 și C_1 ale triunghiului SB_1C_1.

Soluție. Fie N piciorul bisectoarei din B al triunghiului OBC, iar M piciorul bisectoarei din B_1 al triunghiului SB_1C_1. Atunci putem scrie:

$$\frac{MS}{MC_1} = \frac{B_1S}{B_1C_1} = \frac{BO}{BC} = \frac{NO}{NC}$$

adică

$$\frac{MS}{MC_1} = \frac{NO}{NC}.$$

Din egalitatea acestor două rapoarte rezultă că punctele A, M, N sînt coliniare și cum A și N sînt fixe, rezultă că locul lui M este dreapta AN. Analog, celălalt loc căutat este tot o dreaptă ce trece prin C.

2.105. Notăm cu M un punct din interiorul unui triunghi oarecare ABC și ducem cevienele AMD, BME și CMF. Să se arate că:

$$\frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} + \frac{MF}{CF} = 1.$$

Soluție. Paralela dusă prin M la BC taie laturile AB și AC respectiv în L și I, paralela dusă tot prin M la AC taie laturile BC și AB în O și Q, iar paralela la AB dusă tot prin M taie laturile BC și AC respectiv în R și E.

Avem: $\frac{MD}{AD} = \frac{IC}{AC}$. Paralela dusă prin I la AB taie latura BC în punctul P şi avem:

$$\frac{IC}{AC} = \frac{PC}{BC} \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{PC}{BC};$$

De asemenea

$$\frac{ME}{BE} = \frac{OC}{BC} \text{ şi } \frac{MF}{CF} = \frac{BR}{BC}.$$

Ţinînd seama de ultimele trei egalităţi, relaţia din enunţ se mai scrie

$$\frac{PC}{BC} + \frac{OC}{BC} = \frac{BR}{BC} = 1.$$

Ţinînd seama de egalitatea triunghiurilor OMR şi CIP, rezultă $PC = RO$ şi deci relaţia precedentă devine evidentă

$$\frac{RO + OC + BR}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$

2.106. Într-un triunghi ABC, A_1 şi B_1 fiind picioarele înălţimilor duse respectiv din A şi B se ia pe dreapta BC punctul D astfel că:

$$B_1A \cdot AC = A_1D \cdot BC.$$

Să se arate că unghiurile BAC şi ADC sînt egale.

(R.M.F., 220, 1951, *C. Ionescu-Ţiu*).

Soluţie. Relaţia din enunţ devine:

$$\frac{B_1A}{A_1D} = \frac{BC}{AC}.$$

Triunghiurile dreptunghice BB_1C şi AA_1C sînt asemenea, deci

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BB_1}{AA_1} \Rightarrow \frac{B_1A}{A_1D} = \frac{BB_1}{AA_1};$$

care atrage asemănarea triunghiurilor dreptunghice AB_1B și AA_1D, de unde rezultă $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADC$.

2.107. Ducem medianele AM, BN, CP într-un triunghi oarecare ABC. Din A, B, C ducem perpendicularele $AA_1 = AM$, $BB_1 = BN$, $CC_1 = CP$ respectiv pe cele trei mediane în același sens de parcurs. Să se arate că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt asemenea și au același centru de greutate G.

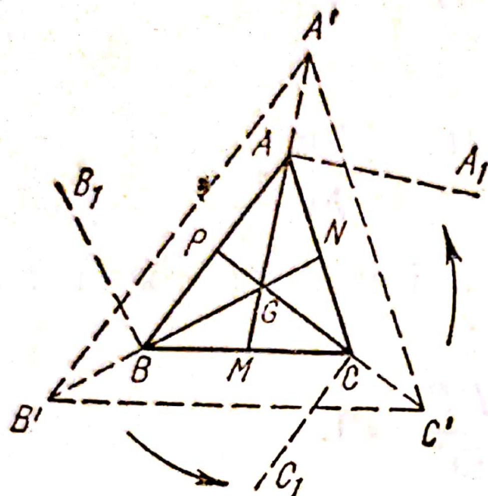


Fig. 2.107

Soluție. Se observă imediat că triunghiurile GAA_1, GBB_1, GCC_1 sînt asemenea. Rotind triunghiul $A_1B_1C_1$ în jurul punctului G de unghiul $BGB_1 = \sphericalangle CGC_1 = \sphericalangle AGA_1$ în sensul trigonometric, punctele $A_1B_1C_1$ se vor plasa pe prelungirile medianelor MA, NB, PC în A', B', C'. Vom avea egalitatea triunghiurilor $A'B'C'$ și $A_1B_1C_1$. Întrucît:

$$\frac{A'G}{AG} = \frac{B'G}{GB} = \frac{C'G}{GC}$$

triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt omotetice, deci triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt asemenea.

Totodată am demonstrat că G este centrul dublu al triunghiurilor ABC, $A_1B_1C_1$. El este deci și în triunghiul $A_1B_1C_1$ centrul de greutate.

2.108. Să se arate că dreptele ce trec prin vîrfurile unui triunghi și respectiv picioarele înălțimilor triunghiului său median (format de picioarele medianelor) sînt concurente.

(G.M.B., 13223, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor, iar $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ înălțimile triunghiului $A'B'C'$. Dreptele AA'', BB'', CC'' întîlnesc pe BC, CA, AB respectiv în A''', B''', C'''.

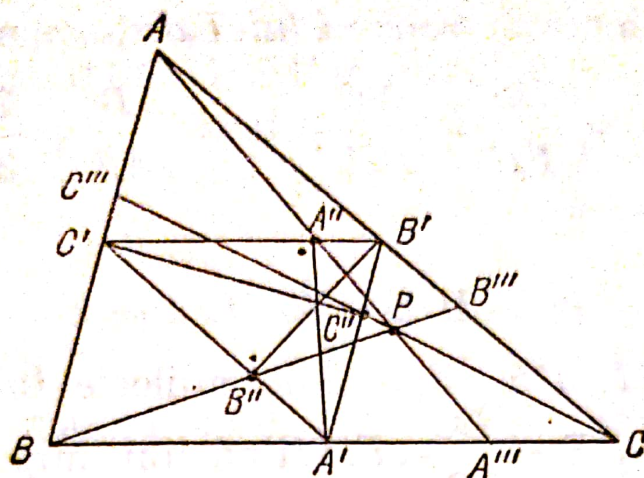


Fig. 2.108

Avem $B'C' \parallel BC$

$$\Rightarrow \frac{A''C'}{A''B'} = \frac{BA''}{A'''C}.$$

Dar $A''C' = A'B' \cos C = \frac{b}{2} \cos C$; $A''B' = \frac{c}{2} \cos B$,

$$\frac{A''C'}{A''B'} = \frac{b \cos C}{c \cos B}.$$

Analog avem:

$$\frac{C''B'}{C''A'} = \frac{a \cos B}{b \cos A} \text{ și } \frac{B''A'}{B''C} = \frac{c \cos A}{a \cos C}.$$

$$\Rightarrow \frac{A''C'}{A''B'} \cdot \frac{C''B'}{C''A'} \cdot \frac{B''A'}{B''C'} = 1$$

conform reciprocei *teoremei lui Ceva*.

2.109. În triunghiul oarecare ABC se notează cu D mijlocul lui AB și cu F mijlocul lui DB. Paralelele duse prin D și F la BC taie pe AC respectiv în E și H. Să se arate că $3DE = 2FH$.

Soluție. Conform *teoremei lui Tales*, avem:

$$\frac{AD}{AF}=\frac{DE}{FH}=\frac{AE}{AH}; \quad \text{însă} \quad \frac{AD}{AF}=\frac{2}{3},$$

de unde

$$3DE = 2FH.$$

Soluția II. DE fiind linie mijlocie în triunghiul ABC avem $DE=\frac{BC}{2}$. FH fiind linie mijlocie în trapezul $BDEC$ avem

$$FH=\frac{DE+BC}{2}=\frac{\frac{BC}{2}+BC}{2}=\frac{3BC}{4}=$$

$$=\frac{6DE}{4}=\frac{3DE}{2}$$

de unde $2FH = 3DE$.

2.110. O foaie de tablă are forma unui triunghi ABC cu latura $BC = a$, $\sphericalangle B = 45°$, $\sphericalangle C = 30°$.

a). Să se arate cum se poate decupa din acest triunghi un dreptunghi astfel ca deșeurile rămase să aibă cea mai mică arie și să se exprime această arie.

b). Să se arate că dacă notăm cu x latura patratului de arie maximă ce se poate decupa din triunghiul dat ABC, există relația:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{h_a}$$

și să se construiască grafic lungimea x cunoscînd latura $BC = a$ și înălțimea h_a a triunghiului dusă din vîrful A.

(G.M.B., 12802, C. *Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Fie $MNN'M'$ dreptunghiul de arie maximă. $M', N' \in BC$. Notăm $MN = x$, $MM' = NN' = y$. Ducem $MP \parallel AC$, $P \in BC$. Figura

$MNCP$ este paralelogram, $PC = x$. Ducem $AD \perp BC$. Triunghiurile ABC și BMP fiind asemenea avem:

$$\frac{y}{a-x} = \frac{AD}{a}; \quad y = \frac{(a-x)\,AD}{a};$$

$$S = xy = \frac{AD}{a} \cdot x(a-x).$$

S este maxim cînd $x(a-x) = -x^2 + ax$ este maxim adică pentru $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{a}{2}$. Deci $S_{max} = \frac{AD}{a} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ aria ABC, adică MN este linie mijlocie.

b). Avem $x = y$ sau $ax = (a-x)\,AD \Rightarrow (AD + a)x = a \cdot AD$, sau

$$\frac{1}{x} = \frac{h_a + a}{a \cdot h_a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h_a}.$$

Construcția grafică a lui x se face construind un trapez cu bazele a și h_a, iar segmentul dus prin intersecția diagonalelor paralel cu bazele.

CERCUL. RELAȚII METRICE ÎN CERC. PATRULATERE ŞI POLIGOANE INSCRIPTIBILE. LOCURI ŞI CONSTRUCTII GEOMETRICE

Definiție. Puterea unui punct A față de un cerc de rază R este dată de expresia $AB \cdot AC = AT^2 = OA^2 - R^2$ unde B și C sînt intersecțiile cu cercul ale unei drepte ce trece prin A; puterea punctului este pozitivă adică $OA^2 - R^2 > 0$ dacă punctul A este exterior cercului și negativă dacă punctul A este interior cercului, adică $OA^2 - R^2 < 0$.

Formule. Lungimea cercului de rază R este $l = 2\pi R$; iar aria $S = \pi R^2$.

Arc capabil de un unghi dat și care trece prin extremitățile unui segment dat AB este arcul de cerc care trece prin punctele A și B astfel că M fiind un punct de pe acest arc, $\sphericalangle AMB = \alpha$ (constant) și se numește *arc capabil de unghiul* α. Segmentul AB se vede din M sub un unghi α.

Locul geometric al punctelor de plan care au puteri egale față de două cercuri date O, O' este o dreaptă (D) perpendiculară pe linia centrelor, care se numește *axă radicală* a celor două cercuri. Axa radicală este și locul punctelor din plan din care se pot duce tangente egale la cele două cercuri.

Dacă cercurile sînt secante, axa lor radicală este dreapta care trece prin punctele lor de intersecție.

Dacă cercurile sînt interioare, adică unul din ele este interior celuilalt, axa radicală este o dreaptă exterioară ambelor cercuri; în particular, două cercuri concentrice nu au axă radicală la distanță finită, iar prin convenție, se poate spune că axa radicală este situată la infinit.

Axa radicală a două cercuri din același plan este perpendiculară pe linia centrelor.

Fiind date trei cercuri, există un punct C în planul lor, numit *centrul radical*, care are puteri egale față de cele trei cercuri.

Din C se pot duce tangente egale la cele trei cercuri.

Centrul radical este intersecția axelor radicale ale celor trei cercuri luate două cîte două.

Notăm cu l_n latura unui poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc de rază R, iar cu a_n apotema lui. Avem formulele $a_n = R \cos \frac{\pi}{n}$; $l_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}$.

Poligon convex se numește poligonul plan care are suprafața sa în întregime de o singură parte a unei drepte dusă prin oricare din laturile sale; iar în caz contrar se zice poligon concav.

Patrulaterul inscriptibil este patrulaterul convex căruia i se poate circumscrie un cerc.

Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă:

a). Unghiurile opuse sînt suplementare, adică $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$.

b). Două laturi opuse fac cu cele două diagonale unghiuri egale, adică $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$ etc.

Notații. Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Notăm $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; $a + b + c + d = 2p$; S = aria $ABCD$; R = raza cercului circumscris.

Formule.

$ac + bd = AC \cdot BD$ (*prima teoremă a lui Ptolemeu*) care are și reciprocă.

$$\frac{ad + bc}{ab + cd} = \frac{AC}{BD} \text{ (a doua teoremă a lui Ptolemeu).}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$AC^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}; \quad BD^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc};$$

$$R = \frac{(ab + cd)AC}{4S} = \frac{(ad + bc)BD}{4S} = $$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

$S=\sqrt{abcd}$ numai dacă patrulaterul inscriptibil este totodată și circumscris unui al doilea cerc.

Notînd cu l_n latura poligonului regulat înscris în cercul de rază R și a_n apotema aceluiași poligon avem formulele:

$$l_3=R\sqrt{3};\ a_3=\frac{R}{2};\ l_4=R\sqrt{2};\ a_4=\frac{R\sqrt{2}}{2};$$

$$l_5=\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}};\ a_5=\frac{1}{4}R(\sqrt{5}+1);$$

$$l_6=R;\quad a_6=\frac{1}{2}R\sqrt{3};$$

$$l_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}};\quad a_8=\frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

$$l_{10}=\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1);\quad a_{10}=\frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$l_5^*=\frac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ latura pentagonului stelat,

$l_{10}^*=\frac{1}{2}R(\sqrt{5}+1)$ latura decagonului stelat.

Fie l_{2n} latura poligonului regulat cu $2n$ laturi înscris în cercul de rază R:

$$l_{2n}^2=R\left(2R-\sqrt{4R^2-l_n^2}\right).$$

Notăm cu S_n aria poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul de rază R:

$$S_3=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4};\quad S_4=2R^2;\quad S_5=\frac{5R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$S_6=\frac{3\sqrt{3}\cdot R^2}{2};\quad S_8=2(2-\sqrt{2})R^2(\sqrt{2}+1);$$

$$S_{10}=\frac{5R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Sector circular cu unghiul la centrul cercului de rază R: lungimea arcului $l = \frac{\pi R \alpha^\circ}{180}$; aria sectorului $S = \frac{\pi R^2 \alpha^\circ}{360}$; $l^2 = \frac{\pi \alpha^\circ S}{90}$.

Segmentul circular. $S = \frac{1}{2} R(1 - R \sin \alpha)$.

PROBLEME

3.1. Bisectoarele exterioare ale unui triunghi oarecare ABC retaie cercul circumscris în punctele A_1, B_1, C_1. Să se arate că dreapta AA_1 este paralelă cu B_1C_1 și analoagele.

(S.G.M., 1943, 143, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Bisectoarele interioare întîlnesc din nou cercul circumscris în punctele A_2, B_2, C_2, deci A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sînt diametre deoarece $AA_1 \perp AA_2$, ... Rezultă că dacă A_1 se află în interiorul unghiului B_2OC_2 atunci și A_2 se află în interiorul unghiului B_1OC_1 și analoagele $\sphericalangle A_1OC_2 = \sphericalangle A_2OC_1$; $\sphericalangle A_1OB_2 = \sphericalangle A_2OB_1$; $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ și analoagele. Revine deci să arătăm că $AA_1 \parallel B_2C_2$ sau că arc $A_1B_2 =$ = arc AC_2. Mai ținem seama că: arc $A_1C = \frac{1}{2}$ (arc AC + + arc AB) deoarece AA_1 este bisectoarea exterioară a unghiului A; iar arc $B_2C = \frac{1}{2}$ arc AC, deoarece BB_2 este bisectoare interioară a unghiului B și avem: arc $A_1B_2 =$

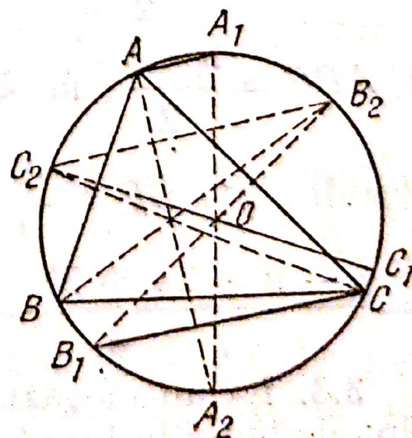


Fig. 3.1

$= \text{arc } A_1C - \text{arc } B_2C = \frac{1}{2}(\text{arc } AB + \text{arc } AC) -$

$- \frac{1}{2} \text{arc } AC = \frac{1}{2} \text{arc } AB = \text{arc } AC_2$, deoarece CC_2 este bisectoarea interioară a unghiului C.

3.2. Fie un patrulater inscriptibil $ABCD$. Se duc în exterior (vezi figura) în așa fel încît să nu mai taie cercul segmentele AE și CF astfel încît $AE = AD$, $AE \parallel BC$, $CF = CD$, $CF \parallel AB$. Arătați că $DF \perp DE$.

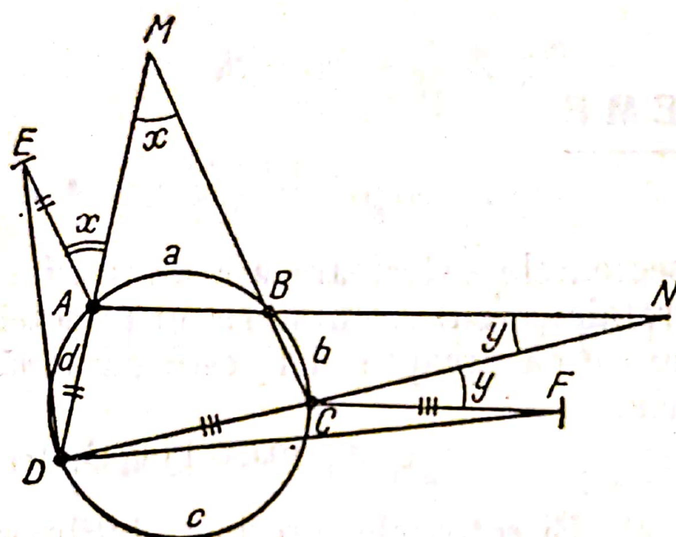


Fig. 3.2

Soluția. Notăm cu a, b, c, d, măsura arcelor AB, BC, CD, DA deci $a + b + c + d = 360°$.

Fie $AD \cap BC = M$ și $AB \cap CD = N$. Avem $\sphericalangle DEA =$ $= \sphericalangle ADE = \frac{1}{2} \sphericalangle EAM = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB = \frac{1}{2}\left(\frac{c-a}{2}\right)$; $\sphericalangle ADC = \frac{a+b}{2}$; iar $\sphericalangle CDF = \frac{1}{2} \sphericalangle BNC = \frac{1}{2}\left(\frac{d-b}{2}\right)$.

Rezultă $\sphericalangle EDF = \frac{1}{2}\left(\frac{c-a}{2}\right) + \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d-b}{2}\right) =$

$= \frac{c - a + 2a + 2b + d - b}{4} = \frac{a+b+c+d}{4} = 90°.$

3.3. La un magazin ferometal se vinde un colac de șină de butoi în formă de coroană circulară formată din 29 de cercuri bine apropiate unul de altul. Să se afle

lungimea aproximativă a șinei din colac cunoscînd raza cercului mijlociu de 40,2 cm. Cît cîntărește colacul știind că șina are grosimea de 0,2 cm și lățimea de 5 cm? Densitatea metalului se ia 7,6 g/cm³.

(G.M.B., E: 1628).

Soluție. Se observă că, dacă avem un număr impar de cercuri concentrice, lungimea tuturor cercurilor este egală cu lungimea cercului mijlociu înmulțită cu numărul cercurilor.

În cazul nostru, putem face aproximația de a considera colacul format din 29 cercuri concentrice, la care diferența razelor a două cercuri alăturate este tocmai grosimea șinei. Avem:

a). $L = 2\pi R_m \cdot N = 2\pi \cdot 40{,}2 \cdot 29 = 80{,}4 \cdot 29\pi$ cm $=$ $= 2\,331{,}6\pi$ cm $= 7\,321{,}224$ cm $= 73{,}21$ m.

b). Mai folosim formulele $\rho = \dfrac{m}{v}$; $m = \rho v$.

$$v = 0{,}2 \cdot 5 \cdot 7\,321 = 7\,321 \text{ cm}^3.$$

$$m = 7{,}6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 7\,321 \text{ cm}^3 = 7{,}6 \cdot 7\,321 \text{ g} = 55\,639{,}6 \text{ g} = $$
$$= 55{,}640 \text{ kg}.$$

3.4. Fie $ABCD$ un paralelogram. Cercurile descrise pe BC și CD ca diametre se mai taie în punctul I și întîlnesc diagonala AC respectiv în G și H.

Să se arate că $AG = CH$ și că $I \in BD$.

Soluție. Triunghiurile ABG și CDH sînt triunghiuri dreptunghice egale. Unghiurile drepte CID și CIB sînt egale.

3.5. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare ABC, bisectoarea CC_1 este și bisectoarea unghiului făcut de înălțimea CC_2 și raza CO a cercului circumscris.

Soluție. Fie OC_3 raza perpendiculară pe AB. Unghiurile C_1CC_2 și OC_3C_1 sînt egale ca alterne interne. Triunghiul COC_3 este isoscel deci $\sphericalangle OC_3C_1 = \sphericalangle OCC_1$, deci $\sphericalangle C_1CC_2 = \sphericalangle OCC_1$.

3.6. Să se stabilească relația

$$(l_5^*)^2 = 16(a_{10}^2 l_{10}^2 - a_{10}^4 l_{10}^4)$$

unde a_{10}, l_{10}, sînt respectiv apotema și latura decagonului regulat convex înscris în cercul de rază unitatea, și l_5^* este latura pentagonului regulat stelat înscris în același cerc.

(S.G.M., VII, 177, 1936, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Fie α jumătatea arcului subîntins de latura decagonului regulat convex. Avem:

$a_{10} = \cos\alpha$, $\quad l_{10} = 2\sin\alpha$, $\quad l_5^* = 2\sin 4\alpha$. Relația devine:

$$4\sin^2 4\alpha = 16(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 16\sin^4\alpha\cos^4\alpha), \text{ sau}$$

$$\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha(1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha) =$$

$$= \sin^2 2\alpha(1 - \sin^2 2\alpha) = \sin^2 2\alpha\cdot\cos^2 2\alpha.$$

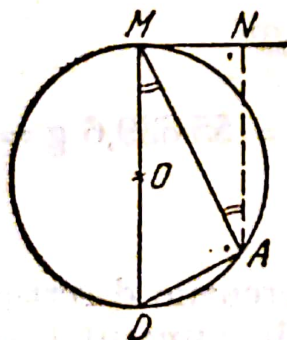


Fig. 3.6

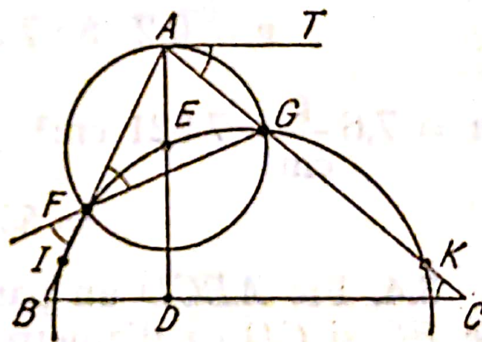


Fig. 3.7

3.7. Într-un triunghi oarecare ABC ducem înălțimea AD. Dintr-un punct E situat pe AD ca centru se descrie un cerc cu raza AE. Acest cerc mai intersectează dreptele AB și AC respectiv în F și G. Un alt cerc care trece prin F și G mai taie dreptele AB și AC respectiv în I și K. Să se arate că $BC \parallel IK$.

(G.M.B., 14168, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Patrulaterul $IFGK$ este inscriptibil $\sphericalangle AFG = \sphericalangle AKI$; $\sphericalangle AFG = \sphericalangle GAP$, AT fiind tangentă la cercul AGF, $\sphericalangle GAT = \sphericalangle AKI$, dar $\sphericalangle GAT = \sphericalangle ACB$ căci $AT \parallel BC$. Deci $\sphericalangle AKI = \sphericalangle ACB \Rightarrow BC \parallel IK$.

3.8. Se dă un triunghi echilateral ABC. O dreaptă oarecare paralelă (d) cu BC taie pe AC în M și paralela prin C la AB în N. Să se afle locul geometric al punctului $K = MB \cap NA$ cînd d se deplasează rămînînd paralelă cu BC.

(G.M.B., E: 5193).

Soluție. Fie K' intersecția cercurilor ABC și MNC (cea de-a doua intersecție).

$\sphericalangle CMN = \sphericalangle ACB = 60°$ (alterne interne, $d \parallel BC$)

$\sphericalangle CNM = \sphericalangle ABC = 60°$ (cu laturi paralele)

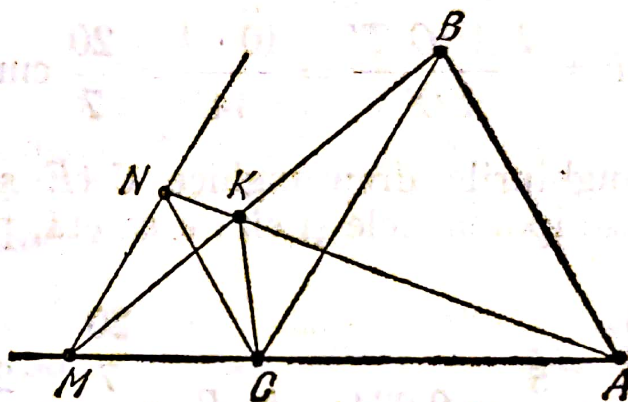


Fig. 3.8

Rezultă că $\triangle CNM$ este echilateral.

Avem deci $\sphericalangle MK'N = \sphericalangle CK'M = \sphericalangle AK'C = \sphericalangle BK'A = 60°$ și rezultă că unghiurile $BK'M$ și $AK'N$ au laturile în prelungire, adică B, K', M și apoi A, K', N sînt coliniare.

În aceste condiții, K se confundă cu K' care e situat pe cercul ABC. Rezultă că acest cerc este locul geometric căutat.

3.9. Cercurile O și O' sînt tangente exterior în A. Diametrul cercului O este AB iar cel al cercului O' este AC. Din B se duce o tangentă la cercul O' iar din C o tangentă la cercul O, ambele tangente fiind de aceeași parte a liniei centrelor. Știind că raza cercului O este de 5 cm, iar a cercului O' de 4 cm, să se calculeze unghiul pe care îl formează întretăierea celor două tangente.

(G.M.B., 2203, *Victor Florescu*).

Soluție. Tangenta din B la cercul O' este perpendiculară pe raza $O'T'$, iar tangenta din C la cercul O este perpendiculară pe raza OT. Notînd cu E punctul unde tangenta din C taie cercul O' și cu F punctul unde tangenta din B taie cercul O avem AE perpendiculară pe TC și AF perpendiculară pe $T'B$. Rezultă că AE este paralelă cu OT și AF este paralelă cu $O'T'$.

Din asemănarea triunghiului CAE cu triunghiul COT calculăm pe:

$$AE = \frac{CA \cdot OT}{CO} = \frac{8 \cdot 5}{13} = \frac{40}{13} \text{ cm}$$

și la fel calculăm pe:

$$AF = \frac{BA \cdot O'T'}{BO'} = \frac{10 \cdot 4}{14} = \frac{20}{7} \text{ cm.}$$

Din triunghiurile dreptunghice CAE și BAF, la care se cunosc ipotenuzele și cîte o catetă, prin funcția sinus:

$$\left(\sin C = \frac{\frac{40}{13}}{8} = \frac{5}{13} = 0{,}934; \quad \sin B = \frac{\frac{20}{7}}{10} = \frac{2}{7} \approx 0{,}287\right)$$

se vede că unghiul C este aproximativ de $22°30'$, iar unghiul B de aproximativ $16°30'$.

Notînd cu D punctul de intersecție al celor două tangente și considerînd triunghiul BDC, unghiul D este de $180° - (16°30' + 22°30') = 141°$.

La același rezultat se ajunge dacă prin funcția cosinus se caută unghiurile A_1 și A_2, unghiul D fiind egal cu suma lor (patrulaterul $AFDE$ este inscriptibil, avînd două unghiuri opuse drepte).

3.10. Latitudinea geografică a orașului București este de $44°25'$ nord. Care este distanța acestui oraș de ecuator, raportată la meridianul locului? Care este distanța lui, de tropicul de nord (lat. $23°27'20''$)?

Știind că lungimea meridianului terestru, după măsurătorile moderne este $L' = 40009{,}152$ km, să se exprime aceste distanțe și în sistemul metric.

(G.M.B., E:4500, *I. Teodorescu*).

Soluție. Meridianul terestru este considerat ca un cerc, dacă L este lungimea lui, lungimile arcelor de 1°, de 1′ și 1″ sînt:

$$1° = \frac{L}{360}, \quad 1' = \frac{L}{360 \cdot 60'}, \quad 1'' = \frac{L}{360 \cdot 60 \cdot 60}.$$

Lungimea arcului de latitudine 14°25′ este și distanța de ecuator

$$d_1 = 44 \cdot \frac{L}{360} + 25 \cdot \frac{L}{360 \cdot 60} = \frac{L}{360}\left(44 + \frac{25}{60}\right) =$$

$$= \frac{533}{4\,320} \cdot L.$$

Distanța orașului București de tropicul de nord care are latitudinea 23°27′29″, în grade, este 44°25′ — — 23°27′20″ = 20°57′40″, iar raportată la lungimea meridianului, este

$$20 \cdot \frac{L}{360} + 57 \frac{L}{360 \cdot 60} + 40 \cdot \frac{L}{360 \cdot 60 \cdot 60}.$$

$$d_2 = \frac{L}{360}\left(20 + \frac{57}{60} + \frac{40}{3\,600}\right) = \frac{3\,773}{64\,800} L.$$

Cele două distanțe exprimate în sistemul metric au lungimile

$$d_1 = \frac{533}{4\,320} \cdot 40009{,}152 = 4936{,}314 \text{ km},$$

$$d_2 = \frac{3773}{64\,800} \cdot 40009{,}152 = 2329{,}545 \text{ km}.$$

3.11. Într-un cerc dat se consideră diametrul AB. Se duc coardele AC și BD care se taie în interiorul cercului în punctul P. Să se arate că $AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$.

Soluție. Ducem $PE \perp AB$. Triunghiurile APE și ACB sînt asemenea.

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AP}; \quad AC \cdot AP = AB \cdot AE. \qquad (1)$$

Triunghiurile BPE și ADB sînt asemenea

$$\frac{DB}{EB}=\frac{AB}{PB};\ DB\cdot PB=AB\cdot EB. \qquad (2)$$

$$AC\cdot AP+BD\cdot BP=AB\cdot AE+AB\cdot EB=AB^2.$$

3.12. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic unde $\sphericalangle A>\sphericalangle B>\sphericalangle C$. Notăm cu A_1, B_1, C_1 proiecțiile lui A, B, C pe dreapta OH, unde H este ortocentrul iar O centrul arcului circumscris.

Să se arate că $AA_1+CC_1=BB_1$.

(G.M., 15199, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Dacă $OE\perp AB\Rightarrow OE\parallel CH$.

Avem $EE'=\frac{1}{2}(CC_1+AA_1)$ din trapezul AA_1C_1C.

Triunghiurile BB_1H și EOE' sînt dreptunghice asemenea.

$$\frac{OE}{BH}=\frac{EE'}{BB_1},\ \text{dar } OE=\frac{BH}{2}\Rightarrow\frac{EE'}{BB_1}=\frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow BB_1=2EE'$. Rezultă

$$2EE'=CC_1+AA_1 \text{ sau } BB_1=CC_1+AA_1.$$

3.13. Un trapez isoscel $ABCD$ are bazele AB și CD și diagonalele AC și BD. Cercul cu centrul în A de rază AD taie dreapta AC în punctele M și N, iar dreapta CD taie acest cerc în punctul P. Să se arate că

a). BC și AP sînt paralele; b). $CM\cdot CN=AB\cdot DC$.

Soluție. a). $AD=AP=BC$. Dar $AB\parallel PC$; $\sphericalangle APD=\sphericalangle ADP$; $\sphericalangle ADP+\sphericalangle ADC=180°$;

$$\sphericalangle APD+\sphericalangle ACD=180°,\Rightarrow AP\parallel BC.$$

b). $\triangle PMC\sim\triangle CDN\Rightarrow\frac{CM}{CD}=\frac{AB}{CN}\Rightarrow CM\cdot CN=$

$$=CD\cdot AB.$$

3.14. Se dă un patrulater inscriptibil $ABCD$ și fie A', C' proiecțiile punctelor A și C pe diagonala BD, iar B' și D' proiecțiile punctelor B și D pe diagonala AC.

Să se arate că dacă diagonalele AC și BD fac un unghi de 45°, atunci aria patrulaterului $A'B'C'D'$ este jumătate din aria $ABCD$.

Soluție. Fie O intersecția diagonalelor AC și BD. Triunghiurile AOD și $A'OD'$ sînt asemenea; triunghiurile BOC și $B'OC'$ sînt asemenea, precum și triunghiurile AOB și $A'OB'$ sînt asemenea, iar raportul ariilor este 2. Rezultă aria $ABCD = 2$ aria $A'B'C'D'$.

3.15. În triunghiul ABC unghiul $A = 45°$. Fie D și E proiecțiile punctelor B și C pe laturile AC și AB. Să se arate că aria triunghiului AED este jumătate din aria triunghiului ABC.

Ce se poate spune dacă unghiul $A = 135°$?

Soluție. 1°. Patrulaterul $EDCB$ este inscriptibil. $\sphericalangle A = \sphericalangle DCE = 45°$, $2AE^2 = AC^2$; $AC = AE\sqrt{2}$, dar triunghiurile ABC și AED sînt asemenea.

$$\frac{\text{aria } ADE}{\text{aria } ABC} = \frac{AE^2}{AC^2} = \frac{AE^2}{2AE^2} = \frac{1}{2}.$$

2°. Patrulaterul $EDBC$ este inscriptibil în cercul de diametru BC. Triunghiurile ABC și AED sînt asemenea.

$$\frac{\text{aria } ADE}{\text{aria } ABC} = \left(\frac{AE}{AE\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

3.16. Un trapez este format din jumătatea unui hexagon regulat. Intersecțiile bisectoarelor acestui trapez sînt vîrfurile unui patrulater. Să se arate că acest patrulater are diagonalele perpendiculare și aria lui este de 9 ori mai mică decît a trapezului dat. Să se exprime laturile și diagonalele acestui patrulater știind că baza mică a trapezului este *a* metri.

(G.M.B., 2089, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. $AB = AD = DC = BC : 2 = AN = DN = BN = NC$.

Fie $P = AN \cap BD$ și $P = AC \cap DN$; $Q = AC \cap BD$. $AN \parallel DC$ și $DN \parallel AB \Rightarrow DP = PN$ și $AM = MN$.

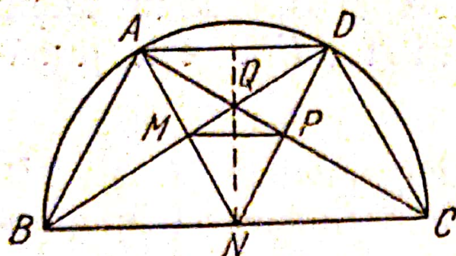


Fig. 3.16

$MP \parallel AD$; $RN \perp BC$; $NQ \perp MP$; DM și AP sînt înălțimi în triunghiul $ADN \Rightarrow NR \perp AD$; $NQ \perp MP$.

aria ABN = aria DCN = = aria AND, triunghiuri echilaterale.

$MQPN$, $MQRA$ și $RQPD$ sînt patrulatere egale.

$$\text{aria } MQPN = \frac{1}{3} \text{ aria } AND = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} \text{ aria } ABCD\right) =$$

$$= \frac{1}{9} \text{ aria } ABCD.$$

$$MN = PN = \frac{a}{2}; \quad NR = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$MQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} = PQ;$$

$$MP = \frac{a}{2}; \quad QN = \frac{2}{3} NR = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

3.17. Fie cercul dat O și un triunghi oarecare ABC înscris în el. Pe tangenta C la cercul dat se ia un punct P și se notează cu M și N proiecțiile lui P respectiv pe laturile AC și BC. Se cere: 1°). Să se arate că MN și AB sînt perpendiculare. 2°). Considerînd punctele B, C, P fixe, iar A mobil pe cercul dat, să se afle locul geometric al intersecției I a dreptelor AB și MN, cînd A descrie cercul dat. 3°). Să se arate că avem relația $NB^2 \cdot PC^2 = PM^2 \cdot NB^2 + IB^2 \cdot PC^2$.

Soluție. 1°). Fie $I = AB \cap MN$; patrulaterul $MCNP$ este inscriptibil și deci $\sphericalangle CNM = \sphericalangle MPC$ (1) și $\sphericalangle MPC + \sphericalangle MCP = 90°$ dar $\sphericalangle MCP = \sphericalangle ABC = = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, astfel că relația precedentă devine: $\sphericalangle CNM + + \sphericalangle ABC = 90°$ (2) care arată că $\triangle BIN$ este dreptunghic în I, adică $IN \perp AB$.

2°). Punctele B, C, P, N fixe și numai A variază pe cercul O. Triunghiul BIN fiind dreptunghic în I și ipotenuza BN fixă, locul lui I este cercul de diametru BN.

3°). Din triunghiul dreptunghic MPC, avem:

(3) $PC^2 = MP^2 + MC^2$, iar din $\triangle MPC \sim \triangle BIN$;

$$\frac{PC}{BN} = \frac{MP}{IN} = \frac{MC}{BI}. \qquad (4)$$

Apoi din relația (3) avem:

$PC^2 \cdot BN^2 = BN^2 \cdot MP^2 + MC^2 \cdot BN^2$ și din (4) rezultă $MC^2 \cdot BN^2 = PC^2 \cdot BI^2$ și astfel: $PC^2 \cdot BN^2 =$
$= BN^2 \cdot MP^2 + PC^2 \cdot BI^2$ relația cerută.

3.18. Considerăm trapezul cu laturile paralele AB și CD și fie E intersecția dreptei AD cu cercul ce trece prin BCD și F intersecția dreptei AD cu paralela din C la BE.

a). Patrulaterul $ABCF$ este inscriptibil.

b). BC este medie geometrică între AD și EF.

(S.G.M., 1948, 135, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a) Avem $\sphericalangle FCB = \sphericalangle EBC'$, unde BC' este prelungirea laturii BC, iar arc $BC =$ arc DG fiind cuprinse între laturile paralele, $\sphericalangle EBC' = \sphericalangle BAE$, deoarece $\sphericalangle EBC' = \dfrac{1}{2}$ măs (arc BC + + arc EB) $= \dfrac{1}{2}$ măs (arc DG + + arc EB) = măs $\sphericalangle BAE$.
$\Rightarrow \sphericalangle BAF = 180° - \sphericalangle BAE =$
$= 180° - \sphericalangle BCF \Rightarrow \sphericalangle BCF +$
$+ \sphericalangle BAF = 180°$, deci patrulaterul $ABCF$ este inscriptibil.

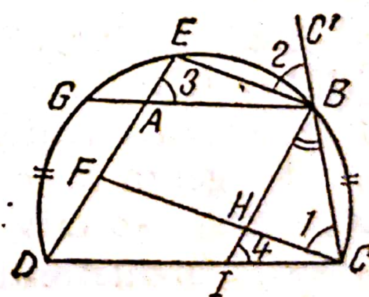


Fig. 3.18

b). Paralela din B la AD taie pe CF în H și pe CD în I; $\sphericalangle BEA = \sphericalangle BIC$ avînd laturile paralele, deci $\sphericalangle BIC = \sphericalangle BCH$.

⇒ Triunghiurile BCI și BCH sînt asemenea mai avînd și unghiul CBI comun. Din proporționalitatea laturilor rezultă că BC este medie geometrică între BI și BH, dar $BI = AD$ și $BH = EF$.

3.19. Se dă triunghiul ABC cu $\sphericalangle A > 90°$. Fie A_1 piciorul înălțimii dusă din A și M mijlocul laturii AC. Se duce din A_1 dreapta (d) perpendiculară pe A_1M. Să se arate că:

a). Unghiul A_1AC este egal cu unghiul ascuțit al dreptelor (d) și (BC).

b). N fiind piciorul perpendicularei dusă din C pe AB, unghiurile A_1AN și NCA_1 sînt suplementare.

c). Bisectoarea interioară a unghiului A și perpendiculara din M pe BC se intersectează pe cercul circumscris triunghiului AA_1C.

Soluție. a) Avem $\sphericalangle A_1AC = \sphericalangle (d, BC)$ deoarece au aceeași măsură și anume măsura jumătății arcului A_1C din cercul de diametru AC.

b). Deoarece $\sphericalangle BAC > 90°$ punctul N va fi pe cercul de diametru AC, unghiul ANC fiind de $90°$ și deci patrulaterul $ANCA_1$ este înscris în cercul de diametru AC, iar unghiurile A_1AN și NCA_1 sînt suplementare.

c). Bisectoarea unghiului BAC trece prin mijlocul arcului A_1C iar perpendiculara din centrul cercului pe coarda A_1C trece de asemenea prin același punct situat la mijlocul arcului A_1C.

3.20. Înălțimea AA' a triunghiului isoscel ABC $(AB = AC)$ taie cercul circumscris triunghiului în E, iar bisectoarea unghiului EAC taie același cerc în D.

Tangenta la cerc în D intersectează dreptele AE, AC, BC respectiv în F, I, L. Să se arate că:

a). Patrulaterul $BHCE$ este romb, H fiind ortocentrul triunghiului ABC.

b). Punctele A, B, F, L sînt așezate pe același cerc.

c). Cum trebuie să fie triunghiul ABC pentru ca să putem avea $EB = EH = EC$?

d). Cum trebuie să fie triunghiul ABC pentru ca triunghiul CIL să fie isoscel?

(Concurs elevi, 1965, *Elena Flondor*).

Soluție. a). Din triunghiul ACE deducem $\sphericalangle ACE = 90°$, $\sphericalangle AEC = \sphericalangle AFI$, avînd aceeași măsură, $\sphericalangle AIF = 90°$; $BE \parallel CH$; $BH \parallel CE$ dar $BE = EC$ fiind coarde ce subîntind arce egale, deci paralelogramul $BHCE$ este romb.

b). Patrulaterul $A'FIC$ este inscriptibil deoarece

$\sphericalangle EA'C = 90°$ și $\sphericalangle CIF = 90°$.

Să arătăm că $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BLF$ (pentru ca patrulaterul $ABFL$ să fie inscriptibil, unghiul format de o latură și o diagonală trebuie să fie egal cu unghiul format de latura opusă și cealaltă diagonală).

Fig. 3.20

$$\text{măs}\ \sphericalangle BAF = \text{măs}\ \frac{\overset{\frown}{BE}}{2};\ \text{măs}\ \sphericalangle BLF = \frac{1}{2}(\text{măs}\ \overset{\frown}{BD} - \text{măs}\ \overset{\frown}{DC}) = \frac{1}{2}(\text{măs}\ \overset{\frown}{BD} - \text{măs}\ \overset{\frown}{ED}) = \frac{1}{2}\ \text{măs}\ \overset{\frown}{BE},$$

deci $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BLF$.

c). Triunghiul ABC trebuie să fie echilateral.

$BE = EH = BH$ deci $\sphericalangle BHE = 60°$ și $\sphericalangle EAI = 30°$.

d). Să arătăm că $CI = IL$ sau $\sphericalangle LCI = \sphericalangle CLI$ sau $\sphericalangle LCI = 45°$, deoarece $\sphericalangle CIL = 90°$, dar $\sphericalangle LCI = \sphericalangle ACB$ ca opuse la vîrf. $\sphericalangle ACB = 45°$, atunci $\sphericalangle CAA' = 45°$ și deci $\sphericalangle A = 90°$.

3.21. Printr-un punct O al planului se duc trei cercuri egale, care se mai taie, în afară de punctul O, în punctele A, B, C. Să se arate că cercul circumscris triunghiului ABC este și el egal cu cele trei cercuri date.

(Concurs elevi, 1908, *Gh. Țițeica*).

Soluție. Cele trei cercuri fiind egale, patrulaterele OO_1BO_2 și OO_1CO_2 sînt romburi, de unde se deduce imediat că $O_3B \parallel OO_1 \parallel O_2C$. Ținînd seama că $O_3B = O_1O = O_2C$ ca raze egale patrulaterul O_2O_3BC este parale-

logram $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle O_1O_2O_3$, deci și cercurile lor circumscrise sînt egale.

Cercul circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$ are ca raze razele cercurilor date OO_1, OO_2, OO_3, deci cele patru cercuri sînt egale.

3.22. Patrulaterul $ABCD$ are $\measuredangle B = \measuredangle D = 1$ dr; $AD = CD$ și $\measuredangle BCA = \frac{2}{3}$ dr. Diagonalele lui se taie în P. Să se arate că:

$$\frac{PC}{PA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{și} \quad \measuredangle BAD = \measuredangle BPC.$$

Să se calculeze aria patrulaterului $ABCD$.

(R.M.F., 2330, *F. Dumitrescu*).

Soluție. Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. Atunci avem $AC = 2R$ (diametrul cercului); arc AD = arc $DC = 90°$; arc $BC = 60°$; arc $AB = 120°$. $AB = R\sqrt{3}$; $BC = R$; $CD = AD = R\sqrt{2}$; $\measuredangle ABD = \measuredangle DBC = 45°$ deci BP e bisectoarea unghiului ABC.

În triunghiul ABC avem (teorema bisectoarei):

$$\frac{PC}{PA} = \frac{BC}{BA} = \frac{R}{R\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\measuredangle BAD = \frac{\text{arc } BC + \text{arc } CD}{2} = \frac{60° + 90°}{2} = 75°;$$

$$\measuredangle BPC = \frac{\text{arc } BC + \text{arc } AD}{2} = \frac{60° + 90°}{2} = 75°;$$

$$\text{aria } (ABCD) = \text{aria } (ABC) + \text{aria } \frac{(CDA)}{2};$$

$$\text{aria } (ABC) = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{R \cdot R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{aria } (CDA) = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{(R\sqrt{2})^2}{2} = R^2;$$

$$\text{aria } (ABCD) = \frac{R^2(2 + \sqrt{3})}{2}.$$

3.23. Se dau cercurile O_1 și O_2 egale și tangente în M. Un cerc oarecare O trecînd prin M taie pe O_1 în A și pe O_2 în B. Dreapta MA întîlnește pe O_2 în A', iar MB întîlnește pe O_1 în B'.

Să se demonstreze că: $MB = MB'$ și $MA = MA'$.

(G.M.B., 1724, *Gh. Buicliu*).

Soluție dată de *Radu Stroe*, student, București. Deoarece: $AO_1 = O_1M = MO_2 = A'O_2$ și $\sphericalangle O_1MA = \sphericalangle A'MO_2$ și deci $\sphericalangle O_1AM = \sphericalangle O_2A'M$, vom avea: $\sphericalangle AO_1M = \sphericalangle MO_2A'$, deci triunghiurile MO_1A și $MA'O_2$ sînt egale, prin urmare $MA = MA'$. Analog din asemănarea triunghiurilor $MB'O_1$ și MBO_2 deducem: $MB = MB'$.

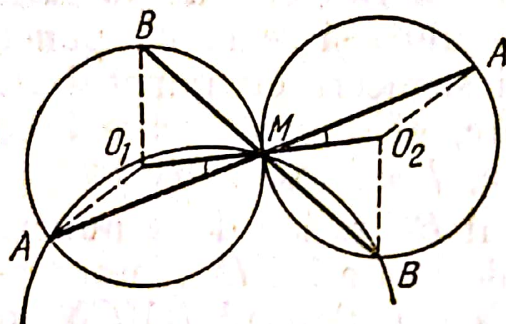


Fig. 3.23

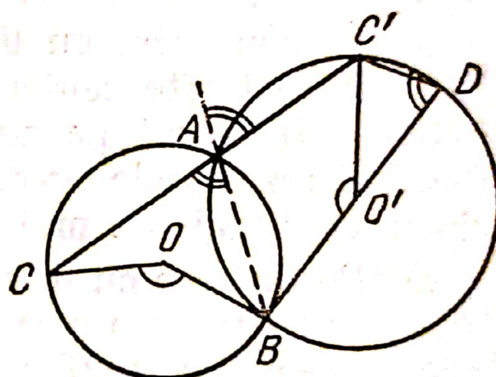


Fig. 3.24

3.24. Două cercuri cu centrele O și O' se taie în A și B. O secantă dusă prin A taie cercurile în C și C'. Să se arate că unghiurile BOC și $BO'C'$ sînt egale.

Soluție. Se duce diametrul $BO'D$. Se observă că

$$\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC$$

și $\quad \sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC'$, măsuri egale,

deci $\quad \sphericalangle BO'C' = 2\sphericalangle BDC' = 2\sphericalangle BAC.$

Rezultă

$$\sphericalangle BOC = \sphericalangle BO'C'.$$

Cazuri particulare. a). Cînd secanta CAC' trece prin centrul O, patrulaterul $OBO'C'$ este inscriptibil. b). Cînd secanta CAC' este perpendiculară pe coarda comună AB, dreptele BC și BC' sînt diametri.

3.25. a). Să se demonstreze că: într-un triunghi dreptunghic isoscel raportul dintre suma catetelor și ipotenuză este $\sqrt{2}$.

b). Reciproc, într-un triunghi dreptunghic raportul dintre suma catetelor și ipotenuză este $\sqrt{2}$. Triunghiul este isoscel? Demonstrați.

c). Fie b și c catetele, iar a ipotenuza unui triunghi dreptunghic $b \neq c$. Raportul $(b + c) : a$ poate fi mai mare decît $\sqrt{2}$? De ce?

Să se înlocuiască în propoziția următoare punctele prin: „egal", „cel puțin egal", sau „cel mult egal": Într-un triunghi dreptunghic, raportul dintre suma catetelor și ipotenuza este... cu $\sqrt{2}$.

d). Într-un cerc cu diametrul BC, se duce o rază $OA \perp BC$ (O este centrul cercului) și se ia un punct oarecare M situat pe același semicerc cu punctul A. Folosind rezultatele precedente, să se spună care linie frîntă are lungimea mai mare, BAC sau BMC?

e). Pe un cerc cu diametrul BC se iau două puncte M și N situate de o parte și de alta a lui BC. Cum trebuie alese punctele M și N ca patrulaterul $BMCN$ să aibă un perimetru cît mai mare? Ce fel de patrulater este în acest caz $BMCN$?

(G.M.B., E: 4083).

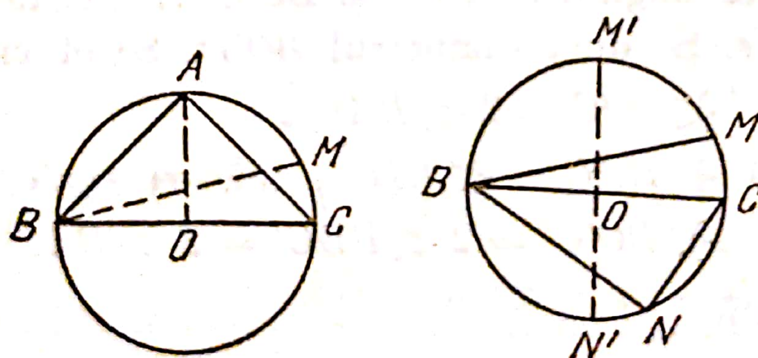


Fig. 3.25

Soluție. a). Avem

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C = 45°;\ \sin B = \frac{AC}{BC};\ \sin C = \frac{AB}{BC}.$$

Adunăm aceste relații și înlocuind sin 45° cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{AB}{BC}+\frac{AC}{BC}.$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2}=\frac{AB+AC}{BC}\Rightarrow\frac{AB+AC}{BC}=\sqrt{2}.$$

b). Știm că

$$\frac{AB+AC}{BC}=\sqrt{2}\Rightarrow AB+AC=\sqrt{2}\cdot BC.$$

Ridicăm această egalitate la pătrat:

$$(AB+AC)^2=2\cdot BC^2;\quad AB^2+2AB\cdot AC+AC^2=$$
$$=2\cdot BC^2.$$

Dar ABC fiind dreptunghic $\Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2$.

Relația deci devine:

$$AB^2+2AB\cdot AC+AC^2=2(AB^2+AC^2).$$

$$(AB-AC)^2=0\Rightarrow AB-AC=0\Rightarrow AB=AC\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\triangle ABC \text{ isoscel.}$$

c). Avem $c\neq b$. Presupunem $\frac{b+c}{a}>\sqrt{2}\Rightarrow b+$ $+c>\sqrt{2}\cdot a;\quad (b+c)^2>2a^2.$

Dar $a^2=b^2+c^2$ deci: $b^2+2b\cdot c+c^2>2(b^2+c^2)$;

$$b^2+2bc+c^2-2b^2-2c^2>0;\quad -b^2+2bc-c^2>0;$$
$$b^2-2bc+c^2<0;\quad (b-c)^2<0\Rightarrow$$

ceea ce este imposibil întrucît un binom la pătrat este totdeauna pozitiv; deci presupunerea $\frac{b+c}{a}>\sqrt{2}$ este falsă, deci punctele trebuie înlocuite cu cuvintele „cel mult egal".

d). $OA\perp BC\Rightarrow BA=AC\Rightarrow\triangle BAC$ dreptunghic isoscel;

conform punctului a): $BA+AC=\sqrt{2}\cdot BC$ (1)

$\triangle BMC$ = dreptunghic (se sprijină pe diametru) neisoscel (M = oarecare $\neq A$).

Conform punctului c): $BM + MC < \sqrt{2}\, BC$. (2)
Comparînd (1) și (2) rezultă:

$$MB + MC < BA + AC,$$

adică

linia frîntă $BAC >$ linia frîntă BMC.

e). Conform d) linia frîntă BMC este maximă atunci cînd M se află pe perpendiculara din O pe BC, adică atunci cînd $M \equiv M'$. La fel, linia frîntă BNC are lungimea maximă atunci cînd N se găsește pe perpendiculara din O pe BC, adică atunci cînd N ocupă poziția N'. Deci perimetrul $BMCN$ e maxim cînd $M \equiv M'$ și $N \equiv N'$, deci patrulaterul cu perimetru maxim este $BM'CN'$. Cum $M'N' \perp BC \Rightarrow BM'CN'$ pătrat.

3.26. Pe un cerc dat de centru O se consideră un punct fix A și un punct mobil M pe cerc. Tangenta la cerc dusă în A întîlnește dreapta OM în B. Să se arate că mediatoarea segmentului AM este bisectoarea unghiului AOM, iar cercul de diametru OB trece prin același punct D.

(G.M.B., 9100, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Triunghiurile AOE și OME sînt egale, EM este tangentă la cerc $\Rightarrow \sphericalangle OME = \sphericalangle MCD = 90°$. Fie $F = CD \cap BE \Rightarrow EF = FB$, $\sphericalangle DEB = \sphericalangle AEO = \sphericalangle OEM = \sphericalangle EDF \Rightarrow$ triunghiul DEF este isoscel $FE = FD \Rightarrow \sphericalangle EFD = \sphericalangle AOM$; $EF = FB = FD \Rightarrow$ $\Rightarrow$ triunghiul DBF este isoscel $\sphericalangle FBD = \sphericalangle BDF = \frac{1}{2}\sphericalangle DFE = \sphericalangle AOE. \Rightarrow \sphericalangle EDF + \sphericalangle FDB = \sphericalangle EOM + \sphericalangle OEM = 90°$, deci punctul D se află pe cercul cu diametru OB.

3.27. Pe diagonala AC a pătratului $ABCD$ înscris în cercul O se ia punctul E astfel ca $AE = AB$.

Dreapta BE intersectează a doua oară cercul O în M și dreapta DM intersectează dreapta AC în F. Să se arate că $CF = AB$.

(G.M.,E: 4528, *Th. Gh. Cocea*).

Soluție. Prin construcție triunghiul ABC este isoscel. Deoarece $\sphericalangle BAC = 45°$ avem

$$\sphericalangle ABE = \frac{180° - 45°}{2} = \frac{135°}{2} = 67°30'.$$

Rezultă

$\sphericalangle EBC$ sau $\sphericalangle MBC = 90° - 67°30' = 22°30'$.

$\sphericalangle MBC$ sau $\sphericalangle CDF$ are ca măsură jumătatea aceluiași arc MC și deci și el este egal cu $22°30'$.

Considerînd $\triangle ADF$ avem $\sphericalangle FAD = 45°$ și $\sphericalangle ADF = 90° + 22°30' = 112°30'$, adică $\sphericalangle FAD + \sphericalangle ADF = 157°30'$.

Rezultă $\sphericalangle AFD$ sau $\sphericalangle CFD = 180° - 157°30' = 22°30'$ adică $\sphericalangle CDF = \sphericalangle CFD$ și deci triunghiul CFD este isoscel, iar $CF = CD = AB$.

3.28. În cercul de centru O se consideră o coardă AB diferită de diametru, iar din B se duce perpendiculara pe AO care intersectează cercul în punctul C.

a). Să se arate că O aparține mediatoarei segmentului BC.

b). Ce fel de triunghi este ABC dacă unghiul CBO este de $30°$?

c). Să se arate că triunghiurile AOB și AOC sînt egale.

d). Dacă $\sphericalangle CBO = 30°$ să se găsească punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului ABC.

(G.M., E:4414, *C. Cărbunaru*).

Soluție. a). Deoarece $OB = OC$ ca raze în același cerc rezultă că O se află la egală distanță de capetele segmentului BC, deci se află pe mediatoarea acestuia.

b). Fie $D = AO \cap BC$, triunghiurile dreptunghice BOD și COD sînt egale pentru că au $OB = OC$ și OD latură comună. Rezultă că $\sphericalangle BOD = \sphericalangle COD$ iar de aici $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AOC$ ca suplementare ale celorlalte.

În acest fel, triunghiurile AOB și AOC sînt egale căci sînt isoscele, $AO = OB = OC$ și au unghiurile de la vîrf egale.

c). Din demonstrația anterioară, $AB = AC$ și deci ABC este isoscel. Înălțimea AD este bisectoare. Avem $\sphericalangle BOD = 90° - \sphericalangle OBD = 90° - 30° = 60°$. Acest unghi este exterior triunghiului AOB, deci $\sphericalangle BAO = \sphericalangle \frac{BOD}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$, rezultă că $\sphericalangle BAC = 2 \cdot 30° = 60°$ și triunghiul isoscel ABC este echilateral.

d). În această ipoteză $\triangle ABC$ este echilateral. Unghiurile CBO și ABO sînt egale cu cîte 30°, deci OB este bisectoare și totodată înălțime, deci punctul de intersecție al înălțimilor este centrul cercului.

3.29. Fie O centrul cercului circumscris și I centrul cercului înscris triunghiului ABC, $(A = 90°)$. Să se arate că dacă $IA = IO$ atunci triunghiul dreptunghic dat are un unghi de 30°.

(G.M.B., E: 2920, *I. Atanasiu*).

Soluție. Notăm cu N, M și P proiecțiile punctului I pe laturile AB, AC și BC.

Patrulaterul $AMIN$ este un pătrat căci $IN \perp AB$, $IM \perp AC$ și $A = 90°$. Deducem că $IM = AM$ și triunghiul AMI este dreptunghic isoscel.

Triunghiul AMI = triunghiul IPO căci au $IA = IO$ prin ipoteză și $IM = IP$ ca raze ale cercului înscris.

Rezultă că: $AM = OP$ și adunînd la acestea $MC = PC$ ca tangente la cerc pornind din același punct, deducem $AM + MC = OP = PC$.

sau:

$$AC = OC; \quad OC = \frac{1}{2} BC; \quad AC = \frac{1}{2} BC; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2},$$

însă

$$\frac{AC}{BC} = \sin B; \quad \text{deci: } \sin B = \frac{1}{2} \text{ de unde } B = 30°.$$

3.30. O dreaptă perpendiculară pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic ABC întîlnește pe AB și AC în M și N. Cercurile (BMC) și (BNC) întîlnesc pe AC și AB respectiv în Q și P.

a). Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este romb.

b). Să se arate că mulțimea romburilor astfel obținute este alcătuită numai din romburi asemenea, cînd perpendiculara pe BC variază (triunghiul rămînînd constant).

Soluție. a). $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle CNP$ înscrise în același cerc, (1) $\sphericalangle CNM = \sphericalangle B_1$ avînd laturile perpendiculare. Deci (2) $\sphericalangle CNP = \sphericalangle CNM$, deci $PN = NM$.

Patrulaterul $CQMB$ fiind înscris $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle MQA$. (3)

Dar din (1) rezultă, combinînd cu (3), faptul că $\triangle QMN$ este isoscel.

Deci $PQMN$ este romb.

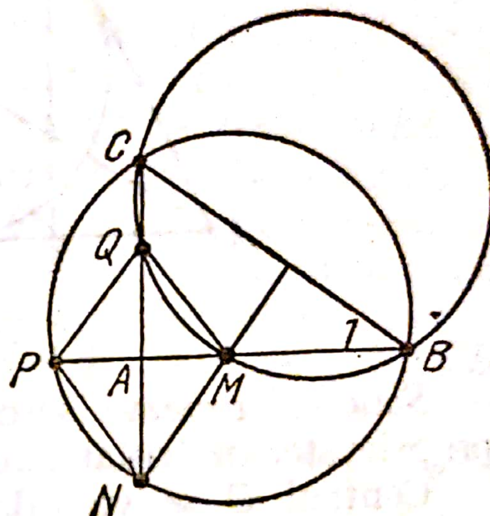


Fig. 3.30

b). Rombul $PQMN$ are unghiul $\sphericalangle PNQ = \sphericalangle B_1$, constant, deci $\sphericalangle PNM = 2\sphericalangle B_1$ constant, deci este membru asemenea cu cel pe care l-am obține făcînd să varieze perpendiculara MN pe BC.

3.31. Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele AC și BD perpendiculare în O, iar M, N, P, Q, picioarele perpendicularelor duse din O respectiv pe AB, BC, CD, DA. Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

Soluție. Trebuie să demonstrăm că:

$$\sphericalangle QMN + \sphericalangle QPN = 180°.$$

Ducînd perpendicularele din O pe laturile patrulaterului $ABCD$ s-au format patru noi patrulatere, dar inscriptibile: $AMOQ$, $BMON$, $CPON$ și $DPOQ$.

Rezultă că: $\sphericalangle QAO = \sphericalangle QMO$; $\sphericalangle NBO = \sphericalangle NMO$;

$$\sphericalangle NCO = \sphericalangle NPO \text{ și } \sphericalangle QDO = \sphericalangle QPB.$$

$\sphericalangle QMN + \sphericalangle QPN = \sphericalangle QMO + \sphericalangle NMO + \sphericalangle NPO + \sphericalangle QPO = \sphericalangle QAO + \sphericalangle NBO + \sphericalangle NCO + \sphericalangle QDO = (\sphericalangle QAO + \sphericalangle QDO) + (\sphericalangle NBO + \sphericalangle NCO) = 90° + 90° = 180°.$

3.32. Perimetrul unui trapez isoscel circumscris unui cerc este de 56 cm, iar unghiul sub care se vede baza mare din centrul cercului este de 120°. Să se calculeze laturile triunghiului.

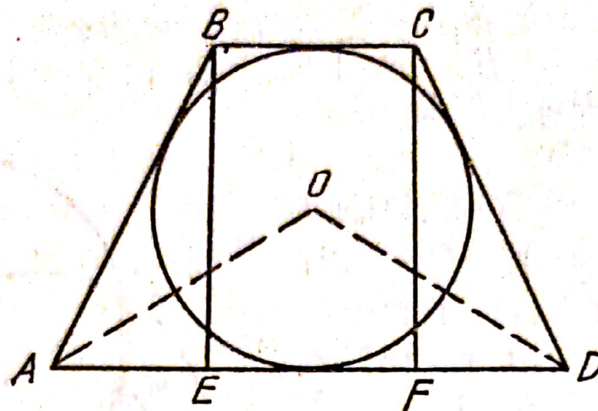


Fig. 3.32

Soluție. Trapezul isoscel fiind circumscris, vom folosi proprietatea patrulaterului circumscris.

Centrul O se va afla la intersecția bisectoarelor. Avem:

$\sphericalangle AOD = 120°, \sphericalangle OAD = \sphericalangle OAB = \sphericalangle ODA = \sphericalangle ODC$.

Rezultă că $\sphericalangle ABE = 30°$. Avem $AE = \frac{AB}{2}$, dar $AB = CD$ și $AB + CD = 28$ cm, deci $AB = 14$ cm, iar $AE = 7$ cm. Rezultă că $BC = 7$ cm, și $AD = 21$ cm.

3.33. Într-un cerc de centru O și rază R se înscrie un triunghi ABC. Razele AO și BO întîlnesc tangenta în C la cerc, respectiv în punctele A_1 și B_1. Să se găsească unghiurile triunghiului OA_1B_1 cunoscînd unghiurile triunghiului ABC.

Soluție. Avem: $\sphericalangle A_1OB_1 = \sphericalangle AOB$ ca opuse la vîrf. Însă $\sphericalangle AOB = 2C$, deci $\sphericalangle A_1OB_1 = 2C$ (vezi figura).

În triunghiul AA_1C avem:

$$\sphericalangle OA_1B_1 = 180° - (\sphericalangle ACA_1 + \sphericalangle A_1AC).$$

Însă $\sphericalangle ACA_1 = 180° - \sphericalangle ACB_1 = 180° - \sphericalangle B$

$$\sphericalangle A_1AC = 90° - \sphericalangle B, \quad \text{deci,} \quad OA_1B_1 = 2B - 90°.$$

De asemenea, în triunghiul BB_1C avem:

$$\sphericalangle BB_1C = 180° - (\sphericalangle BCB_1 + \sphericalangle CBB_1).$$

Cum $\sphericalangle BCB_1 = 180° - \sphericalangle BCA_1 = 180° - \sphericalangle A$ și $\sphericalangle CBB_1 = 90° - \sphericalangle A$,

rezultă: $\sphericalangle OB_1C = 2A - 90°$.

3.34. În triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ fie D piciorul înălțimii din A pe BC. Să se demonstreze că perpendiculara din D pe latura AC este tangentă în D la cercul ABD.

Soluție. Fie F mijlocul lui AB. Deoarece $\sphericalangle ADB$ este drept, F este centrul cercului ABD. Însă cum $FA = FB$ și $DB = DC$ rezultă că $FD \parallel AC$, adică $FD \perp DE$. Deci, DE este tangentă la cercul ABD.

3.35. Într-un cerc de centru O se duc diametrele perpendiculare AA_1 și BB_1. Fie un punct C pe arcul AB. Raza OC întîlnește cercul cu diametrul OA în punctul D, iar dreapta A_1C întîlnește cercul cu centrul în A_1 și de rază A_1A în punctul E din cadranul AOB.

Dacă $M \in$ arc AC; $N = OM \cap$ arc AD și $P =$ arc $AE \cap A_1M$, atunci arcele ND, MC și PE au lungimi egale.

(G.M., 4785, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Fie O_1 mijlocul diametrului OA, R raza cercului cu centrul în O și $r =$ raza O_1A; $2r = R$ și $A_1A = 2R$.

Notăm: $x = \sphericalangle AO_1N = 2\sphericalangle AOM = 4\sphericalangle AA_1P$.

Avem $rx = 2r \cdot \frac{x}{2} = 4r \cdot \frac{x}{4}$

deci arcele AN, AM și AP au lungimi egale.

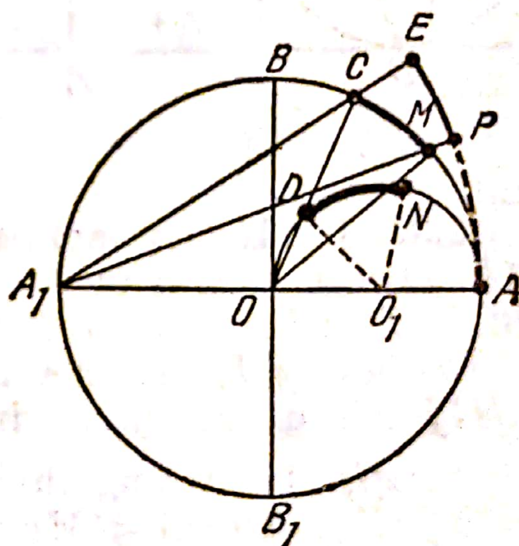


Fig. 3.35

Analog, arcele AD, AC și AE au lungimi egale. Dacă scădem din fiecare, respectiv, arcele AN, AM și AP, obținem că arcele ND, MC și PE au lungimi egale.

3.36. Un cerc cu centrul în O este tangent la dreapta a în punctul B și la cercul cu centrul în O_1 în punctul A. Să notăm cu C cel de-al doilea punct de intersecție a dreptei AB cu cercul O_1.

Dreapta O_1C intersectează a doua oară cercul în punctul D, iar dreapta a în punctul E.

Să se demonstreze că punctele A, B, D și E sînt pe un același cerc.

Soluție. Dreapta O_1O trece prin punctul A, deci $\sphericalangle O_1CA = \sphericalangle O_1AC = \sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$, deci OB este paralel cu O_1C. Apoi $\sphericalangle BAD = 180° - \sphericalangle CAD = 90°$.

Deoarece OB este perpendiculară pe a, rezultă că O_1C (sau CE) este paralelă cu OB, adică CE este perpendiculară pe a.

Deci $\sphericalangle DEB + \sphericalangle BAD = 180°$ de unde rezultă că punctele A, B, D și E sînt pe un cerc (conciclice).

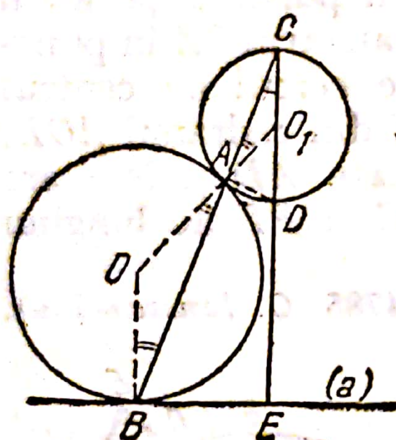


Fig. 3.36

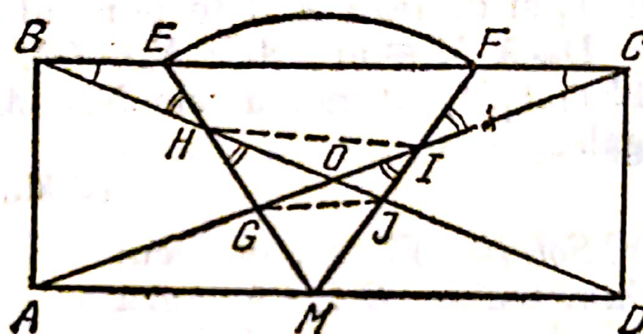


Fig. 3.37

3.37. Fie M un punct pe latura Ad a unui dreptunghi $ABCD$. Cu centrul în M descriem un cerc ce taie pe BC în E și F. Dreptele ME și MF taie diagonalele AC și BD în G și I, respectiv H și J. Să se demonstreze că $GHIJ$ este un patrulater inscriptibil.

Soluție. În triunghiul isoscel MEF: $\sphericalangle MEF = \sphericalangle MFE$. Atunci $\sphericalangle MEB = \sphericalangle MFC$, ca suplemente de unghiuri egale ($\sphericalangle MEF = \sphericalangle MFE$).

De asemenea, $\sphericalangle EBH = \sphericalangle FCI$ ca unghiuri de la baza triunghiului isoscel BOC.

Deci $\sphericalangle BHE = \sphericalangle FIC$, ca suplemente ale unor sume de unghiuri egale ($\sphericalangle EBH + \sphericalangle HEB = \sphericalangle FCI + \sphericalangle IFC$).

Atunci $\sphericalangle JHG = \sphericalangle GIJ$ ca unghiuri opuse la vîrf respectiv cu $\sphericalangle BHE$ și $\sphericalangle FIC$.

Deci patrulaterul $GHIJ$ este inscriptibil, deoarece latura GJ a patrulaterului se vede din celelalte două vîrfuri sub unghiuri egale.

Observație: Dacă punctul M coincide cu mijlocul laturii AD a dreptunghiului $ABCD$, atunci ușor se poate demonstra că patrulaterul $GHIJ$ este un trapez isoscel.

3.38. Într-un cerc se înscrie un triunghi oarecare ABC.

Perpendiculara din A pe AC mai taie cercul în M, iar perpendiculara tot din A însă pe AB mai taie cercul în punctul N. Să se arate că dreptele MN și BC sînt paralele.

(Concurs elevi, *C.I.Ț.*).

Soluție. Faceți desenul. Unghiurile BAN și CAM fiind de 90°, sînt deci egale între ele. Apoi $\sphericalangle MAB = 90° - A$ și $\sphericalangle CAN = 90° - A$. Rezultă că $\sphericalangle MAB = \sphericalangle CAN$, deci arcele MB și NC sînt egale, atunci dreptele BC și MN sînt paralele.

Observație. Se mai observă că $\sphericalangle NMC = \sphericalangle MCB$ și ele sînt alterne interne considerînd dreptele MN și BC tăiate de secanta MC. Se mai constată că centrul cercului este la intersecția diametrelor MC și NB.

3.39. Fie O intersecția diagonalelor patrulaterului $ABCD$, iar O_1, O_2, O_3, O_4 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA. Să se arate că $O_1O_2O_3O_4$ este paralelogram.

Soluție. Punctele O_1 și O_2 trebuie să se afle pe mediatoarea segmentului OB. Punctele O_2 și O_3 se află pe mediatoarea segmentului OC. Punctele O_3 și O_4 se află pe mediatoarea lui OD, iar O_4 și O_1 pe mediatoarea lui OA. Deci O_1O_2 este mediatoarea lui OB, O_2O_3 a lui OC, O_3O_4 a lui OD, iar O_4O_1 a lui OA. Se vede imediat că O_1O_2 și O_3O_4 sînt paralele, fiind perpendiculare pe BD.

La fel, O_2O_3 și O_4O_1 sînt paralele, fiind perpendiculare pe AC.

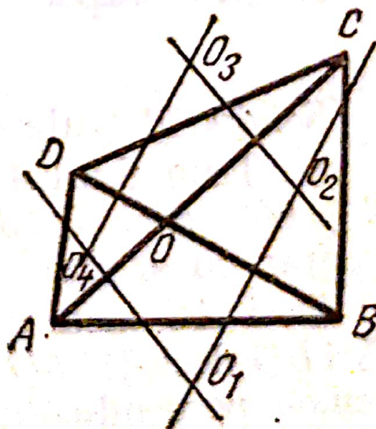


Fig. 3.39

Deci $O_1O_2O_3O_4$ este paralelogram, avînd laturile opuse paralele.

3.40. Fie unghiul $xOy = \alpha < 45°$ și M un punct pe Ox. Cercul de diametru OM intersectează pe Oy în N, iar un alt cerc de diametru MN intersectează pe Ox în P.

a). Să se arate că unghiul MNP este egal cu α oricare ar fi M pe Ox.

b). Să se determine α astfel ca patrulaterul $MNQR$ să fie romb, unde Q este mijlocul lui OM iar R simetricul lui N față de Ox.

(G.M., E: 4508, *Olimpia Popescu*).

Soluție. a). Avem $MN \perp Oy$ și $NP \perp Ox \Rightarrow$ laturile unghiului MNP perpendiculare pe Oy și respectiv pe Ox deci $\sphericalangle MNP = \alpha$ sau $\sphericalangle OMN = 90° - \alpha$ și $\sphericalangle NMP = 90° \Rightarrow \sphericalangle MNP = \alpha$.

b). $\sphericalangle NQM = 2\alpha$ (exterior triunghiului isoscel OQN)

$$\sphericalangle QNP = 90° - 2\alpha; \quad (NP \perp QM),$$

deci trebuie ca $90° - 2\alpha = \alpha$, deci $3\alpha = 90°$, $\alpha = 30°$.

3.41. Fie un triunghi echilateral ABC. Perpendiculara din A pe AB întîlnește dreapta BC în D. Fie E simetricul lui C față de AD și M intersecțiile lui CE cu AD. Ducem mediana MN în triunghiul MAC și P simetricul lui N față de BC, iar R este intersecția lui PN cu BC. Dacă latura $BC = a$ să se calculeze:

a). Perimetrul patrulaterului $ACDE$.

b). Aria triunghiului CMN.

c). În ce raport punctul R împarte segmentul BD?

(G.M.B., 4703, *L. Popescu*).

Soluție. Patrulaterul $ACDE$ este romb:

a). Triunghiul ABD este dreptunghic cu un unghi $B = 60°$, deci $\sphericalangle CDA = 30°$, $\sphericalangle DAC = 30°$ (complementar cu $\sphericalangle BAC = 60°$).

Deci AC mediană în $\triangle ABD$, MC linie mijlocie în $\triangle ABD$ deci $\sphericalangle CMD = 90°$. Patrulaterul cerut are diagonale perpendiculare care se înjumătățesc, deci este romb și deci perimetrul lui este $4a$.

b). Aria triunghiului CMN este un sfert din cea a lui ABC avînd latura de două ori mai mică deci aria $CMN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

c). RN e linie mijlocie în AOC ($AO \perp BC$) deci $RC = \frac{a}{4}$, $RB = \frac{3}{4}a$ și $RD = 2a - \frac{3}{4}a = \frac{5a}{4}$.

$$\text{Raportul } \frac{BR}{RD} = \frac{3}{5}.$$

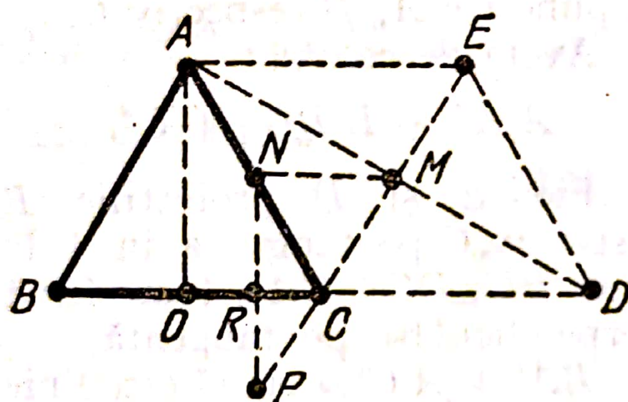


Fig. 3.41

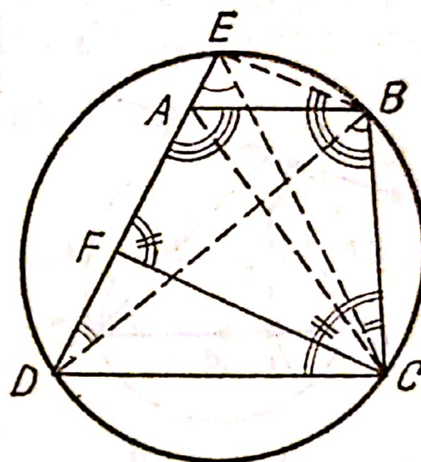


Fig. 3.42

3.42. Fie trapezul cu laturile paralele AB și CD. Fie E și F intersecțiile laturii AD cu cercul BCD și cu paralela din C la BE. Să se arate că BC este medie geometrică între AD și EF.

(R.M.F., 632, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Se observă ușor că $\sphericalangle BDE = \sphericalangle ECB$ și $\sphericalangle EBC = \sphericalangle DAB = 180° - D$.

Prin urmare triunghiul BAD este asemenea cu triunghiul EBC. Analog se arată că triunghiul BCD este asemenea triunghiului FEC.

Trapezele $ABCD$ și $EBCF$ descompunîndu-se în triunghiuri asemenea și asemenea așezate, sînt asemenea. Putem deci scrie

$$\frac{BC}{FE} = \frac{AD}{BC}, \quad \text{sau } BC^2 = AD \cdot FE.$$

3.43. Să se arate că suma distanțelor de la mijloacele laturilor unui triunghi oarecare la tangentele duse de cercul circumscris prin vîrfurile opuse acestor laturi este

$$2S \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}.$$

(G.M.B., 8838, *Martin Mettler*).

Soluție. Fie A', B', C' mijloacele laturilor $\triangle ABC$ și A'', B'', C'' proiecțiile lui A', B', C' pe tangentele duse la cercul circumscris triunghiului în punctele A, B respectiv C.

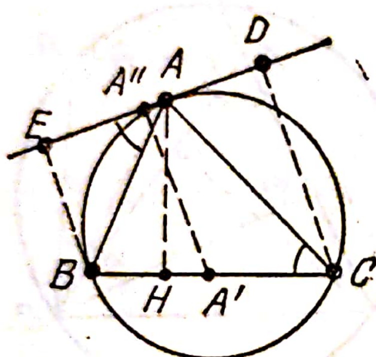


Fig. 3.43

Avem de calculat

$$A'A'' + B'B'' + C'C''.$$

Fie E și D proiecțiile B respectiv C pe tangenta în A la cerc. $BE \parallel DC \parallel A'A''$, toate fiind perpendiculare pe tangentă.

$BA' = A'C \Rightarrow A'A''$ este linie mijlocie în trapezul $BCDE$.

Deci
$$A'A'' = \frac{BE + DC}{2}.$$

Observăm că: $\triangle AHC \sim \triangle BEA$ (H fiind piciorul înălțimii din A) pentru că $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ACB = \frac{1}{2}$ măs AB.

Rezultă $\frac{AH}{BE} = \frac{AC}{BA}$, de unde $BE = \frac{BA \cdot AH}{AC}$

$$BE = \frac{c \cdot AH}{b} = \frac{c \cdot 2\frac{a \cdot AH}{2}}{b \cdot a} = \frac{2Sc}{ab}.$$

Analog găsim $DC = \frac{aSb}{ac}$.

Atunci $A'A''$ va fi egal cu:

$$A'A'' = \frac{\frac{2Sc}{ab} + \frac{2Sb}{ac}}{2} = \frac{S(b^2 + c^2)}{abc}.$$

În mod analog găsim

$$B'B'' = \frac{S(a^2 + c^2)}{abc} \quad \text{și} \quad C'C'' = \frac{S(a^2 + b^2)}{abc}.$$

3.44. Unind un punct mobil A luat pe o circumferință cu două puncte N și M fixe egal depărtate de centru așezate pe același diametru EF și ducînd coardele AMB și ANC, să se arate că suma $\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2}$ este constantă.

(R.M.F., 294, 1952, *L. Mănescu*).

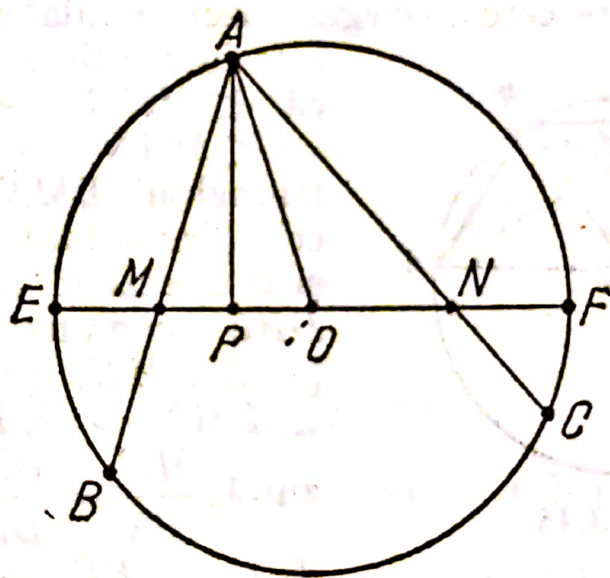


Fig. 3.44

Soluție. Notăm $OM = ON = d$.

Avem relațiile: $MA \cdot MB = R^2 - d^2$ și $NA \cdot NC = R^2 - d^2$.

Ținînd seama de aceste relații obținem

$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{MA^2 + NA^2}{(R^2 - d^2)^2}. \quad (1)$$

În triunghiurile OAM și OAN avem:

$$AM^2 = OM^2 + AO^2 - 2MO \cdot OP.$$
$$AN^2 = ON^2 + AO^2 + 2NO \cdot OP.$$

Prin adunare obținem:

$$AM^2 + AN^2 = OM^2 + ON^2 + AO^2 = 2(R^2 + d^2). \quad (2)$$

Prin urmare, relația (1) devine:

$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} = \text{constant}.$$

3.45. Într-un cerc se înscrie conturul poligonal regulat $ABCDE$ ($AB = BC = CD = DE$). Dacă se notează cu M și N intersecțiile (AC, BD), (AD, BE) să se arate că avem relația $AB^2 = AC \cdot MN$.

(G.M.B., 3554, *Gh. D. Simionescu*).

Soluție. Se observă că $\sphericalangle MBN = \sphericalangle MAN$, deoarece cuprind pe cerc arce egale, deci patrulaterul $ABMN$ este inscriptibil. Se deduce că $\sphericalangle MNB = \sphericalangle MAB = \sphericalangle MAN = \sphericalangle MBN$ și triunghiul BMN este isoscel. Triunghiul BND este și el isoscel și are unghiul DBE comun cu triunghiul BMN, prin urmare $\triangle BMN \sim \triangle BND$. Rezultă: $\dfrac{MN}{BN} = \dfrac{BN}{BD}$, de unde $BN^2 = BD \cdot MN$.

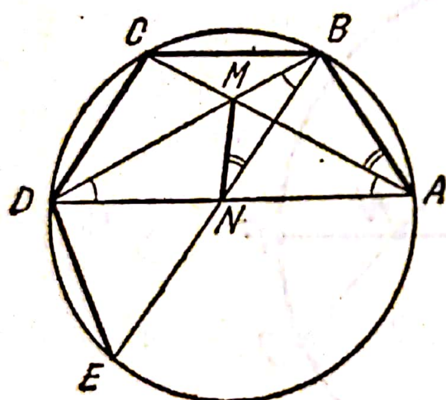


Fig. 3.45

Însă $BD = AC$, deoarece subîntind arce egale, iar $BN = AB$, deoarece triunghiul ABN este isoscel, avînd $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BNA$ = măsura unei diviziuni de pe cerc. Înlocuind în relația de mai sus găsim $AB^2 = AC \cdot MN$.

3.46. Bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului ABC intersectează cercul circumscris triunghiului în punctele A', B', C'.

$A'C' \cap BC \equiv M$; $A'B' \cap BC \equiv N$; $A'B' \cap AC \equiv P$;
$B'C' \cap AC \equiv Q$; $B'C' \cap AB \equiv R$; $A'C' \cap AB \equiv S$.

Să se arate că:

a). Dreptele MQ, NR şi PS sînt concurente.

b). $2MN = \frac{IB^2}{AB} + \frac{IC^2}{AC}$ şi cele analoage, unde I este centrul cercului înscris triunghiului.

(G.M.B., 11421, *Laura Constantinescu*).

Soluţia. 1. Unind M şi Q cu I, vom demonstra că punctele M, I, Q sînt coliniare.

Patrulaterul $CB'AI$ este inscriptibil, $\sphericalangle QB'I = \sphericalangle QCI$ (măsuri egale: $\overset{\frown}{AC'} = \overset{\frown}{BC'}$) deci

$$C_1 \equiv I_1; \text{ dar } C_1 \equiv B_1$$

$$\left(\text{măs. } \frac{\overset{\frown}{AB'}}{2}\right) \Rightarrow I_1 \equiv B_1;$$

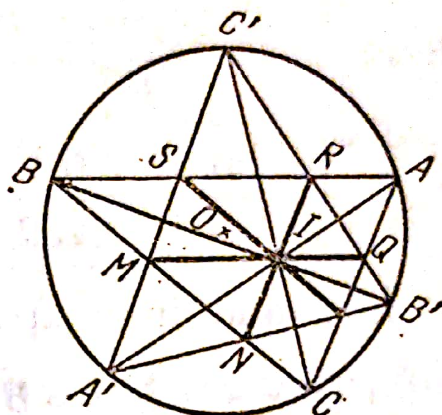


Fig. 3.46

$$IQ \parallel AB. \qquad (1)$$

Analog, în patrulaterul inscriptibil $CIMA'$, $\sphericalangle A'MC = \sphericalangle A'IC$.

$$\sphericalangle M_1 = \sphericalangle IA'C; \text{ dar } \sphericalangle IA'C = \sphericalangle ABC.$$

$$\left(\text{aceeaşi măsură } \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}\right) \Rightarrow \sphericalangle M_1 \equiv \sphericalangle ABC$$

$$\text{deci } IM \parallel AB. \qquad (2)$$

Relaţiile (1) şi (2) permit să afirmăm că punctele I, M, Q sînt coliniare.

Analog se demonstrează că punctele N, I, R şi respectiv P, I, S sînt coliniare, deci dreptele MQ, NR, PS sînt concurente, punctul lor de intersecţie fiind I, centrul cercului înscris în triunghiul dat.

2. Patrulaterele $BA'NI$ şi $CIMA'$ sînt inscriptibile $\sphericalangle BIA' = \sphericalangle BNA'$ şi respectiv $\sphericalangle A'MC = \sphericalangle A'IC$; aplicînd *teorema lui Ptolemeu*:

$$IA' \cdot BN = IN \cdot BA' + IB \cdot A'N \qquad (3)$$

$$IA' \cdot CM = IM \cdot A'C + IC \cdot MA' \qquad (4)$$

Cum: $IA' = BA' = CA'$ (centrul cercului circumscris $\triangle BIC$ este A' căci $\triangle BA'I$ este isoscel), prin adunarea relațiilor (3) și (4), se obține

$$BA'(BN + CM) = BA'(IM + IN) + IB \cdot A'N + + IC \cdot MA' \qquad (5)$$

Dar $\triangle NA'C \sim \triangle ABI$ și $\triangle MBA' \sim \triangle ACI$.

deci $$\frac{NA'}{IB} = \frac{A'C}{AB} \Rightarrow A'N = \frac{IB \cdot A'B}{AB},$$

și $$\frac{MA'}{IC} = \frac{BA'}{AC} \Rightarrow MA' = \frac{A'B \cdot IC}{AC}.$$

Înlocuind în relația (5):

$$BA'(BN + CM) = BA'(IM + IN) + \frac{IB^2 \cdot A'B}{AB} + + \frac{IC^2 \cdot A'B}{AC}.$$ Cum $IM = BM$ și $IN = NC$:

$$BN + CM - BM - NC = \frac{IB^2}{AB} + \frac{IC^2}{AC} \Rightarrow 2MN = = \frac{IB^2}{AB} + \frac{IC^2}{AC}.$$

3.47. Fie triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) și un punct M pe BC; M_b, M_c proiecțiile lui M pe AC și AB. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor MM_bA_1 și MM_cA_1 sînt egale (unde A_1 este mijlocul lui BC).

(G.M.B., 4920, *C.T. Nedelcu*).

Soluție. Triunghiurile AMM_b și AMM_c sînt dreptunghice de ipotenuză comună AM, deci înscrise în cercul de rază $\frac{AM}{2}$. Fie O mijlocul lui AM, adică $\frac{AM}{2} = OM = OM_b = OM_c$. Fie AA_1 înălțimea, deci triunghiul AA_1M este înscris tot în cercul de rază

$\frac{AM}{2} = OA_1 = OM = OM_b = OM_c$. Deci punctele A_1, M, M_b, A, M_c, sînt conciclice, de aici rezultă

$$\sphericalangle A_1M_bM = \sphericalangle A_1M_cM = \frac{\text{măs. arcului } A_1M}{2};$$

$$\frac{S(MM_bA_1)}{S(MM_cA_1)} = \frac{A_1M_b \cdot M_bM}{A_1M_c \cdot M_cM}.$$

Cele două triunghiuri MM_bA_1 și MM_cA_1 au baza comună A_1M

deci $$\frac{h_1}{h_2} = \frac{A_1M_b \cdot M_bM}{A_1M_c \cdot M_cM} \quad (1)$$

unde h_1, h_2 sînt înălțimile din M_b și M_c pe A_1M. Dar $H_1 = \frac{M_bA_1 \cdot M_bM}{2R_1}$ unde R_1 este raza cercului circumscris triunghiului MM_bA_1 și analog $h_2 = \frac{M_cA_1 \cdot M_cM}{2R_2}$ deci relația (1) devine:

$$\frac{M_bA_1 \cdot M_bM}{M_cA_1 \cdot M_cM} = \frac{M_bA_1 \cdot M_bM \cdot 2R_2}{M_cA_1 \cdot M_cM \cdot 2R_1}$$

de unde rezultă că $R_1 = R_2$.

3.48. Se dau două cercuri exterioare de centre (O_1), (O_2) și de raze $R > r$. Să se construiască un punct M din planul cercurilor în afara fîșiei cuprinse între tangentele comune exterioare, astfel că tangentele extreme MT_1, MT_2 la cele două cercuri să fie egale și perpendiculare între ele.

(G.M.B., 11509, *Șt. Musta*).

Soluție. Presupunem problema rezolvată și fie $MT_1 = MT_2$ cu $MT_1 \perp MT_2$. Triunghiul T_1MT_2 fiind dreptunghic și isoscel, avem: $\sphericalangle MT_1T_2 = \sphericalangle MT_2T_1 = 45°$; $T_1T_2 \cap (O_1) = A$; $T_1T_2 \cap (O_2) = B$. Rezultă că arcul $\overset{\frown}{T_1A} = 90°$ și $\overset{\frown}{T_2B} = 90°$. Deci T_1A, T_2B sînt laturile pătratelor înscrise în cercurile O_1, O_2. Perpen-

dicularele O_1C, O_2D pe T_1T_2 sînt apotemele celor două pătrate. Astfel că T_1T_2 este tangenta comună exterioară cercurilor O_1, O_2 de rază cît apotemele celor două pătrate.

De aici urmează construcția: descriem cercurile de centre O_1,O_2 și cu razele apotemele pătratelor înscrise în cele două cercuri. Tangenta comună exterioară acestor cercuri taie cercurile în T_1, T_2 extreme. Ducem apoi tangentele în T_1, T_2 la cele două cercuri care se taie în M. Cele două cercuri cu razele apoteme, mai au o tangentă comună exterioară și procedînd analog mai găsim un punct N.

3.49. Se dă un trapez cu bazele $AB = a$, $CD = c$ și laturile neparalele BC; DA respectiv b, d. Notînd diagonalele cu $d_1 d_2$, să se arate că:

$$d_1^2 + d_2^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

(G.M.B., 11422, *N. Păun*).

Soluție. Se ține seama de faptul că segmentul MN care unește mijloacele diagonalelor într-un patrulater oarecare și conform *teoremei lui Euler*, avem:

$$MN^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} - \frac{d_1^2 + d_2^2}{4}. \qquad (1)$$

Din $\triangle ABC: MP = \frac{a}{2}$ unde $P = MN \cap BC$.

Din $\triangle ABC: PN = \frac{c}{2}$; $MN = MP - NP = \frac{a-c}{2}$.

Înlocuind în relația (1) obținem:

$$\frac{(a-c)^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} - \frac{(d_1^2 + d_2^2)}{4}.$$

Eliminînd numitorii

$$a^2 + c^2 - 2ac = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (d_1^2 + d_2^2);$$

$$d_1^2 + d_2^2 = b^2 + d^2 + 2ac,$$

care este tocmai relația cerută.

3.50. Se dă un cerc O, o dreaptă Δ și un punct D în interiorul cercului. Se cere locul geometric al ortocentrului H al triunghiului ABC, care are vîrfurile B și C pe cercul (O), vîrful A pe dreapta și în care D este piciorul înălțimii coborîte din A pe BC.

(R.M.F., 750, *Marius Iosifescu*).

Soluție. Conform unei teoreme cunoscute, ortocentrul unui triunghi și punctul în care o înălțime taie cercul circumscris sînt simetrice în raport cu piciorul înălțimii.

Deci, dacă H' este punctul în care AD taie cercul ABC, atunci $DH' = DH$. Scriind puterea lui D față de cercul ABC obținem

$DH' \cdot DA = -DH \cdot DA = DB \cdot DC =$ puterea lui D față de cercul $(O) =$ constant.

Relația $DH \cdot DA =$ constant, ne arată că H descrie figura inversă dreptei Δ, deci un cerc care trece prin D și al cărui diametru dus prin acest punct este perpendicular pe Δ.

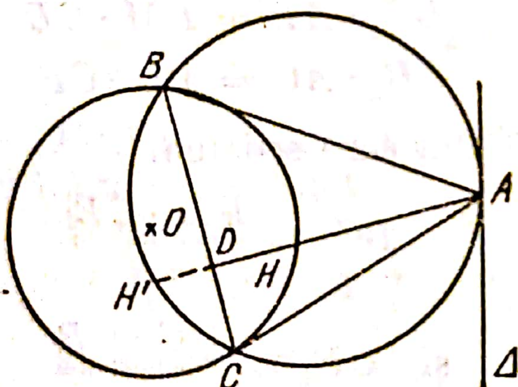


Fig. 3.50

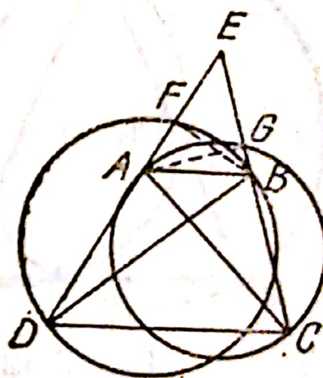


Fig. 3.51

3.51. Să se arate că prelungirea coardei comune a cercurilor descrise pe diagonalele unui trapez, ca diametru, trece prin punctul de intersecție al laturilor neparalele.

(R.M.F., 634, *Petre Stanciu*).

Soluție. Fie E intersecția laturilor neparalele AD și BC ale trapezului $ABCD$; fie F și G respectiv punctele în care cercurile descrise pe BD și AC ca diametru retaie AD și BC.

Se observă ușor că BF și AG sînt înălțimi în triunghiul EAB; prin urmare FG este antiparalelă față de AB în raport cu unghiul DEC. AB fiind paralel cu CD, FG este antiparalelă și față de CD. Prin urmare:

$$EF \cdot ED = EG \cdot EC.$$

Punctul E avînd puteri egale față de ambele cercuri se află pe axul lor radical, în cazul nostru pe coarda lor comună, cercurile fiind secante.

3.52. Se dă triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) și fie M un punct mobil pe BC. Cercurile AMB, AMC intersectează laturile AC, AB, a doua oară în punctele B_1, C_1. Să se arate că suma segmentelor BC_1 și B_1C este constantă.

(R.M.F., 597, 1953, *Cezar Coșniță*).

Soluție. Scriind în două feluri puterile lui B și C față de cercurile AMC și AMB obținem relațiile

$$BC_1 \cdot AB = BM \cdot CB$$

$$CB_1 \cdot AC = MC \cdot CB$$

din care scoatem

$$BC_1 = \frac{BM \cdot CB}{AB}$$

și $$CB_1 = \frac{MC \cdot CB}{AB}.$$

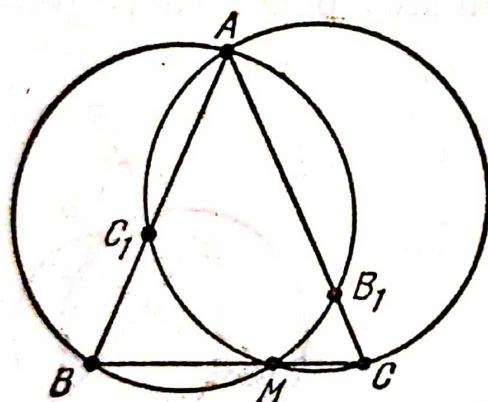


Fig. 3.52

Prin adunare obținem

$$BC_1 + CB_1 = \frac{BC^2}{AB} = \text{constant.}$$

Cînd M se află pe prelungirea lui BC diferența segmentelor BC_1 și CB_1 deci suma lor algebrică este constantă.

Problema se poate generaliza pentru un unghi oarecare. În acest caz este constantă suma segmentelor

BC_1 și $k \cdot B_1C$ unde $k = AB : AC$.

3.53. Două cercuri se intersectează în punctele A și B. Fie T_1T_2 și $T'_1T'_2$ tangentele lor comune. Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor AT_1T_2, $AT'_1T'_2$ sînt tangente. Același lucru pentru cercurile circumscrise triunghiurilor BT_1T_2 și $BT'_1T'_2$.

(R.M.F., 652, *C. Coșniță*).

Soluție. Fie O_1, O'_1 respectiv centrele cercurilor AT_1T_2, $AT'_1T'_2$.

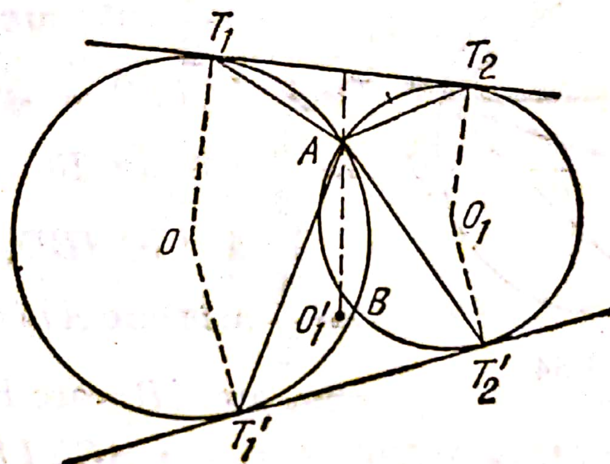


Fig. 3.53

Pentru a arăta că ele sînt tangente este suficient să arătăm că punctele O_1, A, O'_1 sînt coliniare.

Se știe că:

$$\sphericalangle O_1AT_1 = 90° - \sphericalangle T_1T_2A,\ \sphericalangle O'_1AT'_1 = 90° - \sphericalangle T'_1T'_2A.$$

Prin urmare

$$\sphericalangle O_1AO'_1 = 180° - (\sphericalangle T_1T_2A + \sphericalangle T'_1T'_2A) + \sphericalangle T_1AT'_1.$$

Remarcînd că $\sphericalangle T_1T_2A = \frac{1}{2}$ măs arc AT_2, că $\sphericalangle T'_1T'_2A = \frac{1}{2}$ măs arc AT'_2 și că $\sphericalangle T_1CT'_1 = \sphericalangle T_2C_1T'_2$ (unghiuri cu laturile paralele), deci că $\sphericalangle T_1AT'_1 = \frac{1}{2}$ măs arc $T_2AT'_2$ rezultă $\sphericalangle O_1AO'_1 = 180°$.

Enunțul este astfel demonstrat. O demonstrație analoagă pentru cercurile BT_1T_2 și BT'_1T_2.

3.54. Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-un cerc astfel că $AB = BC$. Notăm că I intersecția diagonalelor AD, BE și cu J intersecția diagonalelor BD, EC. Să se arate că IJ este paralelă cu AC.

(R.M.F., 591, 1953, *N.N. Mihăileanu.*)

Soluție. Patrulaterul $IJDE$ este inscriptibil deoarece $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BEC = \frac{1}{2}$ măs arc AB.

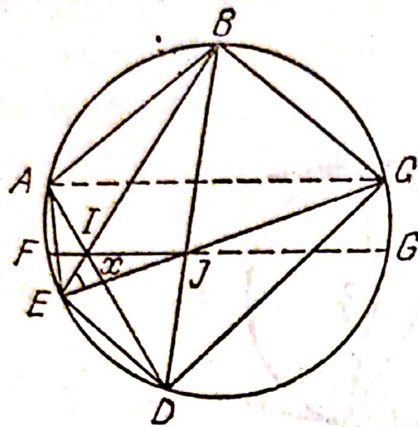


Fig. 3.54

Deci $\sphericalangle IJB = \sphericalangle IDEB = \frac{1}{2}$ măs (arc BC + arc CD). Însă $\sphericalangle (BD, AC) = \frac{1}{2}$ măs (arc AB+arc CD) și cum arc AB=arc BC, rezultă

$$\sphericalangle IJB = \sphericalangle (BD, CA) \text{ sau } AC \parallel IJ.$$

Se mai poate arăta prelungind IJ pînă taie cercul în F și G; $\sphericalangle JID = \sphericalangle JED$, sau $\frac{1}{2}$ măs (arc AF + + arc GD) $= \frac{1}{2}$ măs (arc CG + arc GD), de unde arc AF = arc CG, sau $AC \parallel GF$.

3.55. Patru cercuri egale trec prin același punct O. Notînd cu M, N, P, Q, intersecțiile consecutive ale cercurilor, să se arate că aceste puncte sînt vîrfurile unui paralelogram.

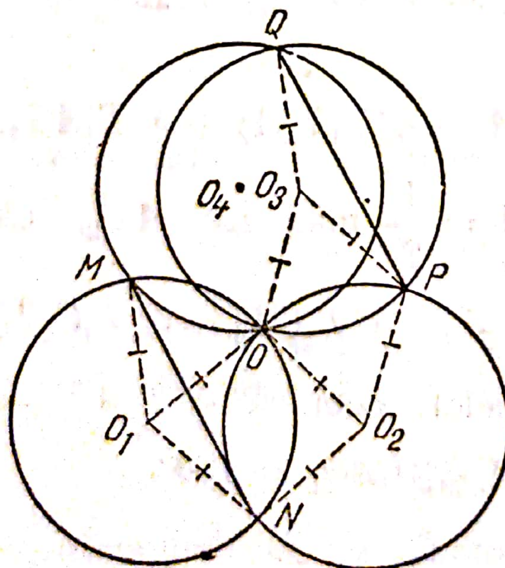


Fig. 3.55

Soluție. Fie O_1, O_2, O_3, O_4 centrele celor patru cercuri egale.

Se observă, de îndată, că patrulaterele O_1OO_2N și O_2OO_3P sînt romburi și astfel: $NO_1 \| O_2O \| PO_2$.

Analog, $O_1M \| O_3Q$.

Rezultă de aici că triunghiurile isoscele NO_1M, PO_3Q sînt egale, deci, $MN \| PQ$; ceea ce arată că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

3.56. Într-un triunghi dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A ducem bisectoarea unghiului A care întîlnește pe BC în D, iar prin D ducem perpendiculara pe BC, care taie pe AB în E și pe AC în F.

a). Să se arate că $BD = DF$ și $CD = DE$.

b). Să se arate că simetricul punctului E față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BFC și că simetricul punctului F față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BEC, iar aceste două cercuri sînt egale între ele.

c). Să se arate că unghiurile BEF și BCF sînt egale și că $AE \cdot BF = AF \cdot CE$.

Soluția. a). Patrulaterul $ABDF$ este inscriptibil pentru că unghiurile opuse BAF și BDF sînt suplementare (fiecare e un unghi drept). AD fiind bisectoare, înseamnă că $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = 45°$. De aici rezultă că $\widehat{BD} = \widehat{DF}$. Dar, într-un cerc, la arce egale corespund coarde egale, deci $BD = DF$.

Patrulaterul $ADCE$ este și el inscriptibil pentru că segmentul EC se vede sub același unghi (90°) și din A și din D.

De aici rezultă că $\sphericalangle DEC = \sphericalangle DAC = 45°$.

Triunghiul DEC fiind dreptunghic în D, înseamnă că $\sphericalangle DEC = 90° - 45° = 45°$, deci triunghiul DEC este isoscel și prin urmare $CD = DE$.

b). Vom arăta că patrulaterele $BE'CF$ și $BECF'$ sînt inscriptibile și că sînt egale.

Din patrulaterul inscriptibil $ADCE$ avem că $\sphericalangle AEF = \sphericalangle FCB$.

Dar $\sphericalangle AEF = \sphericalangle BED$ ca fiind simetrice față de BC. Deci $\sphericalangle BEF = \sphericalangle FCB$. Prin urmare, segmentul BF se vede sub același unghi și din E' și din C, deci patrulaterul $BE'CF$ este inscriptibil; deci E' se găsește pe cercul circumscris triunghiului BFC. Unghiul DCF'

este egal cu unghiul FCD, fiind simetrice față de BC. Dar, am văzut că $\sphericalangle AEF = \sphericalangle FCD$ și $\sphericalangle BE'F = \sphericalangle AEF$.

De aici rezultă că $\sphericalangle DCF' = \sphericalangle AEF$, deci segmentul BF' se vede sub același unghi și din E și din C, deci patrulaterul $BECF'$ este inscriptibil și deci F' se află pe cercul circumscris triunghiului BEC. Să arătăm că cele două patrulatere inscriptibile $BFCE'$ și $BECF'$ sînt egale.

Avem: $BE' = BE$; $BF = BF'$; $FC = F'C$; $CE' = CE$ ca segmente simetrice față de dreapta BC.

De aici rezultă că $\triangle(BE'C) = \triangle(BEC)$; $\triangle(BFC) = \triangle(BF'C)$. Deci cele două patrulatere sînt formate din două triunghiuri respectiv egale și la fel așezate, deci cele două patrulatere sînt egale și prin urmare cercurile circumscrise lor sînt egale.

c). Din patrulaterul inscriptibil $ABDF$ avem $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ADF$.

Din patrulaterul inscriptibil $ADCE$ avem $\sphericalangle ADF = \sphericalangle ADE = \sphericalangle ACE$.

Din cele două șiruri de egalități rezultă că $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ACE$ sau $\sphericalangle EBF = \sphericalangle ACE$.

Din aceste egalități rezultă că triunghiurile dreptunghice ABF și ACE sînt asemenea, avînd cîte un unghi ascuțit egal.

Din asemănarea acestor triunghiuri avem:

$$\frac{AF}{AE} = \frac{BF}{CE}, \quad \text{de unde } AE \cdot BF = AF \cdot CE.$$

3.57. Se dă un triunghi ABC dreptunghic în A. Pe prelungirea înălțimii AD se ia punctul M astfel ca $AD = DM$, fie E și F picioarele perpendicularelor duse din D respectiv pe AB și AC. Dreapta DF întîlnește ME în G, iar DE întîlnește MF în H.

Dreapta GH întîlnește AC în N, iar AB în P. Să se arate că patrulaterul $NBPC$ este inscriptibil și că $2PN = 5AD$.

Soluție. Fie O intersecția (EF, AD), D este centrul de greutate al triunghiului MFE deoarece MO este mediană iar $OD = \frac{1}{2} DA = \frac{1}{2} DM$.

Rezultă că și FG și EH sînt mediane, deci $GH \parallel EF$.

Putem scrie $\sphericalangle PNF = \sphericalangle EFA = \sphericalangle OAF = \sphericalangle B$.

Latura PC fiind văzută din N și B sub unghiuri egale patrulaterul $NBPC$ este inscriptibil.

Mai avem $PG = EF = AN = AD$; ($PGFE$ și $HNFE$ sînt paralelograme)

$$\text{și } GH = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} AD.$$

De asemenea

$$PN = PG + GH + HN = \frac{5}{2} AD, \text{ deci } 2PN = 5AD.$$

3.58. Să se construiască un triunghi, cunoscînd vîrful A, centrul său de greutate și centrul de greutate al triunghiului cu vîrfurile în mijloacele distanțelor dintre vîrfuri și centrul cercului circumscris.

(R.M.F., 620, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, G' centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ obținut unind mijloacele razelor OA, OB, OC.

Se observă că M, mijlocul lui BC se poate construi luînd în prelungirea lui AG, $GM = \frac{1}{2} AG$.

Se mai observă de asemenea ușor că $M'(OM; B'C')$ este mijlocul lui OM și deci $A'M' \parallel AM$ și $A'M' = \frac{1}{2} AM$.

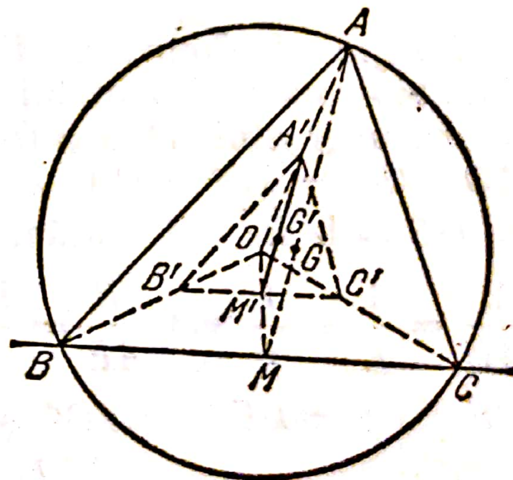


Fig. 3.58

Prin urmare punctele A' și M' pot fi și ele construite, căci G' este cunoscut. Odată A' construit, vom putea construi punctul O, căci $AA' = A'O$.

Cercul $O(OA)$ va tăia perpendiculara în M pe OM în punctele B și C.

Problema este întotdeauna posibilă.

3.59. La două cercuri tangente exterior se duc tangentele lor comune exterioare.

a). Să se arate că semilungimea tangentei comune mărginită la punctele de contact este media geometrică a razelor cercurilor, iar distanța punctului de contact al cercurilor la una din tangentele comune este media armonică a razelor sau a patra proporțională între raze și semisuma razelor cercurilor.

b). Să se exprime aria trapezului format de cele două tangente și coardele de contact în funcție de razele cercurilor.

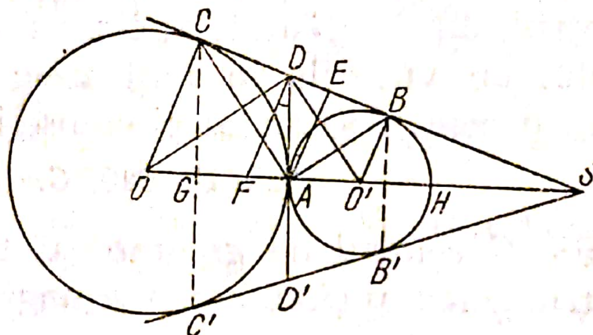


Fig. 3.59

Soluție. a). Construim figura. Ținem seama că DO este bisectoarea unghiului CDA, iar DO' este bisectoarea unghiului $ADB \Rightarrow OD \perp O'A$. Din $\triangle ODO'$ avem $AD \perp OO' \Rightarrow AD^2 = OA \cdot AO'$, $AD^2 = Rr$; $CD = DA = DB = \sqrt{Rr}$. Să arătăm că:

$$\frac{2}{AE} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \text{ sau } \frac{R}{AE} = \frac{R+r}{2r} \Rightarrow AE \cdot \frac{R+r}{2} = R \cdot r,$$

$DF \perp CS \Rightarrow DF \parallel O'B \parallel OC$ și cum $CD = DB \Rightarrow DF =$

$$= \frac{R+r}{2},$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ADF \Rightarrow \frac{AD}{DF} = \frac{AE}{AD} \text{ sau } \frac{\sqrt{Rr}}{DF} = \frac{AE}{\sqrt{Rr}}$$

$$\text{sau } AE \cdot \frac{R+r}{2} = Rr, \quad AD \perp AE.$$

b). aria $BB'C'C = \frac{(BB' + CC')GH}{2} = DD' \cdot GH =$

$$= 2\sqrt{Rr} \cdot GH = 2\sqrt{Rr} \cdot \frac{4Rr}{R+r} = \frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

$$\frac{R}{r} = \frac{OS}{O'S}; \quad \frac{R-r}{R} = \frac{OS - O'S}{OS} = \frac{R+r}{OS};$$

$$OS = \frac{R(R+r)}{R-r}; \quad O'S = \frac{r(R+r)}{R-r}; \quad OC^2 = OS \cdot OG;$$

$$OG = \frac{R^2(R-r)}{R(R+r)} = \frac{R(R-r)}{R+r}; \quad O'H = \frac{r(R-r)}{R+r};$$

$$\Rightarrow GH = OO' - OG + O'H = \frac{4Rr}{R+r}.$$

3.60. Se dau două cercuri de centre A și B și de raze R și r, iar distanța dintre centrele lor este $AB = d$. Se duce cercul de diametru CD, C și D fiind punctele de contact ale unei tangente comune exterioare.

1°. Să se arate că dacă cercurile sînt exterioare și numai în acest caz, cercul de diametru CD taie linia centrelor în două puncte. Care trebuie să fie pozițiile a primelor două cercuri pentru ca al treilea să fie tangent la linia centrelor?

2°. Fie M și N punctele unde cercul al treilea taie AB. Să se arate că $AM \cdot AN = R^2$ și $BM \cdot BN = r^2$.

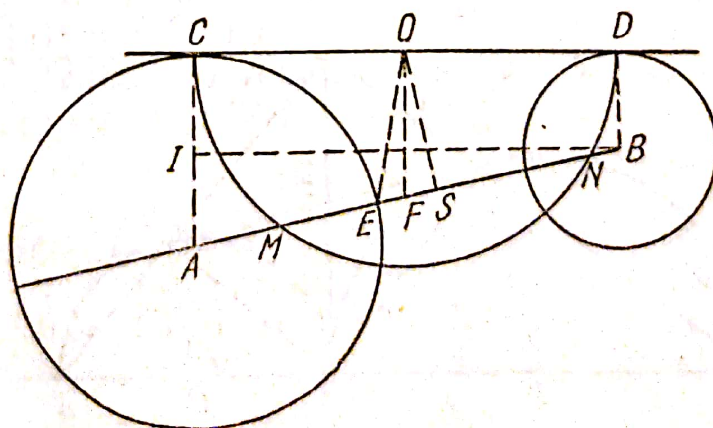


Fig. 3.60

Soluția 1°. Pentru ca centrul de diametru CD să taie linia centrelor trebuie ca distanța de la O la MN să fie mai mică decît $CO = CD : 2$, dar $OS < OE < < CO \Rightarrow OS < CO$, deci AD este secantă față de cercul de diametru CD.

În cazul cînd acest cerc este tangent la AB, $OS = = CD$ și cele două cercuri date sînt tangente exterioare, iar OS devine tangentă comună interioară.

2°. Avem $AC \perp CD$ și $DB \perp CD \Rightarrow AC$ și AD sînt tangente la cercul cu diametrul CD.

Puterile punctelor A și B față de cercul cu diametrul CD sînt $AC^2 = AM \cdot AN$ și $BD^2 = BN \cdot BM$ sau $R^2 = AM \cdot AN$ și $r^2 = BN \cdot BM$.

3.61. Se dă un segment de dreaptă AB. Fie P un punct oarecare de pe AB. De aceeași parte a lui AB se duc semicercurile cu diametrele AP și PB și fie MN tangenta lor comună.

1°. Să se arate că unghiul MPN este drept.

2°. Dreptele AM și BN se taie în I. Să se afle locul geometric al punctului I cînd P se deplasează pe AB.

3°. Segmentul $AB = a$ fiind dat să se determine poziția punctului P astfel ca tangenta comună MN să aibă o lungime dată l.

4°. Ce relație trebuie să existe între l și a pentru ca să fie posibilă construcția? Care este valoarea maximă pe care o poate lua segmentul MN?

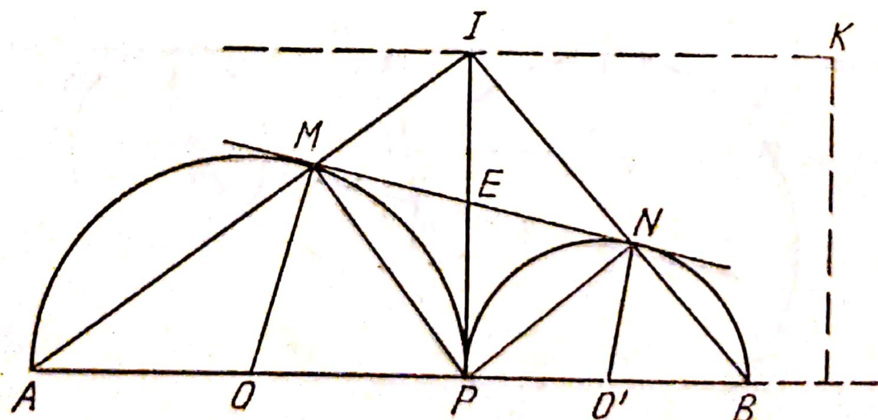


Fig. 3.61

Soluție. Ducem tangenta comună interioară care o taie pe cea exterioară în E.

$$ME = EP = EN = \frac{MN}{2} \Rightarrow \sphericalangle MPN = 90° \text{ sau}$$

$$\sphericalangle PNM + \sphericalangle NPE + \sphericalangle EPM + \sphericalangle PMN = 180°, \text{ dar}$$
$$\sphericalangle EPM = \sphericalangle PME \text{ și } \sphericalangle ENP = \sphericalangle NPM.$$

2°. $\sphericalangle NO'B = \sphericalangle POM = 2\sphericalangle OPN \Rightarrow \sphericalangle OPN =$
$= \sphericalangle PAM.$

$$\Rightarrow PN \parallel AI; \quad AI \perp PM; \quad IB \perp PN \Rightarrow IB \parallel MP,$$

deci patrulaterul $MINP$ este dreptunghic.

Cum $\sphericalangle AIB = 90°$, locul lui I este semicercul de diametru AB.

3°. În dreptunghiul $MPNI$ dreapta PE trece prin I, $MN = PI$.

Construcția. Pe AB se duce o perpendiculară $SK = l$, iar prin K o paralelă la AB. Dacă această paralelă taie semicercul de diametru AB, problema este posibilă.

4°. Dacă $l < \frac{a}{2}$ avem două soluții; dacă $l = \frac{a}{2}$ avem o singură soluție cercurile sînt egale și tot atunci avem max $MN = \frac{a}{2}$; iar dacă $l > \frac{a}{2}$ construcția nu este posibilă.

3.62. Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Paralelele duse prin A și B respectiv la BC și AD taie dreapta CD în punctele E și F. Să se arate că:

a). $AB^2 = CE \cdot FD$.

b). Patrulaterul $ABFE$ este inscriptibil.

c). Trapezele $ABCE$ și $ABFD$ sînt asemenea.

(R.M.F., 91, 1951, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Fie M și N intersecțiile dreptelor AE și BF cu cercul circumscris patrulaterului $ABCD$. Triunghiurile CEM și DFN sînt asemenea deoarece $\sphericalangle CME = \sphericalangle DFN$ și $\sphericalangle DNF = \sphericalangle CEM$. Rezultă

$$\frac{CM}{CE} = \frac{FD}{ND}.$$

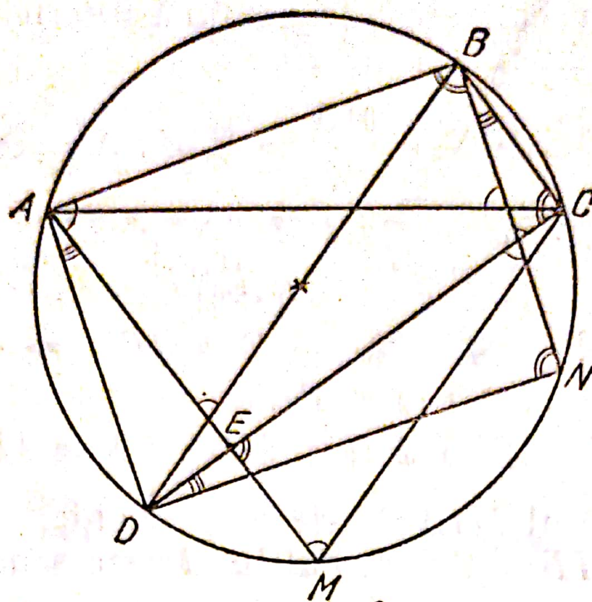


Fig 3.62

Coardele CM și DN sînt egale cu AB căci subîntind arce egale deci $AB^2 = CE \cdot FD$.

b). $\sphericalangle ABN + \sphericalangle AEC = \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{DM} + \widehat{MN} + \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{DM})$; dar $\widehat{AB} = \widehat{MN} + \widehat{NC} = \widehat{DM} + \widehat{MN}$ deoarece $\widehat{DM} = \widehat{NC}$.

$\Rightarrow \sphericalangle ABN + \sphericalangle AEC = 180°$, deci patrulaterul $ABFE$ este inscriptibil.

c). Din asemănarea triunghiurilor AED și BFC avem:

$$\frac{BC}{BF} = \frac{AE}{AD} \text{ și ținînd seama de a) că } \frac{AB}{EC} = \frac{FD}{AB};$$

și că $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ADF$ iar $\sphericalangle BCE = \sphericalangle ABF$ rezultă că trapezele $ABCE$ și $ABFD$ sînt asemenea.

3.63. Din punctul M de intersecție a diagonalelor patrulaterului convex $ABCD$ inscriptibil. Se duc MA_1, MB_1, MC_1, MD_1 perpendiculare respectiv pe AB, BC, CD, DA.

Din M se duc apoi MA_2, MB_2, MC_2, MC_3 perpendiculare respectiv pe A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1.

Să se arate că patrulaterul $A_2B_2C_2D_2$ este inscriptibil.

(G.M., 15201, *S. Stan*).

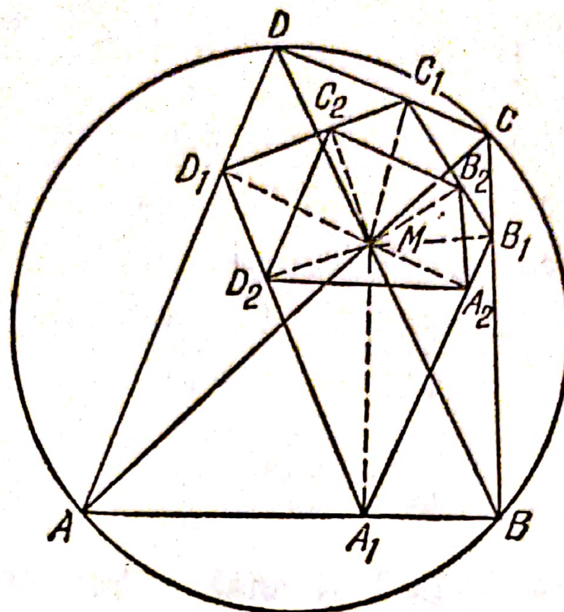


Fig. 3.63

Soluție. Patrulaterele AA_1MD_1, BB_1MA_1, CC_1MB_1 și DD_1MC_1 sînt inscriptibile.

$$\sphericalangle A_1D_1M = \sphericalangle A_1AM = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC =$$
$$= \sphericalangle MDC_1 = \sphericalangle MD_1C_1 \Rightarrow MD_2 = MC_2.$$

Analog avem $MA_2 = MB_2 = MC_2$.

Punctele A_2, B_2, C_2, D_2 sînt egal depărtate de M deci $A_2B_2C_2D_2$ este inscriptibil.

3.64. Medianele AA_1, BB_1, CC_1 ale triunghiului oarecare ABC taie cercul circumscris în punctele A_2, B_2, C_2.

Să se arate că:

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} + \frac{BB_1}{B_1B_2} + \frac{CC_1}{C_1C_2} \geqslant 9.$$

(G.M.B., 12357, *F. Pîrvănescu*).

Soluție. $AA_1^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$; $AA_1 \cdot A_1A_2 = BA_1 \cdot$ $\cdot A_1C = \dfrac{a^2}{4}$.

$$A_1A_2 = \frac{a^2}{4} : \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2}{2\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}};$$

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}\cdot\frac{2\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{a^2} =$$

$$= \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{a^2} = \frac{2(b^2+c^2)}{a^2} - 1.$$

Inegalitatea cerută se mai scrie:

$$\frac{2(b^2+c^2)}{a^2} + \frac{2(c^2+a^2)}{b^2} + \frac{2(a^2+b^2)}{c^2} - 3 \geqslant 9 \quad \text{sau}$$

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + \geqslant 6, \quad \text{cunoscută}$$

deoarece $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geqslant 2$ și analoagele.

3.65. Un trapez isoscel $ABCD$, $(BC \parallel AD,\ BC = 2a,\ AD = 2b)$ este circumscris unui cerc de centru O. Fie M și N punctele în care CD, respectiv AB sînt tangente cercului și E punctul de intersecție al diagonalelor.

1). Să se calculeze raza cercului în funcție de a și b.

2). Să se arate că punctele M, E și N sînt coliniare.

3). Să se calculeze ME (tot în funcție de a și b).

4). Paralela din O la bază taie pe CD în P. Din compararea segmentelor OP, OM și EM să se deducă inegalitățile dintre media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor pozitive a și b, înțelegîndu-se prin media armonică numărul x unde

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

(G.M.B., 4471, *L. Panaitopol*).

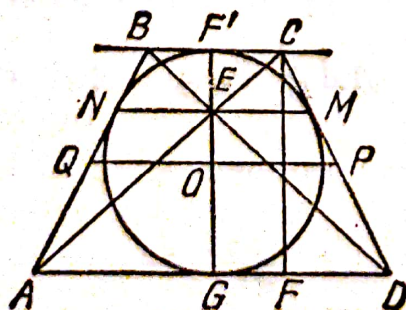


Fig. 3.65

Soluție. 1). Diametrul cercului este egal cu înălțimea trapezului. Ducem CF perpendiculară pe AD și în triunghiul dreptunghic CFD aplicăm *teorema lui Pitagora*:

$$CF = \sqrt{CD^2 - FD^2}.$$

Bazîndu-ne pe faptul că tangentele dintr-un punct la un cerc sînt egale (ne referim la segmentele determinate de punctul inițial și de punctul de contact) $CD = a + b$.

Mai știm că $FD = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{2b - 2a}{2} = b - a.$

Deci $CF = \sqrt{(a + b)^2 - (b - a)^2} = 2\sqrt{ab}.$

Notînd cu R raza cercului înscris în trapez, avem: $R = \sqrt{ab}.$

2). Știm că $\dfrac{CM}{MD} = \dfrac{a}{b}.$

De asemenea, raportul de asemănare al triunghiurilor BEC și EAD este $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{a}{b}$. Deci, ducînd prin E înălțimea trapezului $F'C$ obținem raportul înălțimilor triunghiurilor de mai sus $\dfrac{EF'}{EG} = \dfrac{a}{b}$ deci $\dfrac{BN}{NA} = \dfrac{F'E}{EG} = \dfrac{CM}{MD} = \dfrac{a}{b}$ și N, E, M sînt coliniare.

3). Știm că $\dfrac{F'E}{EG} = \dfrac{a}{b}$ deci $\dfrac{F'E + F'G}{EG} = \dfrac{a + b}{b}$ sau

$$\frac{2\sqrt{ab}}{EG} = \frac{a + b}{b} \text{ sau } EG = \frac{2b\sqrt{ab}}{a + b}.$$

$$EO = EG - R = \frac{2b\sqrt{ab}}{a + b} = \sqrt{ab} =$$

$$= \frac{2b \cdot \sqrt{ba} - \sqrt{ab} \cdot a - \sqrt{ab} \cdot b}{a + b} = \frac{b\sqrt{ab} - \sqrt{ab} \cdot a}{a + b} =$$

$$= \frac{(b - a)\sqrt{ab}}{a + b}.$$

$$EM = \sqrt{OM^2 - EO^2} = \sqrt{ab - \frac{(b - a)^2 ab}{(a + b)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{ab(4ab)}{(a + b)^2}} = \frac{2ab}{a + b}.$$

Ducînd prin O paralela QP la baze (P este pe CD, Q pe BA) obținem $OP = \frac{2a + 2b}{2} = a + b$ (jumătate din linia mijlocie), pentru că ipotenuza este mai mare decît cateta: $OP > OM > EM$ și $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > > \frac{2ab}{a+b}$. Știm însă că $\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ și deci $x = \frac{2ab}{a+b}$, ceea ce rezolvă complet problema: media armonică este mai mică decît cea geometrică, care este mai mică decît cea aritmetică. Problema este astfel demonstrată. Egalitatea are loc dacă $a = b$.

3.66. Se dă un cerc, un punct M pe cerc și o dreaptă dată (D) exterioară cercului. Fie N punctul în care paralela dusă prin M la (D) retaie cercul dat, iar P și Q două puncte fixe pe care, diferite de M și N. Dreptele MP și MQ taie dreapta (D) în A și B, iar dreptele NP și NQ taie dreapta (D) în C și D.

a). Să se arate că triunghiurile BDQ și MNQ sînt asemenea.

b). Să se arate că $BA \cdot BD \cdot CN \cdot CP = = BM \cdot BQ \cdot CA \cdot CD$.

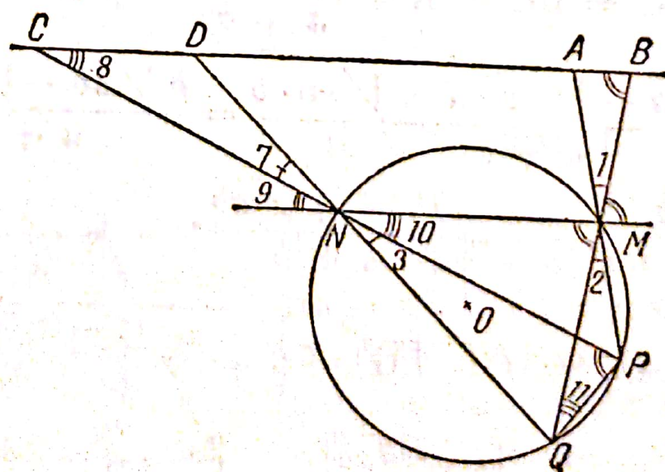


Fig. 3.66

Soluție. Triunghiurile BDQ și MNQ sînt asemenea. Triunghiurile ACP și MNP sînt asemenea.

$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle PMQ = \sphericalangle PNQ;$$

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle NMQ = \sphericalangle NPQ.$$

$$\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle NPQ.$$

$$\sphericalangle CND = \sphericalangle PNQ = \sphericalangle PMQ;$$

$$\sphericalangle CDN = \sphericalangle CNP = \sphericalangle MQP.$$

$$\Rightarrow \triangle DCN \sim \triangle MPQ. \text{ Deci:}$$

$$\frac{BD}{MN} = \frac{QB}{QM} = \frac{QD}{QN}; \quad \frac{AB}{QP} = \frac{MA}{NQ} = \frac{MP}{NB};$$

$$\frac{AC}{MN} = \frac{PA}{PM} = \frac{PC}{NP}; \quad \frac{CD}{PQ} = \frac{DN}{MP} = \frac{CN}{MQ}.$$

Mai putem scrie

$$\frac{BD}{MN} \cdot \frac{AB}{QP} = \frac{QB}{QM} \cdot \frac{MP}{NB}; \quad \frac{PC}{PN} \cdot \frac{CN}{MQ} = \frac{AC}{MN} \cdot \frac{CD}{PQ},$$

de unde deducem

$$\frac{BD \cdot AB \cdot PC \cdot CN}{MN \cdot QP \cdot PN \cdot QM} = \frac{QB \cdot MB \cdot AC \cdot CD}{MN \cdot QM \cdot NP \cdot QP}.$$

Numitorii fiind egali, vor fi egali și numitorii din egalitatea precedentă.

3.67. Se consideră un patrulater inscriptibil $ABCD$; laturile AB și CD se taie în punctul E, iar laturile AD și BC se taie în F. Bisectoarea unghiului AED taie laturile BC și AD respectiv în G și H, iar bisectoarea unghiului AFB taie laturile CD și CB în I și J. Să se arate că patrulaterul $IJGH$ este romb.

Soluție. Notăm cu $M = IJ \cap GH$. Avem $\sphericalangle EMF =$ $= 180° - \sphericalangle BFJ - \sphericalangle IEF - \sphericalangle EFG = 180° -$

$$- \frac{180° - A - D + 180° - A - B}{2} - (180° - C) = 90°.$$

Fig. 3.67

În triunghiul JEI, M este bisectoarea și înălțimea; deci triunghiul JEI este isoscel $\Rightarrow JM = MI$.

În triunghiul FGH, FM este bisectoarea și înălțimea, deci triunghiul FGH este isoscel, $GM = MH$.

$\Rightarrow$ patrulaterul $JGIH$ este romb.

3.68. Se consideră un trapez $ABCD$, dreptunghic în A și D. Se prelungește baza AB cu $BB_1 = k \cdot AB$ și baza DC cu $CC_1 = k \cdot DC$. Diagonalele trapezului $ABCD$ se întîlnesc în E, diagonalele trapezului AB_1C_1D se întîlnesc în E_1, iar dreptele AD și EE_1 se taie în F. Să se arate că:

a). Triunghiurile FBB_1 și FCC_1 sînt asemenea.

b). Dreptele AD, BC și B_1C_1 sînt concurente.

c). $\dfrac{1}{EE_1} = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{DC}\right)$.

d). Centrele cercurilor înscrise în triunghiul FBC și FB_1C_1 sînt pe dreapta EE_1.

(G.M.B., 14247, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). $\dfrac{FB}{FC} = \dfrac{AB}{DC}$; $\dfrac{FB_1}{FC_1} = \dfrac{AB + BB_1}{DC + CC_1} = \dfrac{AB(1+k)}{DC(1+k)} = \dfrac{AB}{DC}$; $\dfrac{FB}{FC} = \dfrac{FB_1}{FC_1} = \dfrac{BB_1}{CC_1} = \dfrac{AB}{DC}$.

b). Din triunghiul MDC avem $\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC}$.

În triunghiul M_1DC_1 avem $\frac{M_1A}{M_1D} = \frac{AB_1}{DC_1} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{M_1A}{M_1D} \Rightarrow M \equiv M_1.$$

c). $\frac{1}{FE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$; $\frac{1}{FE_1} = \frac{1}{AB_1} + \frac{1}{DC_1}$;

$$EF = \frac{AB \cdot CD}{AB + CD}; \quad FE_1 = \frac{AB_1 \cdot DC_1}{AB_1 + DC_1} =$$

$$= \frac{AB(1+k)\,DC(1+k)}{(1+k)\,(AB+DC)}.$$

$$EE_1 = FE_1 - FE = \frac{AB \cdot DC(1+k)}{AB + DC} - \frac{AB \cdot CD}{AB + DC} =$$

$$= \frac{AB \cdot DC(1+k-1)}{AB + DC} = \frac{AB \cdot DC \cdot k}{AB + DC}.$$

$$\frac{1}{EE_1} = \frac{AB + DC}{AB \cdot DC \cdot k} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}\right).$$

d). $\triangle ABF \sim \triangle DFC$. Bisectoarea $\sphericalangle BFC$ este dreapta EE_1. Pe această bisectoare se află și centrul cercului înscris în triunghiul BFC. La fel centrul cercului B_1C_1F este pe FE_1.

3.69. Se dau două cercuri O_1 și O_2 de raze R și r secante în A și B. Tangentele în A la cercul C_2 taie cercul O_1 în C iar tangenta în A la O_1 taie cercul O_2 în D.

Să se arate că $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

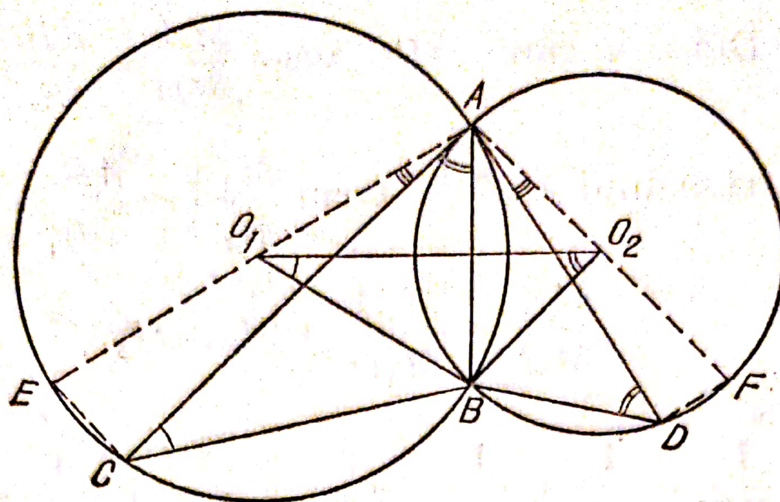


Fig. 3.69

Soluție. Ducem diametrele AO_1E și AO_2F.

$\sphericalangle CAE = \sphericalangle DAF$ avînd același complement $\sphericalangle CAD$.

$$\triangle AEC \sim \triangle ADF \Rightarrow \frac{AC}{DA} = \frac{2R}{2r} = \frac{R}{r}.$$

$$\triangle ABC \sim \triangle O_1BO_2 \sim \triangle ABD.$$

$$\frac{BC}{R} = \frac{AB}{r} \text{ sau } \frac{BC}{AB} = \frac{R}{r}; \quad \frac{BD}{AB} = \frac{r}{R}.$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{R^2}{r^2} \Rightarrow \frac{AC^2}{DA^2} = \frac{BC}{BD} \text{ sau } AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC.$$

3.70. Fie un trapez $ABCD$ înscris în cercul O de rază R, cu bazele AB și CD respectiv egale cu l_6 și l_3 așezate de o parte și de alta a centrului a cercului O.

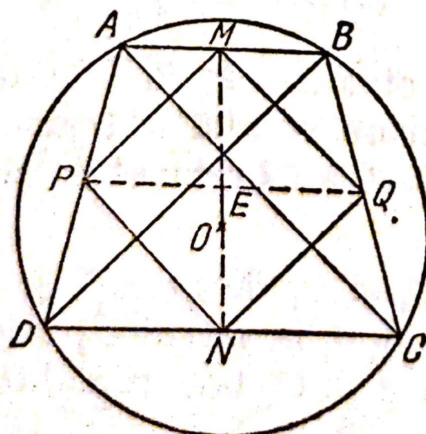


Fig. 3.70

a). Să se arate $AD = l_4$.

b). Să se arate că patrulaterul $MQNP$ care unește mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA este un pătrat.

c). Să se calculeze în funcție de R lungimile diagonalelor trapezului dat și aria acestui trapez.

Soluție. a). $\widehat{BC} = \widehat{AD} = \dfrac{360° - 60° - 120°}{2} = 90°;$

$$AD = BC = l_4.$$

b). $MQ = \parallel PN = \parallel \dfrac{AC}{2}$. Dar $\sphericalangle AED = 90° \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sphericalangle MPN = 90°$$

E este intersecția diagonalelor AC și BD.

$AC = BD \Rightarrow M'P = QN \Rightarrow MPNQ$ este pătrat.

c). $PE = \dfrac{PQ}{2} = \dfrac{R + R\sqrt{3}}{4}$; $ME = \dfrac{PQ}{2} =$

$$= \frac{R(1+\sqrt{3})}{4};$$

$$MP = ME\sqrt{2} = \frac{R\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4};$$

$$DB = \frac{R\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}$$

$$\text{aria } ABCD = \frac{DB \cdot AC}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{(2+\sqrt{3})R^2}{2}.$$

3.71. Într-un triunghi ABC cu $\sphericalangle A = 120°$ bisectoarea din A taie latura BC și cercul circumscris respectiv în A_1 și A_2.

Să se arate că:

$$BC^2 = AA_2 \cdot A_1A_2; \quad \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AA_1}$$

$$AB \cdot AC = AA_1 \cdot AA_2 = 4S : \sqrt{3}.$$

(R.M.F., 150, 1951, C. *Ionescu-Țiu*).

Soluție. $\sphericalangle CBA_2 = \sphericalangle BCA_2 = 60° \Rightarrow \sphericalangle BA_2C = 60°.$

$\Rightarrow \dfrac{BA_2}{AA_2} = \dfrac{A_1A_2}{BA_2}$; $BA_2 = BC = R\sqrt{3} \Rightarrow BC^2 =$

$$= AA_2 \cdot A_1A_2.$$

Avem: $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C}{A_1B}$ sau $\frac{AC}{AB} + 1 =$

$$= \frac{A_1C + A_1B}{A_1B} = \frac{BC}{A_1B}.$$

Din asemănarea triunghiurilor AA_1C și A_1A_2B avem

$$\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{AC}{A_2B} = \frac{AC}{BC} \text{ sau } \frac{BC}{A_1B} = \frac{AC}{AA_1}.$$

Rezultă: $\frac{AC}{AB} + 1 = \frac{AC}{AA_1}$ sau $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AA_1}$.

Deoarece $\angle ABA_1 = \angle AA_2C$ și $\angle BAA_1 = \angle A_2AC = 60°$ triunghiurile AA_1B și AA_2C sînt asemenea, deci:

$$\frac{AB}{AA_2} = \frac{AA_1}{AC} \text{ sau } AB \cdot AC = AA_1 \cdot AA_2.$$

Din A_1 ducem perpendiculare pe AB și AC care sînt egale cu

$$h = \frac{AA_1\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Avem:}$$

$$S = \text{aria } ABC = \frac{(AB + AC)h}{2} = \frac{(AB + AC)AA_1\sqrt{3}}{4}$$

sau $AA_1(AB + AC)\sqrt{3} = S$. Mai avem:

$\frac{AC + AB}{AB} = \frac{AC}{AA_1}$ însă $AB \cdot AC = AA_1 \cdot AA_2$ deci

$AB + AC = AA_2$ și $AB \cdot AC = AA_1 \cdot AA_2 = 4S : \sqrt{3}$.

3.72. Fie A_1, B_1, C_1 trei puncte pe cercul circumscris triunghiului oarecare ABC, iar $A_2B_2C_2$ triunghiul format de dreptele AA_1, BB_1, CC_1. Dacă notăm $M \equiv (A_1A_2, BC)$, $N \equiv (B_1B_2, CA)$, $P \equiv (C_1C_2, AB)$, să se arate că dreptele AM, BN, CP sînt concurente.

(G.M.B., 8957, *G.C. Niculescu*).

Soluție. Dacă notăm $A_3 \equiv (AA_1, BC)$, atunci *teorema lui Menelaus* aplicată triunghiurilor A_3BC_2 și A_3B_2C tăiate de transversale A_1MA_2 ne dă:

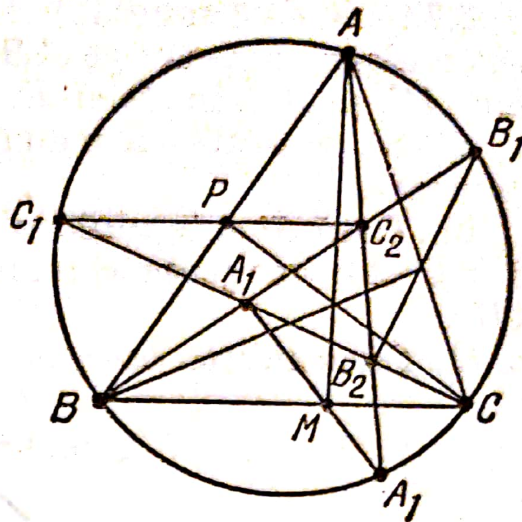


Fig. 3.72

$$\frac{MB}{MA_2}\cdot\frac{A_1A_2}{A_1C_2}\cdot\frac{A_2C_2}{A_2B}=1;$$

$$\frac{MA_3}{MC}\cdot\frac{A_2C}{A_2B_2}\cdot\frac{A_1B_2}{A_1A_3}=1,$$

de unde

$$\frac{MB}{MC}=\frac{A_1C_2}{A_1B_2}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{A_2B_2}{A_2C_2}.$$

În mod analog

$$\frac{NC}{NA}=\frac{B_1A_2}{B_1C_2}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{B_2C_2}{B_2A_2};$$

$$\frac{PA}{PB}=\frac{C_1B_2}{C_1A_2}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}\cdot\frac{C_2A_2}{C_2B_2}.$$

Înmulțind aceste trei relații, obținem:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=-\frac{A_1C_2}{A_1B_2}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_1A_2}{B_1C_2}\cdot\frac{B_2C}{B^2A}\cdot\frac{C_1B_2}{C_1A_2}\cdot$$

$$\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=-\frac{A_1C_2\cdot C_2A}{B_1C_2\cdot C_2B}\cdot\frac{B_1A_2\cdot A_2B}{C_1A_2\cdot A_2C}\cdot\frac{C_1B_2\cdot B_2C}{A_1B_2\cdot B_2A}.$$

Cum însă

$$A_1C_2\cdot C_2A=B_1C_2\cdot C_2B;\qquad B_1A_2\cdot A_2B=C_1A_2\cdot A_2C;$$
$$C_1B_2\cdot B_2C=A_1B_2\cdot B_2A,$$

rezultă că

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=-1.$$

ceea ce probează, conform reciprocei *teoremei lui Ceva,* că AM, BN, CP sînt concurente.

3.73. Se dă triunghiul ABC. În B și C se duc perpendiculare respectiv pe AB și AC pînă întîlnesc dreptele AC și AB în D și E.

a). Să se arate că triunghiurile ABC și ADE sînt asemenea.

b). Dacă M este mijlocul lui DE să se arate că MB și MC sînt tangente cercului circumscris triunghiului ABC.

c). Ce condiție este necesară ca $DE = 2BC$?

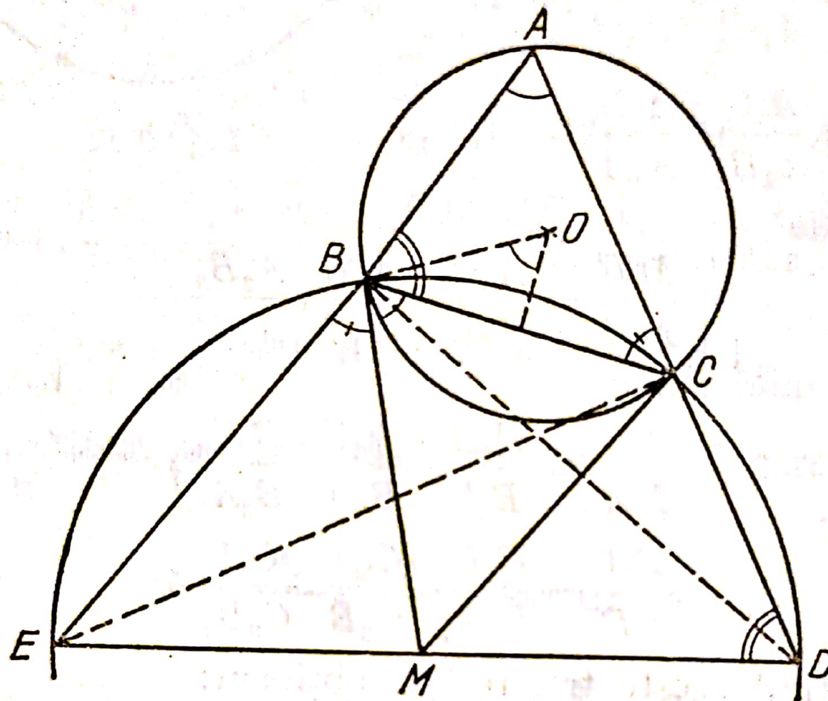


Fig. 3.73

Soluția. a). Patrulaterul $BCDE$ este inscriptibil. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AED$. Analog $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADE$. Fie O centrul cercului ABC.

b). $ME = MB = MC = MD$ ca raze. $\sphericalangle AED = \sphericalangle EBM = \sphericalangle ACB$.

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle CBM + \sphericalangle EBM = 180° \Rightarrow \sphericalangle CBM = \sphericalangle BAC.$$

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle MBC, \text{ avînd aceeași măsură.}$$

$$\sphericalangle OBC = 90° - \sphericalangle BAC.$$

$$\sphericalangle MBO = \sphericalangle MBC + \sphericalangle OBC = A + 90° - A = 90°.$$

deci $MB \perp OB$, adică MB este tangenta la arcul ABC.

c). trebuie ca $BC = EM = MD = MB = MC$, adică triunghiul BMC echilateral $\Rightarrow \sphericalangle MBC = 60° \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle A = 60°$.

3.74. Pătratul $ABCD$ este așezat într-o poziție dată. Dacă se rotește pătratul în jurul punctului A în același plan de un unghi α se obține poziția $AB'C'D'$.

a). Să se arate că CC' este egală cu $DD'\sqrt{2}$.

b). Notăm cu E intersecția dreptelor BB' și DD'. Să se arate că unghiul AEC este drept.

c). Să se arate că dreptele BB', CC' și DD' sînt concurente.

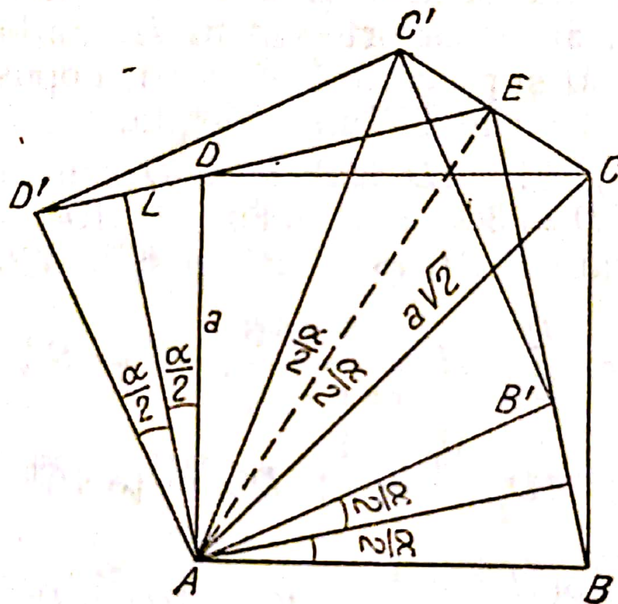


Fig. 3.74

Soluție. a). Triunghiul ACC' este isoscel. Ducem

$$AE \perp CC';\ \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{EC}{AC};\ \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{LD}{AD};$$

$$AL \perp DD' \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{LD}{AD} \quad \text{sau} \quad \frac{EC}{a\sqrt{2}} = \frac{LD}{a} \Rightarrow EC =$$

$$= LD\sqrt{2};\ \ CC' = 2EC = 2\sqrt{2}\cdot LD = DD'\sqrt{2}.$$

b). $\sphericalangle DD'A = \dfrac{180° - \alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2} = \sphericalangle ABD'$.

Unim B cu E. Patrulaterul $ECBA$ este inscriptibil. Deoarece $\sphericalangle B'BC = \sphericalangle EBC = \frac{\alpha}{2}$ rezultă că $B'B$ și EB se confundă adică punctele B, B', E sînt coliniare.

La fel, patrulaterul $EC'D'A$ este inscriptibil și DD' se confundă cu $D'E$, punctele D', D, E sînt coliniare. De aici rezultă că dreptele DD', BB', CC' sînt concurente în E iar $\sphericalangle AEC = \sphericalangle AEC' = 90°$.

3.75. Într-un cerc de rază R se înscrie un triunghi ABC în care latura AB este egală cu c, iar unghiul format de înălțimea din A cu latura AB este de 30°.

a). Să se afle laturile și aria triunghiului.

b). Să se arate că ortocentrul H, mijlocul laturii BC notat cu M și punctul A' diametrul opus punctului A pe cercul dat sînt în linie dreaptă.

Soluție. a). Fie AD înălțimea, O centrul cercului. Dacă $\sphericalangle BAD = 30°$ $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle AOC = 120°$. Fie E mijlocul laturii $AC \Rightarrow \sphericalangle AOE = 60°$, $\sphericalangle OAE = 30°$,

$$OE = \frac{R}{2};\ AE = \frac{R\sqrt{3}}{2};\ AC = R\sqrt{3};$$

$$BD = \frac{c}{2};\ AD = \frac{c\sqrt{3}}{2};\ DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3(4R^2 - c^2)}}{2};\ BC = BD + DC =$$

$$= \frac{1}{2}\left(c + \sqrt{3(4R^2 - c^2)}\right),$$

$$S = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(c + \sqrt{3(4R^2 - c^2)}\right) \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

b). Avem $BH \parallel A'C$ și $A'B \parallel HC$. Figura $BHCA'$ este un paralelogram ale cărui diagonale se taie în M, deci H, M, A sînt coliniare.

3.76. Se dă un triunghi oarecare ABC și fie I punctul în care se întîlnesc bisectoarele sale interioare.

1). Să se demonstreze că $\sphericalangle BIC = 90° + \sphericalangle \frac{BAC}{2}$.

2). Punctele B și C fiind fixe, să se determine locul geometric al punctului I atunci cînd punctul A se mișcă în planul triunghiului, în așa fel ca unghiul A să rămînă constant.

3). Fie I' centrul cercului tangent laturii BC și prelungirilor laturilor AB, AC. Să se arate că cercul care trece prin punctele B, I, C trece și prin punctul I'.

4). Cercul ce trece prin punctele B, I, C mai taie latura AB în C' și latura AC în B'. Să se arate că triunghiurile ABC și $AB'C'$ sînt egale.

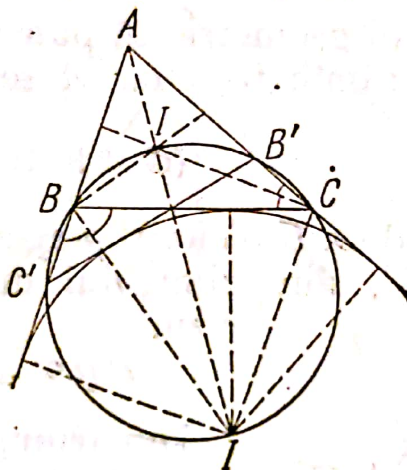


Fig. 3.76

Soluție. a). $\sphericalangle BIC = 180° - \frac{B+C}{2} = 180° - \frac{180° - A}{2} = 90° + \frac{A}{2} =$ constant.

b). Unghiul BIC este constant și laturile lui trec prin două puncte fixe, locul lui I este format din două arce simetrice față de BC care trece prin B și C capabile de unghiul $90° + \frac{A}{2}$.

c). Să arătăm că patrulaterul $BICI'$ este inscriptibil. Patrulaterul $BICI'$ avînd 2 unghiuri opuse suplementare este inscriptibil.

d). $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C' = \frac{1}{2} \sphericalangle BIB'$;

$$B'C' = BC.$$

$\sphericalangle ACI = \sphericalangle BCI$ și $\sphericalangle CBI' = \sphericalangle C'BI' \Rightarrow \sphericalangle ICI' =$
$= \sphericalangle IBI' = 90°.$

$\widehat{BI} = \widehat{IB'}$; $\widehat{CI'} = \widehat{C'I}$. Cum II' este diametrul cercului rezultă

$$\widehat{BC'} = \widehat{B'C} \Rightarrow \widehat{C'BI} = \widehat{IB'C} \Rightarrow BC = B'C'.$$

Triunghiurile ABC și $AB'C'$ sînt egale.

3.77. Perpendiculara dusă în vîrful B pe diametrul CC' al cercului circumscris triunghiului ABC taie latura AC în D, iar perpendiculara în D pe AC taie cercul descris pe AC ca diametru în punctele P și Q.

Să se afle locul geometric al punctelor P și Q cînd vîrfurile B și C rămîn fixe, iar A se mișcă pe cercul ABC. Discuție.

(G.M.F.,B., 8102, *A.I. Stan*).

Soluție. Notînd cu E piciorul perpendicularei din B pe diametrul CC', din triunghiul dreptunghic CBC' avem

$$CB'^2 = CE \cdot CC'. \qquad (1)$$

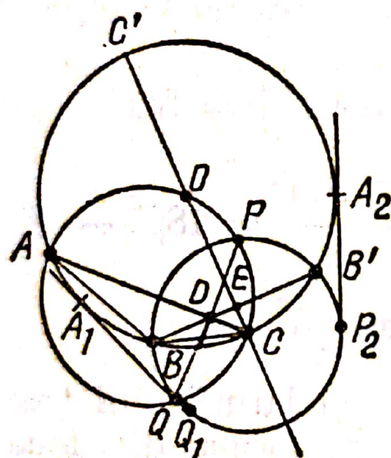


Fig. 3.77

Din triunghiurile dreptunghice CPA și CQA deducem

$$CP^2 = CQ^2 = CD \cdot CA. \qquad (2)$$

Dar, cum patrulaterul $ADEC'$ este inscriptibil, rezultă

$$CD \cdot CA = CE \cdot CC' \qquad (3)$$

și deci din relațiile de mai sus avem

$$CP^2 = CQ^2 = CB^2.$$

Punctele P și Q se găsesc pe cercul de centru C și rază CB.

Discuție. Punctele P și Q sînt reale, cînd cercurile C și cercul de diametru AC se taie, adică atunci cînd $CA \geqslant CB$, sau cu alte cuvinte cînd A se mișcă pe arcul $BC'B'$ exterior cercului C.

Pentru precizarea locului geometric, notăm cu A_1 și Q_1; A_2 și P_2 punctele de contact ale tangentelor comune cercurilor de centre O și C.

Cînd A descrie arcul $BA_1C'A_2B'$ punctul P descrie arcul $BB'P_2$, apoi arcul P_2B', iar Q descrie arcul BQ_1 apoi arcul Q_1BB'.

Rezultă că locul geometric al punctului P este arcul $BB'P_2$ și al punctului Q este arcul Q_1BB', avînd arcul BB' comun, locul geometric căutat este arcul $Q_1BB'P_2$.

3.78. Produsul proiecțiilor pe diametrul AD al laturilor AB și AC ale unui triunghi ABC înscris într-un cerc (O) este egal cu produsul dintre latura AB și proiecția înălțimii AE pe această latură.

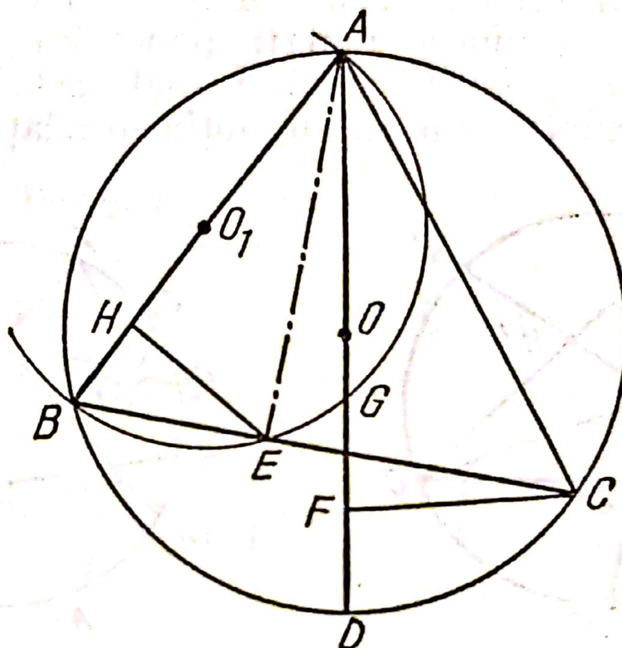


Fig. 3.78

Soluție. În triunghiul ABC avem:

$AB \cdot AC = AE \cdot AD$ sau $AB^2 \cdot AC^2 = AE^2 \cdot AD^2$. (1)

Notînd cu G și F proiecțiile punctelor B și C pe diametrul AD avem:

$$AB^2 = AD \cdot AG \text{ și } AC^2 = AD \cdot AF. \quad (2)$$

Introducem în (1) valorile de la (2) și obținem:

$$AD \cdot AG \cdot AD \cdot AF = AE^2 \cdot AD^2$$

sau

$$AG \cdot AF = AE^2.$$

Dreptele HE și AB fiind perpendiculare, triunghiul AEB este dreptunghic, deci $AE^2 = AB \cdot AH$, de unde deducem:

$$AG \cdot AF = AB \cdot AH.$$

3.79. Dacă A', B', C' sînt intersecțiile cevienelor AA'', BB'', CC'' ale triunghiului ABC cu cercul circumscris, $A''B \cdot A''C = \lambda$, $B''C \cdot B''A = \mu$, $C''A \cdot C''B = \nu$ iar $AA'' = d_a$, $BB'' = d_b$, $CC'' = d_c$, să se demonstreze relația:

$$AA' \cdot d_a + BB' \cdot d_b + CC' \cdot d_c = \lambda + \mu + \nu + \\ + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2.$$

Soluție. Avem: $AA' \cdot d_a = (AA'' + A''A') \cdot AA'' = d_a^2 + A''A' \cdot AA''$. Dar $A''A' - AA'' = BA'' - A''C = \lambda$, conform puterii punctului A''. Deci, $AA' \cdot d_a = d_a + \lambda$. Adunînd și analoagele relației de mai sus, membru cu membru, obținem relația propusă.

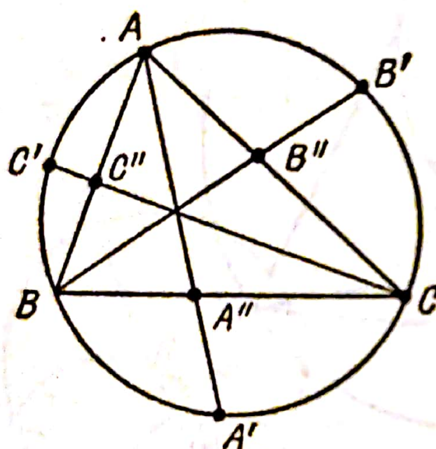


Fig. 3.79

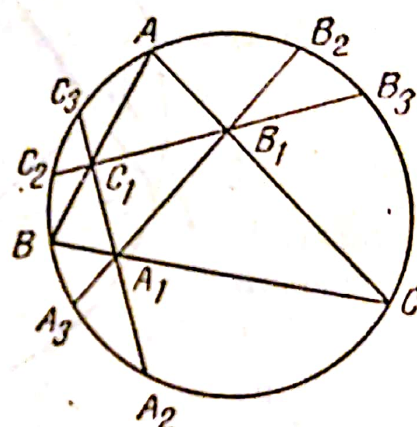


Fig. 3.80

3.80. Fie A_1, B_1, C_1 trei puncte pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Dreptele A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 taie cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A_3, B_2; B_3, C_2; C_3, A_2; notăm $B_1C_1 = a'$, $A_1C_1 = b'$; $B_1A_1 = c'$. Să se arate că:

$$(C_1C_2 - B_1B_3)a' + (A_1A_2 - C_1C_3)b' + \\ + (B_1B_2 - A_1A_3)c' = 0.$$

Soluție. Exprimînd puterile punctelor C_1 și B_1 față de cercul ABC, obținem:

$$C_1C_2(a' + B_1B_3) = C_1B \cdot C_1A \quad (1)$$

$$B_1B_3(a' + C_1C_2) = B_1A \cdot B_1C. \quad (2)$$

Scăzînd relațiile (1) și (2) membru cu membru, găsim:

$$(C_1C_2 - B_1B_3)a' = C_1B \cdot C_1A - B_1A \cdot B_1C. \qquad (3)$$

Analog găsim:

$$(A_1A_2 - C_1C_3)b' = A_1C \cdot A_1B - C_1B \cdot C_1A \qquad (4)$$

$$(B_1B_2 - A_1A_3)c' = B_1A \cdot B_1C - A_1C \cdot A_1B. \qquad (5)$$

Adunînd relațiile (3), (4) și (5) membru cu membru, găsim tocmai relația cerută în enunț.

3.81. Fie AA_1 bisectoarea din vîrf A al triunghiului ABC. Cercurile circumscrise triunghiului AA_1B și AA_1C intersectează pe AB și AC din nou în M și N. Să se arate că BM este egal cu CN.

Soluție. Puterea punctelor B și C față de cercurile AA_1C respectiv ABA_1 dă:

$$BM \cdot BA = BA_1 \cdot BC \text{ și } CN \cdot CA = CA_1 \cdot CB.$$

Împărțind membru cu membru obținem:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{BM \cdot BA}{CN \cdot CA}.$$

Dar,

$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}$ și înlocuind rezultă

$$BM = CN.$$

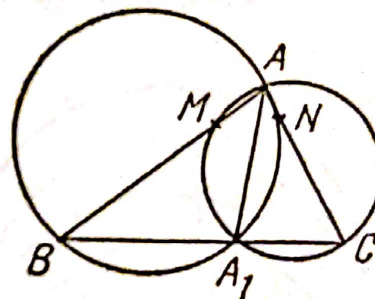


Fig. 3.81

3.82. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul drept în A, ducem bisectoarea AD, iar prin D ducem o perpendiculară pe BC care taie pe AB în E și pe AC în F .

a). Să se demonstreze că $BD = DF$ și $CD = DE$.

b). Să se demonstreze că simetricul punctului E față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BFC și că simetricul punctului F față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BEC, iar aceste două cercuri sînt egale între ele.

c). Să se arate că unghiurile EBF și ECF sînt egale și că $AE \cdot BF = AF \cdot CE$.

3.79. Dacă A', B', C' sînt intersecțiile cevienelor AA'', BB'', CC'' ale triunghiului ABC cu cercul circumscris, $A''B \cdot A''C = \lambda$, $B''C \cdot B''A = \mu$, $C''A \cdot C''B = \nu$ iar $AA'' = d_a$, $BB'' = d_b$, $CC'' = d_c$, să se demonstreze relația:

$$AA' \cdot d_a + BB' \cdot d_b + CC' \cdot d_c = \lambda + \mu + \nu + \\ + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2.$$

Soluție. Avem: $AA' \cdot d_a = (AA'' + A''A') \cdot AA'' = = d_a^2 + A''A' \cdot AA''$. Dar $A''A' \cdot AA'' = BA'' \cdot A''C = \lambda$, conform puterii punctului A''. Deci, $AA' \cdot d_a = d_a + \lambda$. Adunînd și analoagele relației de mai sus, membru cu membru, obținem relația propusă.

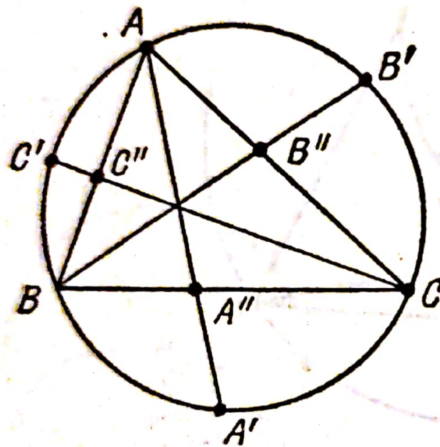


Fig. 3.79

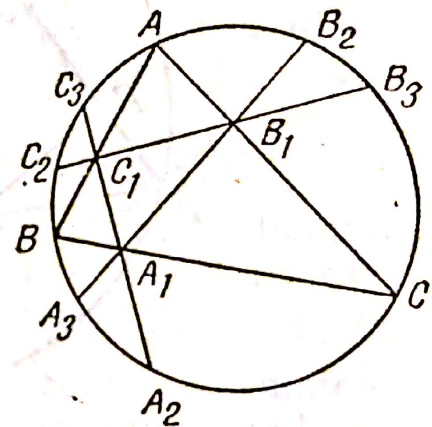


Fig. 3.80

3.80. Fie A_1, B_1, C_1 trei puncte pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Dreptele A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 taie cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A_3, B_2; B_3, C_2; C_3, A_2; notăm $B_1C_1 = a'$, $A_1C_1 = b'$; $B_1A_1 = c'$. Să se arate că:

$$(C_1C_2 - B_1B_3)a' + (A_1A_2 - C_1C_3)b' + \\ + (B_1B_2 - A_1A_3)c' = 0.$$

Soluție. Exprimînd puterile punctelor C_1 și B_1 față de cercul ABC, obținem:

$$C_1C_2(a' + B_1B_3) = C_1B \cdot C_1A \qquad (1)$$

$$B_1B_3(a' + C_1C_2) = B_1A \cdot B_1C. \qquad (2)$$

Scăzînd relațiile (1) și (2) membru cu membru, găsim:

$$(C_1C_2 - B_1B_3)a' = C_1B \cdot C_1A - B_1A \cdot B_1C. \qquad (3)$$

Analog găsim:

$$(A_1A_2 - C_1C_3)b' = A_1C \cdot A_1B - C_1B \cdot C_1A \qquad (4)$$

$$(B_1B_2 - A_1A_3)c' = B_1A \cdot B_1C - A_1C \cdot A_1B. \qquad (5)$$

Adunînd relațiile (3), (4) și (5) membru cu membru, găsim tocmai relația cerută în enunț.

3.81. Fie AA_1 bisectoarea din vîrf A al triunghiului ABC. Cercurile circumscrise triunghiului AA_1B și AA_1C intersectează pe AB și AC din nou în M și N. Să se arate că BM este egal cu CN.

Soluție. Puterea punctelor B și C față de cercurile AA_1C respectiv ABA_1 dă:

$$BM \cdot BA = BA_1 \cdot BC \quad \text{și} \quad CN \cdot CA = CA_1 \cdot CB.$$

Împărțind membru cu membru obținem:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{BM \cdot BA}{CN \cdot CA}.$$

Dar,

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC} \text{ și înlocuind rezultă}$$

$$BM = CN.$$

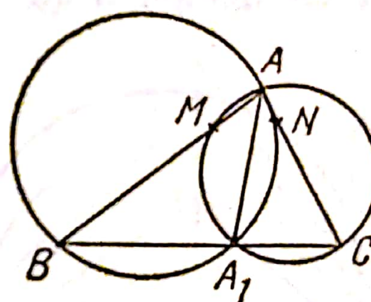


Fig. 3.81

3.82. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul drept în A, ducem bisectoarea AD, iar prin D ducem o perpendiculară pe BC care taie pe AB în E și pe AC în F.

a). Să se demonstreze că $BD = DF$ și $CD = DE$.

b). Să se demonstreze că simetricul punctului E față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BFC și că simetricul punctului F față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BEC, iar aceste două cercuri sînt egale între ele.

c). Să se arate că unghiurile EBF și ECF sînt egale și că $AE \cdot BF = AF \cdot CE$.

a). *Soluția I-a.* Deoarece $FD \perp BD$ și $FA \perp AB$ patrulaterul $AFDB$ este inscriptibil, deci:

$$\sphericalangle FBD = \sphericalangle FAD = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

adică triunghiul FBD este dreptunghic și isoscel, prin urmare $FD = BD$; analog $DE = CD$.

Soluția a II-a. Din asemănarea triunghiurilor FDC și ABC avem:

$$\frac{FD}{DC} = \frac{AB}{AC}. \qquad (1)$$

Însă, conform teoremei bisectoarei interioare, (1) devine:

$$\frac{FD}{DC} = \frac{BD}{DC} \text{ sau } FD = BD.$$

La fel demonstrăm și că $CD = DE$.

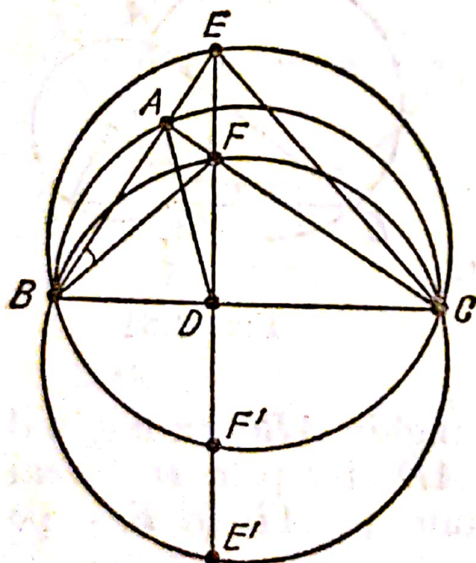


Fig. 3.82

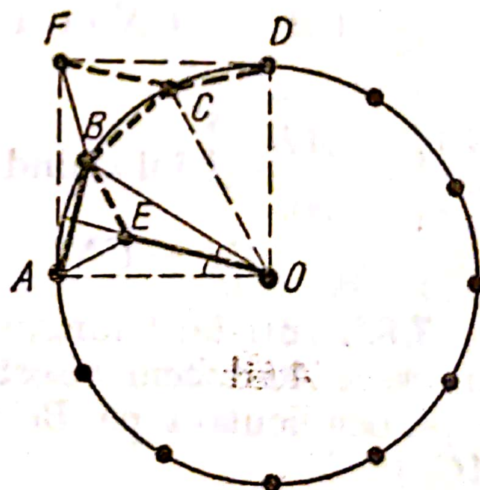


Fig. 3.83

3.83. Să se demonstreze că aria dodecagonului regulat este egală cu de trei ori aria pătratului ce are ca latură raza cercului circumscris.

Soluție. Fie $AB = BC = CD =$latura dodecagonului și $OAFD$ pătratul construit pe raza cercului circumscris dodecagonului.

Pe bisectoarea unghiului AOB luăm punctul E astfel ca $OE = AB$.

În triunghiurile AOE și ABF avem: $AO = AF =$ cu raza cercului, $OF = AB$ prin construcție și $\sphericalangle AOE = \sphericalangle BAF$, ambele avînd ca măsuri jumătatea arcului AB.

Rezultă egalitatea triunghiurilor AOE și ABF, apoi a triunghiurilor BOE și DCF. De aici rezultă că $AE = BF$, $EB = CF$; iar $AB = BC$ ca laturi ale dodecagonului. Deci, triunghiurile ABE și BCF sînt egale.

Astfel, triunghiurile AOB și BOC și COD sînt egale, aria unuia din aceste triunghiuri este 1/4 din aria pătratului $AODF$, iar aria dodecagonului este $\frac{12}{4} = 3$ ori aria aceluiași pătrat.

3.84. Pe laturile unui triunghi dreptunghic ABC se construiesc în afara triunghiului, pătratele $ABDE$, $BCFG$, $CAHI$.

Fie $M = BG \cap DE$; $N = CF \cap HI$, $P = DE \cap HI$ și $R = MN \cap PA$.

Să se arate că:

a). Figura $BCNM$ este un pătrat.

b). Segmentele BC și AP sînt egale și perpendiculare.

c). Aria $AMPN$ este jumătate din aria pătratului $BCFG$.

d). Dreptele HE, ID, CB sînt concurente.

e). Mediana din A a triunghiului ABC este perpendiculară pe HE.

f). Patrulaterul $BCHE$ este inscriptibil.

g). Hexagonul $BCNHME$ este inscriptibil.

(G.M.B., 12992, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Triunghiurile ABC, INC, DBM sînt egale.

Rezultă $NC = \parallel BM$; $MNCB$ este deci un pătrat.

b). $AP = \parallel CN = \parallel MB \Rightarrow BC = AP$ și $BC \perp AP$.

Fig. 3.84

c). Prin A, M, P, N ducem paralele la laturile pătratului $BCFG$ și se formează un pătrat egal cu $BCFG$. Aria $AMPN$ este deci jumătate din aria $BCFG$.

d). Punctele I, A, D sînt coliniare fiind pe axa de simetrie comună pătratelor $ACIH$ și $AEDB$. Punctele H și C sînt simetrice față de AI, iar B și E sînt simetrice față de AD.

e). Triunghiurile ABC și AEH sînt egale, cu catetele în prelungire $AP \perp BC$, iar AP coincide cu mediana din A a triunghiului AEH, deoarece $AEPH$ este un dreptunghi. Reciproc, mediana din A în triunghiul ABC este înălțime în triunghiul AEH.

f). Patrulaterul $BCHE$ este trapez isoscel deoarece $CH \parallel DE$ și $CB = HE$.

g). Fie O centrul pătratului $BCNM$. Avem $OC = ON = OH = OM = OB = OE$. Hexagonul $BCNHME$ are toate vîrfurile egal depărtate de O, deci este inscriptibil.

3.85. Pe prelungirea laturei BC a unui triunghi oarecare ABC să se determine un punct P astfel încît distanța PA să fie medie proporțională între distanțele PB și PC. Să se exprime apoi cele trei distanțe PA, PB, PC în funcție de laturile a, b, c ale triunghiului ABC.

(G.M.F.B., 3972, Concurs elevi).

Soluție. Figurăm cercul circumscris triunghiului ABC. Dacă $AB \neq AC$, tangenta în A la cerc taie prelungirea lui BC în punctul cerut P.

Într-adevăr, exprimînd puterea punctului P față de cercul ABC, avem $PA^2 = PB \cdot PC$, ceea ce probează că PA este medic proporțională a segmentelor PB și PC.

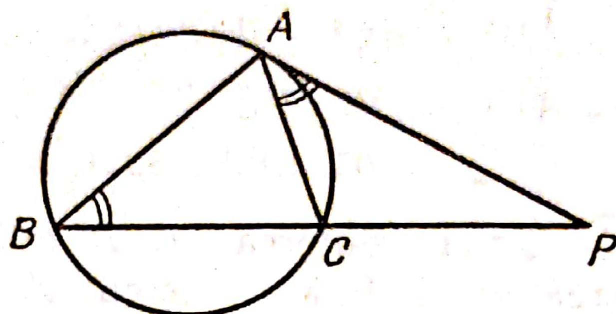


Fig. 3.85

Ținînd seama că AP este chiar simediana exterioară vîrfului A, avem:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \text{sau} \quad \frac{PB - PC}{PC} = \frac{c^2 - b^2}{b^2} = \frac{a}{PC},$$

de unde $PC = \dfrac{ab^2}{c^2 - b^2}$.

Deci:

$$PB = PC + a = \frac{ab^2}{c^2 - b^2} + a = \frac{ab^2 + ac^2 - ab^2}{c^2 - b^2} =$$

$$= \frac{ac^2}{c^2 - b^2}$$

și

$$PA = \sqrt{PB \cdot PC} = \sqrt{\frac{ac^2}{c^2 - b^2} \cdot \frac{ab^2}{c^2 - b^2}} = \frac{abc}{c^2 - b^2}.$$

În concluzie:

$$PA = \frac{abc}{c^2 - b^2}; \quad PB = \frac{ac^2}{c^2 - b^2}; \quad PC = \frac{ab^2}{c^2 - b^2}$$

cînd $c > b$.

3.86. Considerăm triunghiul ABC. Cercul care trece prin vîrful B și este tangent în A laturii, retaie latura BC în punctul D. Cercul care trece prin C și este tangent în A laturii AB, retaie latura BC în punctul E. Să se arate că

a). $BC^2 = AB^2 + AC^2 + BC \cdot DE$.

b). $AD^2 = AE^2 = DC \cdot BE$.

(G.M.F.B., 5321, *N. Mihăileanu*).

Soluție. a). Scriem puterea lui B față de cercul AEC și puterea lui C față de cercul ABD; $AB^2 = BE \cdot BC$, (1) și $AC^2 = CB \cdot CD$; (2)

$$BC^2 - AB^2 - AC^2 = BC^2 - BC \cdot BE - BC \cdot CD = BC(BC - BE - CD) = BC(\pm DE) = \pm BC \cdot DE.$$

De unde $BC^2 = AB^2 + AC^2 \pm BC \cdot DE$.

b). Triunghiurile ABE și ABC sînt asemenea avînd unghiurile respectiv regale. Rezultă:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{BC} \quad \text{sau} \quad AE = \frac{AB \cdot AC}{BC}.$$

$$\text{Analog,} \quad AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}.$$

Înmulțind relațiile (1), (2), rezultă $AB^2 \cdot AC^2 = BC^2 \cdot DC \cdot BE$ sau $\sqrt{BE \cdot DC} = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$, rezultă $AE = AD = \sqrt{BE \cdot DC}$ sau $AE^2 = AD^2 = BE \cdot DC$.

3.87. Fie un triunghi ABC și M un punct pe cercul circumscris lui, anume pe arcul BC. Dacă α, β, γ sînt proiecțiile lui M pe laturile BC, CA, AB să se arate că:

$$\frac{a}{M\alpha} = \frac{b}{M\beta} + \frac{c}{M\gamma}.$$

(G.M.F.B., 2513 *Gh. I. Bercea*).

Soluția I. Deoarece $\sphericalangle \alpha\beta M = \sphericalangle \alpha CM = \sphericalangle BAM$ și $\sphericalangle \alpha M\beta = \sphericalangle ACB = \sphericalangle AMB$ rezultă că triunghiurile $M\alpha\beta$ și MBA sînt asemenea, de unde:

$$\frac{M\alpha}{MB} = \frac{M\beta}{MA}.$$

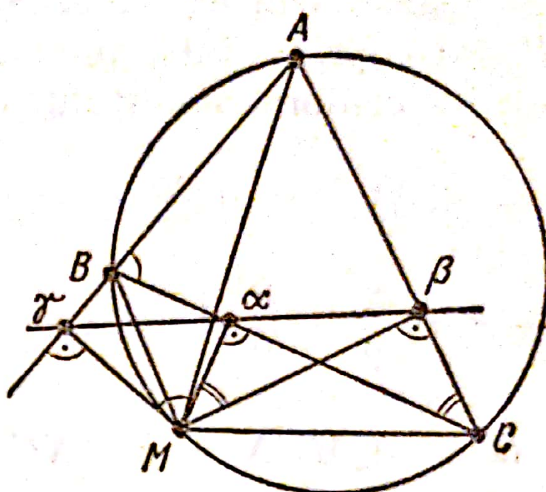


Fig. 3.87

Așadar, $M\alpha \cdot MA = M\beta \cdot MB = M\gamma \cdot MC$ (1).

Din patrulaterul inscriptibil $ABMC$ deducem:

$$a \cdot AM = b \cdot BM + c \cdot CM \quad (2)$$

Dar din (1):

$$BM = \frac{MA \cdot M\alpha}{M\beta} \text{ și } MC = \frac{MA \cdot M\alpha}{M\gamma}$$

așa că (2) ne dă:

$$a \cdot AM = b\frac{MA \cdot M\alpha}{M\beta} + c\frac{MA \cdot M\alpha}{M\gamma}$$

sau

$$\frac{a}{M\alpha} = \frac{b}{M\beta} + \frac{c}{M\gamma}. \quad (3)$$

3.88. Triunghiul ABC are unghiul C obtuz iar $a > b$. Fie punctele $M, N, P \in AB$ astfel ca triunghiurile MCA, NAC, CPA să fie isoscele și să aibă ca vîrfuri respectiv pe C, A, P. Să se arate că CN este bisectoare în triunghiul MCP. Să se arate că latura AC este tangentă în C la cercul circumscris triunghiului MCP. Să se arate că dacă O_1, O_2, O_3 sînt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor MCA, NAC, CAP atunci punctele O_1, O_2, O_3 sînt coliniare iar CO_2 este bisectoarea unghiului O_1CO_3.

(G.M.B., 9807, *Marieta Stancu*).

Soluție. Din enunț reiese că toate punctele M, N, P sînt cuprinse între punctele B și A. Din figura construită conform enunțului deducem

$$\sphericalangle NCP = \sphericalangle NCA - \sphericalangle PCA = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) - $$

$$- A = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}A, \quad \sphericalangle ANC = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \quad \sphericalangle AMC = A$$

$$\text{deci: } \sphericalangle MCN = \sphericalangle ANC - \sphericalangle AMC = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}A$$

$$\text{adică } \sphericalangle NCP = \sphericalangle MCN.$$

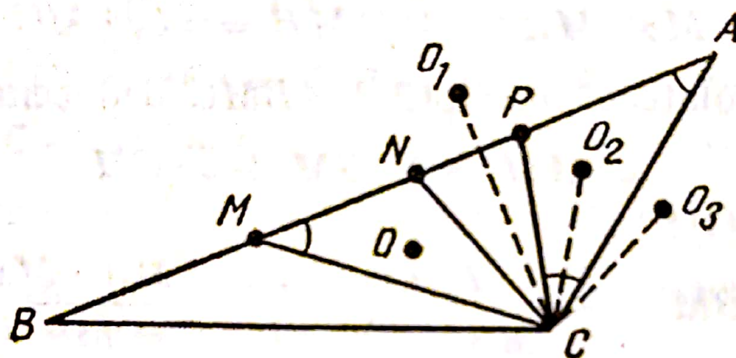


Fig. 3.88

Acum putem arăta pe trei căi că AC este tangentă în C la cercul circumscris triunghiului MCP.

1). Fie O centrul cercului circumscris triunghiului MCP. Avem: $\sphericalangle POC = 2A$ (ca unghi cu vîrful la centru) $\sphericalangle OCP = 90° - A$ (triunghiul POC este isoscel cu baza PC). Cum $\sphericalangle PCA = A$ prin ipoteză, rezultă că $\sphericalangle OCA = 90°$ și deci cum OC este rază în cercul circumscris respectiv înseamnă că AC este tangenta la cerc în punctul C.

2. Folosind în triunghiurile CPA și MCA faptul că o latură este suma proiecțiilor celorlalte laturi pe ea, avem: $2PA \cos A = AC$, $AM = 2AC \cos A$. Înmulțind cele două relații, găsim: $AM \cdot AP = AC^2$.

Interpretînd relația ultimă în sensul puterii punctului A față de cercul menționat, rezultă că AC este tangentă la cerc în punctul C.

3. Aplicăm *teorema lui Pitagora* generalizată în triunghiul ACP : $AC^2 = AP^2 + PC^2 \pm 2AP \, \text{pr}_{AP}PC$ sau $AC^2 = 2AP^2 \pm 2AP \, \text{pr}_{AP}PC$.
Acum, dacă unghiul P este ascuțit, rezultă: $\text{pr}_{AP}PC + \text{pr}_{AP}AC = AP$ și luînd în formulă semnul minus, avem: $AC^2 = 2AP^2 - 2AP\left(AP - \frac{AM}{2}\right)$; $\left(\text{căci } \text{pr}_{AP}AC = \frac{AM}{2}\right)$, adică $AC^2 = AP \cdot AM$.

Dacă, însă, unghiul P este obtuz, atunci $\text{pr}_{AP}PC = \frac{AM}{2} - AP$, deci $AC^2 = 2AP^2 + 2AP\left(\frac{AM}{2} - AP\right) = AP \cdot AM$. În sfîrșit, dacă unghiul B este drept atunci $AP = \frac{AM}{2}$ și $\text{pr}_{AP}PC = 0$ deci

$$AC^2 = 2AP^2 = 2AP \cdot \frac{AM}{2} = AP \cdot AM.$$

Deoarece O_1, O_2, O_3 sînt centre de cercuri, avem: $O_1M = O_1C = O_1A$, $O_2N = O_2C = O_2A$, $O_3P = O_3C = O_3A$. Din aceste egalități deducem că punctele O_1O_2, O_3 se află pe mediatoarea laturii AC, deci evident sînt coliniare. În plus, punctul P se află, de asemenea, pe aceeași mediatoare (prin ipoteză), deci: O_1, O_2, O_3, P sînt patru puncte coliniare.

Avem: $\sphericalangle O_1CA = \frac{\pi}{2} - A$ (O_1C fiind mediatoarea lui AM), $\sphericalangle O_2CA = \frac{1}{2}A$ (triunghiul CO_2A este isoscel iar O_2A este bisectoarea unghiului A). Din diferența lor deducem: $\sphericalangle O_1CO_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}A$. (1). Apoi avem: $\sphericalangle PCO_3 = \sphericalangle CPO_3 = \frac{\pi}{2} - A$ (jumătatea unghiului CPA), $\sphericalangle O_2CP = \frac{1}{2}A$ (căci O_2C este bisectoarea un-

ghiului PCA). Făcînd diferența lor, găsim: $\sphericalangle O_2CO_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} A$. (2). Comparînd formulele (1) și (2) deducem că $\sphericalangle O_1CO_2 = \sphericalangle O_2CO_3$ adică CO_2 este bisectoarea unghiului O_1CO_3.

3.89. Pe un cerc de rază R se consideră punctele A, B, C în așa fel ca $AB = BC = R$. Simetricele punctului A față de B și C le notăm respectiv cu A' și A''. În triunghiul $AA'A''$ se duc medianele din A și A'' care determină în cercul dat coardele AM și BN, iar AM taie $A'A''$ în D. Să se arate că $AM = 4BN$.

(G.M.B., 5598, *Gh. Bazacov*).

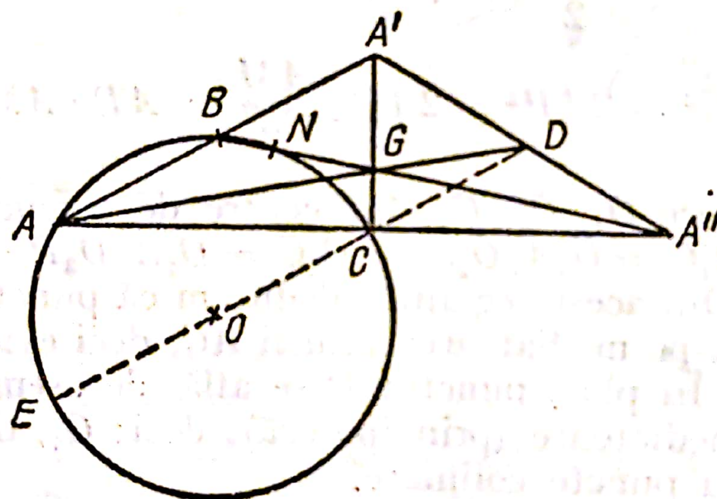


Fig. 3.89

Soluție. Triunghiul $AA'C$ este dreptunghic, avînd segmentul BC egal cu jumătatea laturii AA'. Atunci $A'C$ este mediatoarea segmentului AA'', iar triunghiul $AA'A''$ este isoscel; laturile lui sînt: $AA' = 2R$, $AA'' = 2R\sqrt{3}$. Totodată, medianele AD și $A''B$ sînt egale; lungimile lor se pot calcula cu formula medianei. Avem:

$$A''A^2 = \frac{A'A''^2 + AA''^2}{2} - \frac{AA'^2}{4}.$$

Ținînd seama de valorile laturilor, obținem:

$$A''B^2 = \frac{4R^2 + 12R^2}{2} - \frac{4R^2}{4}$$

sau $A''B^2 = 7R^2$ deci: $A''B = AD = R\sqrt{7}$.

Pentru a calcula cele două coarde determinate de aceste mediane în cercul dat, ne folosim de puterea punctelor A'' și D față de acest cerc, putem scrie: $A''B \cdot A''N = A''A \cdot A''D$ și înlocuind valorile se obține $R\sqrt{7} \cdot A''N = 2R\sqrt{3} \cdot R\sqrt{3}$, sau $A''N = \frac{6}{7} R\sqrt{7}$.

Dar $R\sqrt{7} = A''B$ și atunci, $A''N = \frac{6}{7} A''B$, ceea ce exprimă că coarda BN este $\frac{1}{7}$ din mediana întreagă.

Pentru coarda AM procedăm analog. Ducem mai întîi secanta DC care va trece prin centrul cercului, fiind paralelă cu AB, iar arcele AB și OB sînt egale fiecare cu 60°. Putem scrie: $DA \cdot DM = DE \cdot DO$ de unde $R\sqrt{7} \cdot DM = 3R^2$ sau $DM = \frac{3R^2}{R\sqrt{7}}$. Obținem $AM = \frac{3}{7} R\sqrt{7}$, de unde obținem $AM = 4BN$.

3.90. Se consideră patrulaterul $ABCD$. Bisectoarea unghiului BDC taie latura BC în M și diagonala AC în L. Perpendiculara dusă din B pe dreapta DM intersectează această dreaptă în E, iar prelungirea laturii DC o taie în F. Bisectoarea unghiului ABD taie diagonala AC în I și latura AD în G. Paralela dusă prin G la AC taie latura DC în P.

a). Să se arate că dreptele GF și BP trec prin L.

b). Fie N intersecția dreptelor GF și BC. Să se arate că triunghiurile LMN și BGP sînt isoscele. Care este mărimea unghiurilor acestor triunghiuri?

c). Să se arate că cercul de diametru PG trece prin punctele I și L.

d). Acest cerc taie pe BD în S. Să se arate că arcele GI, IS, SL și LP sînt egale.

e). Fie J intersecția dreptelor PN și BF. Să se arate că punctele I, S, M, J sînt situate pe o dreaptă paralelă cu GF.

(Concurs elevi, 1957, *Gh. Bazacov* și *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Avem $\frac{GA}{GD} = \frac{PC}{PD}$ care arată că BP este bisectoarea unghiului $CBD = 45°$. În triunghiul BCD, cele trei bisectoare sînt BP, CA și DM (vezi figura); ele se întîlnesc în I, centrul cercului

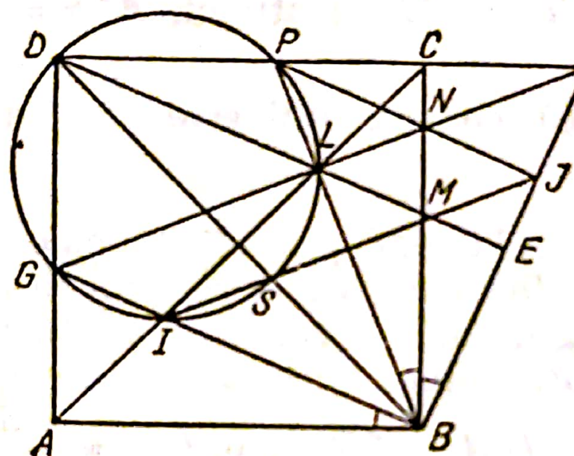


Fig. 3.90

înscris triunghiului. Triunghiurile BAG și BCP sînt egale. $\sphericalangle CBF = \sphericalangle CDM$ ca avînd laturile respectiv perpendiculare de unde se deduce că triunghiurile CBF, BCP și BAG sînt egale $\Rightarrow BG = BF$, deci triunghiul BFG este isoscel. Bisectoarea BP este și înălțime și mediană, deci $GP = PF \Rightarrow BC$ și AC se întîlnesc în mijlocul lui GF, dar $L \in DM$.

b). În triunghiul LMN avem: $\sphericalangle LMN = 90° - \frac{45°}{2} = 67°30°$ se deduce din triunghiul DMC, iar $\sphericalangle LBN = 22°30'$.

Triunghiul BGP este isoscel. $BG = BP$ din triunghiuri dreptunghice egale. $\sphericalangle GBP = 45°$, iar celelalte $67°30'$.

c). În primul rînd I și L sînt simetrice față de diametrul BD și $\sphericalangle GLP = 90°$, deci L și I se află pe cercul de diametru GP.

d). $\sphericalangle LDP = 22°30'$; arc PL = arc GI, $\Rightarrow GI, IS, SL$ și LP sînt laturile octogonului înscris în cerc.

e). Deoarece arc GI = arc SL, coardele GL și IS sînt paralele, deci IS și GF sînt paralele. În triunghiul dreptunghic isoscel BCD, BP și DM sînt bisectoare simetrice față de $AC \Rightarrow LP = LM = GI$. $\sphericalangle GBF = 90°$ și $GB \parallel LM \Rightarrow GILM$ este un paralelogram deci $IM \parallel GF$.

Triunghiul BFP este isoscel iar FL și PI sînt înălțimi, deci $NJ \parallel LE$ și sînt simetrice față de BC de unde $NJ = NL = LM$. Patrulaterul $LMJN$ este romb și $MJ \parallel GF \Rightarrow I, S, M, J$ sînt coliniare și paralele cu GF.

3.91. Printr-un punct I din interiorul unui cerc, diferit de O centrul cercului, se duc două coarde perpendiculare AB și CD. Tangentele la cerc, duse în punctele A, B, C, D determină un patrulater $MNPQ$.

a). Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

b). Notînd cu R și S mijloacele coardelor AB și CD, să se arate că mijlocul segmentului RS se află pe OI.

Soluție. a). Măsura $\sphericalangle N$ = măs arc$(AC + AD + CB - BD)/2$.

$$\text{măs } \sphericalangle Q = \text{măs arc } (AD + BD + BC - AC)/2;$$

$\sphericalangle(N + Q) = 180°$, deci patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

b). Patrulaterul $ORIS$ fiind un dreptunghi, diagonalele RS și OI se înjumătățesc, deci mijlocul lui RS este pe OI.

3.92. Fiind dat un cerc de diametru AB și fie H și K proiecțiile punctelor A și B pe o coardă MN. Dacă M' este simetricul lui M față de AB să se arate că $M'N = HK$.

Soluție. Fie C intersecția perpendicularei BK cu cercul.

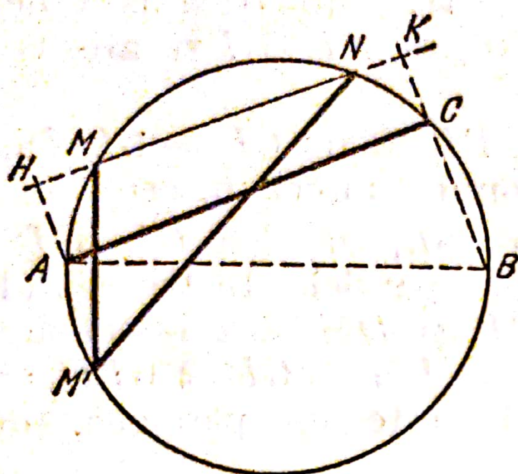


Fig. 3.92

Triunghiul ABC este dreptunghic în C fiindcă este înscris într-un semicerc. Deci cateta AC este paralelă și egală cu segmentul HK. Astfel, arcul AM este egal cu arcul NC.

Punctul M' simetric cu M în raport cu diametrul AB determină arcul AM' egal cu arcul AM. Deci arcul $NC = AM'$ și prin urmare $M'N = AC = HK$.

3.93. Fie A un punct oarecare pe axa radicală a două cercuri O, O'. Se duce secanta oarecare AMB în cercul O și secanta oarecare ANC în cercul O', punctele M și N fiind mai aproape de A decît punctele B și C. Triunghiurile ABC și AMN sînt asemenea.

Soluție. Într-adevăr, A fiind pe axa radicală a celor două cercuri avem: $AM \cdot AB = AN \cdot AC$, deci

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AC}{AB}$$

ceea ce arată că triunghiurile ABC, AMN care au unghiul din A comun și laturile adiacente acestui unghi proporționale, sînt asemenea.

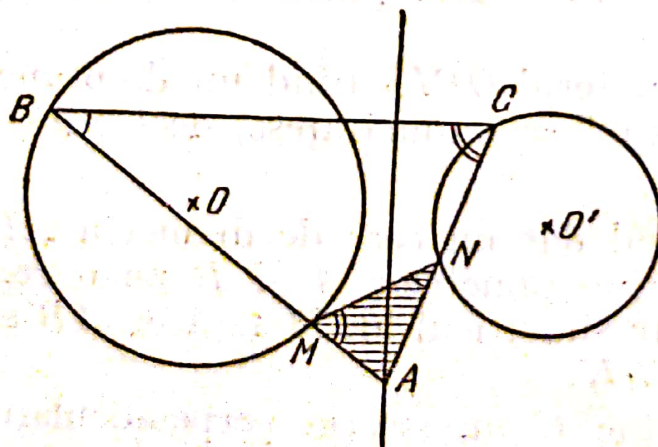


Fig. 3.93

Din această asemănare rezultă că:

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ANM \quad \text{şi} \quad \measuredangle ACB = \measuredangle AMN$$

adică patrulaterul $MBCN$ este inscriptibil.

3.94. Într-un triunghi isoscel ABC, $AB = AC$, $\measuredangle A = 30°$. Din c ca centru se descrie un cerc cu raza $\frac{BC}{2}$. Se duc tangentele BT_1 şi BT_2 la cerc. Notăm cu $M_1 = BT_1 \cap AC_1$; $N_1 = CT_1 \cap AB$; $M_2 = BT_2 \cap AC$ şi $N_2 = CT_2 \cap AB$.

Cunoscîndu-se $M_1N_1 = 8{,}78$ m $< M_2N_2$ să se calculeze BC.

(G.M.B., 12995, *C. Ionescu-Ţiu*).

Soluţie. Notăm $BC = 2x$ şi avem $R = x$, $AB \cos 75° = x$;

$$x = \frac{1}{4} AB(\sqrt{6} - \sqrt{2});$$

$$AB = \frac{4x}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})x.$$

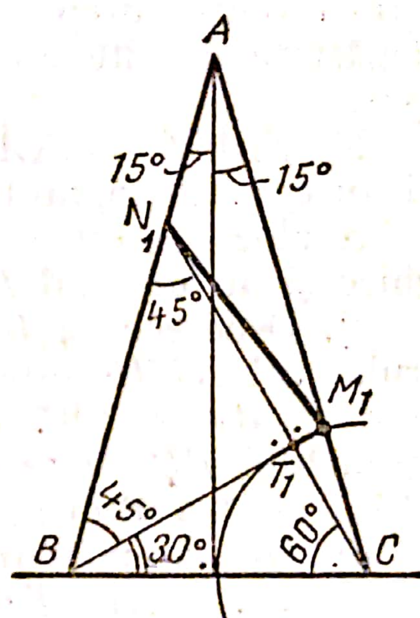


Fig. 3.94

Mai avem:

$BC = 2CT_1$; $\measuredangle CBT_1 = 30°$; $\measuredangle BCT_1 = 60°$, $\measuredangle M_1BN_1 = 45°$, $\measuredangle BN_1C = 45°$, $\measuredangle BM_1C = 75°$, $\measuredangle CN_1M_1 = 15°$.

Din triunghiul BN_1C avem

$$\frac{BN_1}{\sin 60°} = \frac{2x}{\sin 45°}; \quad BN_1 = x\sqrt{6}.$$

$$AN_1 = AB - BN_1 = (\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{6})x = x\sqrt{2}.$$

Triunghiul CBM_1 fiind isoscel, $BM_1 = BC = 2x$. Din triunghiul BM_1N_1 avem $M_1N_1^2 = BN_1^2 + BM_1^2 - 2BN_1 \cdot BM_1 \cos 45° = x^2(6 + 4 - 4\sqrt{3}) = (10 - 4\sqrt{3})x^2 = 8{,}78^2$ şi rezultă $x^2 \simeq 25$; $x \simeq 5$ m, deci $BC = 10$ m.

3.95. În triunghiul ascuțitunghic ABC se notează cu H punctul de intersecție al înălțimilor AE, BF și CI. Să se arate:

a). Punctele A, I, H, F, apoi B, I, H, E și apoi C, E, H, F sînt egal depărtate de cîte un punct.

b). $\triangle AEC \sim \triangle AHF$ și $\triangle AIC \sim \triangle HFC$.

c). Intersecția înălțimilor triunghiului BHC este punctul A.

d). $BC \cdot AI \cdot AF = AE \cdot (AI \cdot HF + AF \cdot HI)$.

(G.M., E: 4422, *C. Cărbunaru*).

Soluție. a). Deoarece patrulaterele $AIHF$, $BIHF$ și $CEHF$ sînt inscriptibile, avînd fiecare cîte două unghiuri opuse drepte, rezultă că punctele sînt egal depărtate de cîte un punct care este centrul fiecărui cerc.

b). $\triangle AEC \sim \triangle AHF$ deoarece sînt dreptunghice și au comun unghiul EAC.

Analog, $\triangle AIC \sim \triangle HFC$ deoarece sînt dreptunghice și au unghiul ICH comun.

c). Deoarece $\sphericalangle BHC = \sphericalangle IHF = 180° - A$ (patrulaterul $AIHF$ este inscriptibil) și cum unghiul A este ascuțit rezultă că unghiul BHC este obtuz și triunghiul BHC este obtuzunghic; înălțimile sale sînt BA, EA, CA deci se intersectează în punctul A.

d). Din asemănarea triunghiurilor AEC și AHF avem: $EC = \frac{AE \cdot FH}{AF}$, iar din asemănarea triunghiurilor dreptunghice AEB și AHI (unghiul BAE este comun) avem: $EB = \frac{AE \cdot IH}{AI}$. Adunăm cele două relații $EC + EB = AE\left(\frac{FH}{AF} + \frac{IH}{AI}\right)$. Dar $EC + EB = BC$.

În acest fel, relația devine:

$$BC = AE \cdot \frac{EH \cdot AI + IH \cdot AF}{AF \cdot AI};$$

$$BC \cdot AI \cdot AF = AE \cdot (AI \cdot HF + AF \cdot HI).$$

3.96. Se consideră un cerc O, de rază R și un punct al lui A, din care se duc de o parte și de alta a diametrului AO, coardele AB și AD egale cu latura pătratului înscris și tot din A, coarda AC egală cu latura triunghiului echilateral. Să se exprime cu ajutorul razei, aria triunghiului ABC și a triunghiului ACD.

(R.M.F., 4004, *I. Teodorescu*).

Soluție. Avem prin construcție

arc $AB = 90°$, arc $AC = 120° \Rightarrow$ arc $BC = 30°$; rezultă $\sphericalangle BOC = 30°$,

$$CI = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2},$$

unde CI este perpendiculară pe diametrul BOD.

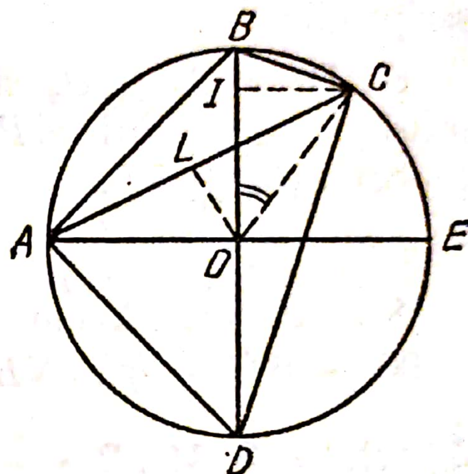


Fig. 3.96

Pentru calculul ariei triunghiului ABC avem:

aria ABC = aria AOB + aria BOC — aria AOC.

Aria AOB este 1/4 din aria pătratului înscris, aria AOC este 1/3 din aria triunghiului echilateral înscris, iar aria BOC este egală cu $\frac{1}{2}\left(R \cdot \frac{R}{2}\right) = \frac{R^2}{4}$.

Avem deci: Aria $ABC = \frac{1}{4}(2R^2) + \frac{1}{3} \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{R^2}{4} =$

$$= \left(\frac{9-\sqrt{3}}{12}\right)R^2.$$

Pentru aria triunghiului ACD, cînd coarda AD se află cu AC în semicercuri diferite, avem: aria ACD = aria AOD + aria AOC + aria COD, unde aria triunghiului COD este produsul bazei OD cu jumătate din înălțimea CI, adică $\frac{R^2}{4}$.

$$\text{aria } ACD = \frac{1}{4}(2R^2) + \frac{1}{3} \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{R^2}{4} = \left(\frac{9+\sqrt{3}}{12}\right)R^2.$$

3.97. Fie un cerc de diametru AB și MN o coardă (M și N de o parte și de alta a lui AB). Perpendiculara din B pe MN intersectează dreptele pe AM și AN respectiv în P și R; BN intersectează perpendiculara în A pe AB în S, iar BM pe AS în T.

a). Să se arate că AS trece prin centrul cercului circumscris triunghiului APR.

b). Patrulaterele $BSAP$, $BART$, $STMN$ sînt inscriptibile.

c). Dacă O_1 și O_2 sînt respectiv centrele circumscrise triunghiului APR și patrulaterului $MNST$, atunci $O_1O_2 \perp ST$.

(G.M.B., 11511, 1972).

Soluție. a). Avem $\sphericalangle ARP = 90° - \sphericalangle PBN = 90° - (90° - \sphericalangle MNB) = \sphericalangle MNB = \sphericalangle MAB$. Deci $\sphericalangle ARP = \sphericalangle MAB = \frac{\widehat{AP}}{2} \Rightarrow AB$ tangentă la cercul (APR). Cum $AB \perp AT$ rezultă că SA trece prin centrul cercului APR.

b). $\sphericalangle PAS + \sphericalangle PBN = 90° + \sphericalangle PAB + (90° - \sphericalangle NRB) = 180° + \sphericalangle PAB - \sphericalangle NRB = 180°$, deoarece la a) am arătat că $\sphericalangle PAB = \sphericalangle MAB = \sphericalangle NRB$. Deci $BAPS$ este inscriptibil.

$\sphericalangle ARB = \sphericalangle MAB = \sphericalangle ATB$ (rezultă din faptul că triunghiul ATB aste dreptunghic, iar $AM \perp TB$).

Deci patrulaterul $BRAT$ este inscriptibil.

$$\sphericalangle TSN = 90° - \sphericalangle SAN = 90° - \sphericalangle AMN = \sphericalangle NMB.$$

Deci $STMN$ este inscriptibil.

c). La a) am arătat că O_1 se găsește pe AS, deci pe ST. În cercul (O_2), ST este o coardă. Dacă $O_1O_2 \perp ST$, rezultă că O_1 este mijlocul lui ST. Vom demonstra deci că O_1 este mijlocul lui ST.

Notăm cu F al doilea punct de intersecție al dreptei AS cu cercul (O_1).

$$RF \perp AR,\ AR \perp SN \Rightarrow RF \parallel SN \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AS} = \frac{AR}{AN} \quad \text{sau} \quad \frac{AF}{SF} = \frac{AR}{RN}. \qquad (1)$$

$$\triangle ABR \sim \triangle APB \begin{cases} \sphericalangle RAB = \sphericalangle APB = 90° + \frac{\widehat{AN}}{2}. \\ \sphericalangle ARB = \sphericalangle PAB \Rightarrow \frac{AR}{AP} = \frac{RB}{AB}. \end{cases} \qquad (2)$$

$$\triangle BRN \sim \triangle AMB \Rightarrow \frac{NR}{AM} = \frac{RB}{AB}. \qquad (3)$$

Din (1), (2), (3) rezultă:

$$\frac{AR}{AP} = \frac{NR}{AM} \quad \text{sau} \quad \frac{AR}{NR} = \frac{AP}{AM}. \qquad (4)$$

Dar $FP \perp AP$ și $MB \perp AB \Rightarrow FP \parallel MB$ sau $FP \parallel MT$.

Deci $\frac{AF}{AT} = \frac{AP}{AM}$ Din (4) rezultă

$$\frac{AF}{AT} = \frac{AR}{NR}. \qquad (5)$$

Din (1) și (5) rezultă:

$$\frac{AF}{AT} = \frac{AR}{NR} = \frac{AF}{SF} \Rightarrow AT = ST \Rightarrow AS = FT.$$

Deci O_1 este mijlocul lui ST, ceea ce trebuia demonstrat.

3.98. Pe laturile unui triunghi ascuțit xOy se consideră punctul A pe Ox și B pe Oy. Se notează cu A' simetricul lui A față de Oy și cu B' simetricul lui B de Ox iar M este mijlocul segmentului $A'B'$.

a). Să se arate că $A'B = AB'$ și că $A'B' < OA + OB$.

b). Pentru ce valoare a unghiului xOy are loc relația $A'B' = 2OM$?

c). Considerînd punctul A fix să se afle poziția lui B pe Oy astfel ca M să fie situat pe bisectoarea unghiului xOy.

(G.M., 10414, *Z. Tauberg*).

Soluție. a). Triunghiul ABA' este isoscel deci $AB = BA'$. Triunghiul ABB' este isoscel deci $AB = AB'$ sau $A'B = AB'$.

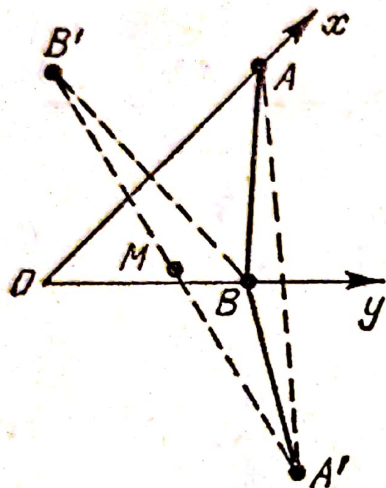


Fig. 3.98

Avem $OA = A'O$ și $OB = OB'$ însă, evident că $A'B' < AO' + AB'$.

b). Dacă $A'B' = 2OM$ atunci $MA' = MB' = MO$ deci punctele A, O, B' sînt pe un cerc cu centrul în M și prin urmare $\sphericalangle A'OB' = 90°$ (înscris în semicerc). $\sphericalangle xOB' = \sphericalangle xOy = \sphericalangle yOA'$ deci $\sphericalangle xOy = \frac{90°}{3} = 30°$.

c). Bisectoarea unghiului xOy este și bisectoarea unghiului $A'OB'$, rezultă că triunghiul este isoscel și trebuie ca OA și OB să fie egale.

3.99. În triunghiul ABC, unghiurile A, B, C $(A < B < C)$ sînt în progresie aritmetică iar $\frac{B}{3}$, A, C, $\left(\frac{B}{3} < A < C\right)$ sînt în progresie geometrică. Fie D și E respectiv pe AB și BC astfel că $\sphericalangle CDA = \frac{B}{2}$ și $\sphericalangle EAB = \frac{C}{4}$.

Să se arate că DE este paralelă cu AC.

(G.M., 15330, *I. Gh. Zamfirescu*).

Soluție. 1). *Determinarea unghiurilor* A, B, C.

Din progresia aritmetică rezultă: $A + A + r + A + 2r = 3A + 3r = 3(A + r) = 180° \Rightarrow A + r = 60° = B$.

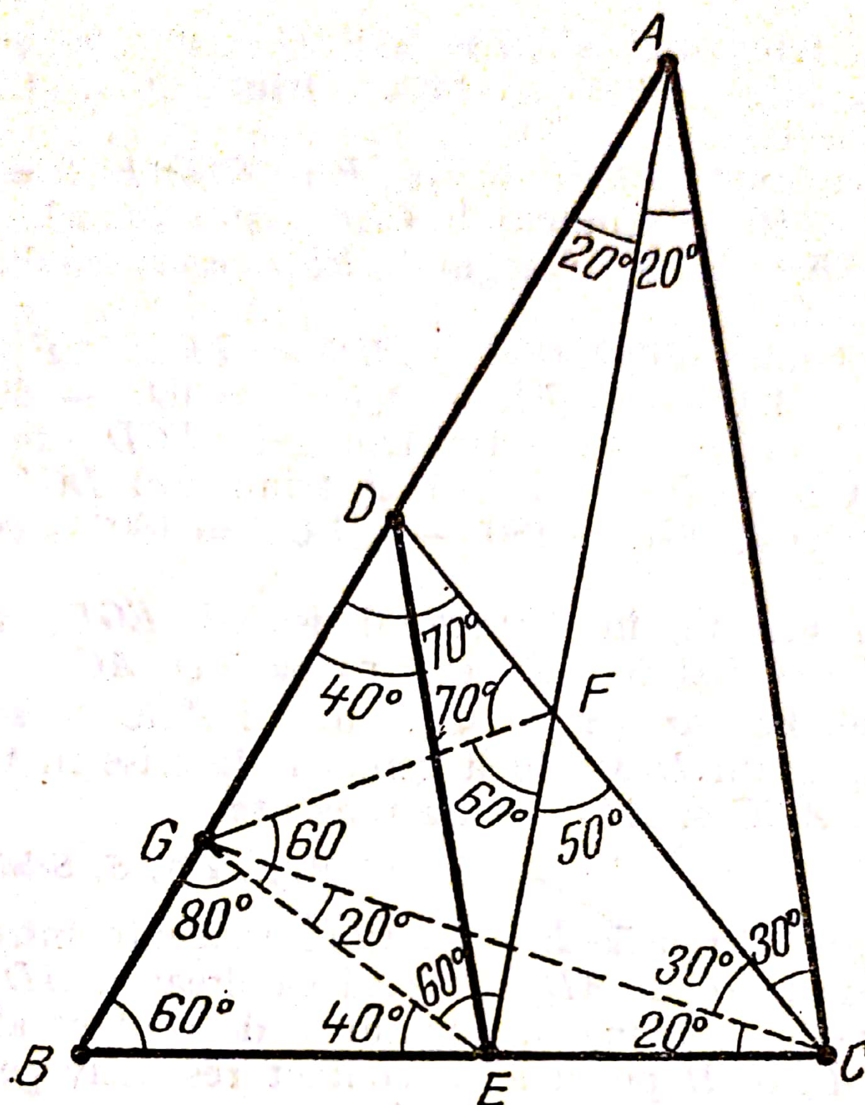


Fig. 3.99

Din progresia geometrică rezultă: $\frac{B}{3} + \frac{B}{3}q +$
$+ \frac{B}{3}q^2 = 180° \Rightarrow q^2 + q - 6 = 0 \Rightarrow q_1 = -3,\ q_2 = 2.$

Se reține $q = 2 \Rightarrow A = \frac{B}{3}q = 40°,\ \ C = 80°.$

2. *DE este paralelă cu AC.*

Ținînd seamă de valorile găsite pentru $A, B, C \Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle DCA = 30°,\ \sphericalangle EAB = 20°.$

Fie F intersecția dreptelor AE, CD.

Se duce CG astfel ca să avem $\sphericalangle BCG = 20°.$

Din patrulaterul inscriptibil $ACEG \Rightarrow \sphericalangle CGE = 20°$ și deci $CE = EG$.

Din triunghiul $CEG \Rightarrow \sphericalangle BEG = 40°$ (exterior), apoi $\sphericalangle BEA = 100°$ (exterior triunghiului CAE), $\sphericalangle GEF = 60°$.

Din triunghiul $CEF \Rightarrow \sphericalangle CEF = 80°, \sphericalangle ECF = 50°$, $\sphericalangle EFC = 50° \Rightarrow$ triunghiul CEF este isoscel, deci $EC = EF = EG \Rightarrow$ triunghiul EFG este echilateral $\Rightarrow FG = GE$.

Din triunghiul $BCD \Rightarrow \sphericalangle BDC = 70°$ și în F avem $\sphericalangle DFG = 180° - \sphericalangle GFE - \sphericalangle EFC = 180° - 60° - 50° = 70° = \sphericalangle FDG$ deci triunghiul FGD este isoscel $\Rightarrow GD = GF = GE$ deci și triunghiul DGE este isoscel. Dar $\sphericalangle DGE = 180° - \sphericalangle BGE = 180° - 80° = 100°$.

Prin urmare, în triunghiul isoscel EGD, avem $\sphericalangle EDG = 40°$ și deci ED este paralelă cu AC.

3.100. Pe baza BC a triunghiului ABC să se găsească punctul D așa încît cercurile înscrise în triunghiurile ABC și ADC să fie tangente.

(R.M.F., 261, *S. Sebârșin*).

Soluție. Cercurile înscrise fiind tangente între ele și aceleiași drepte AD, urmează că dreapta AD este tangenta lor comună în punctul T de contact al lor. Fie E, F, G, H punctele de contact respectiv pe segmentele BD, DC, CA, AB.

Tangentele duse dintr-un punct la un cerc fiind egale, rezultă:

$$ED = DT = DF; CF = CG; AG = AH; BH = BE.$$

Notăm $BD = x$, $CD = y$ și a, b, c, laturile triunghiului ABC. Rezultă relațiile:

$$x + y = a \text{ și}$$

$$x - y = BE - FC = BH - CG = AB - AC = c - b.$$

De unde

$$x = \frac{a + c - b}{2} = p - b, \text{ unde } 2p = a + b + c \text{ și}$$

$$y = \frac{a - c + b}{2} = p - c.$$

Prin urmare punctul D este punctul de contact al cercului înscris în triunghiul ABC, cu latura BC.

3.101. Fie un triunghi ABC și cercul său circumscris. Perpendiculara din B pe diametrul AD taie acest diametru în M; mai taie pe AC în N și cercul în P. Prin punctul P se duc paralele la DC și AC care taie pe AC și DC respectiv în Q și P.

a). Să se arate că punctele M, Q, R sînt așezate pe o paralelă la BC.

b). Să se arate că $NP \cdot BC = NB \cdot QR$.

(G.M.B., 2361, *Șt. Donescu*).

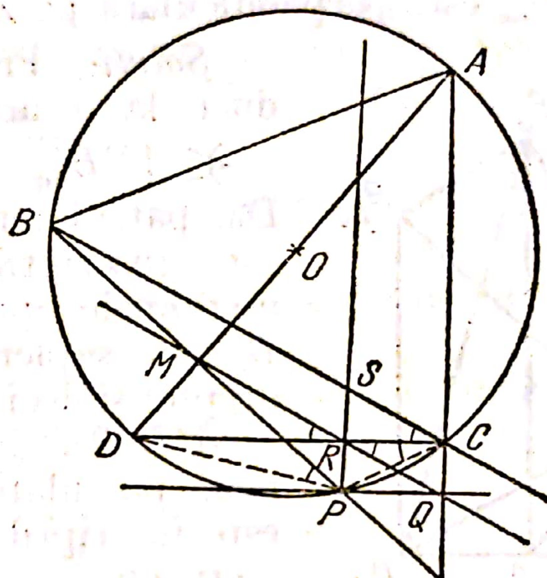


Fig. 3.101

Soluție. a). Pentru a arăta că punctele M, Q, R se găsesc pe o dreaptă vom arăta că $\sphericalangle MRD = \sphericalangle CRQ$.

Într-adevăr: patrulaterul $DMRP$ fiind inscriptibil, $\sphericalangle MRD = \sphericalangle MPD$. În cercul circumscris triunghiului ABC, $\sphericalangle BPD = \sphericalangle BCD = \sphericalangle DCP$, arcele BD și MP fiind egale. Deci $\sphericalangle MRD = \sphericalangle DCP$.

Pe de altă parte, patrulaterul $CRPQ$ fiind un dreptunghi, $\sphericalangle DCP = \sphericalangle CRQ$. De unde $\sphericalangle MRD = \sphericalangle CRQ$. Punctele M, Q, R sînt deci coliniare și cum am văzut că $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CRQ$, rezultă că dreapta MRQ este paralelă cu BC.

b). În triunghiul NBC în care PS este paralelă cu NC avem:

$$\frac{BP}{PN} = \frac{BS}{SC}; \quad \frac{BP + PN}{PN} = \frac{BS + CS}{CS}; \quad \frac{BN}{PN} = \frac{BC}{CS}.$$

Cum $CS = QR$ ca paralele cuprinse între paralele:

$$\frac{BN}{PN} = \frac{BC}{QR} \text{ sau } NP \cdot BC = BN \cdot QR.$$

3.102. Fie un triunghi ABC. Perpendiculara în A pe AB întîlnește BC în B_c. Perpendiculara în C pe BC întîlnește pe BA în B_a. Perpendiculara în B_a pe BA și în B_c pe BC se întîlnesc în B_{ac}. Să se demonstreze că dreapta BB_{ac} este perpendiculară pe AC.

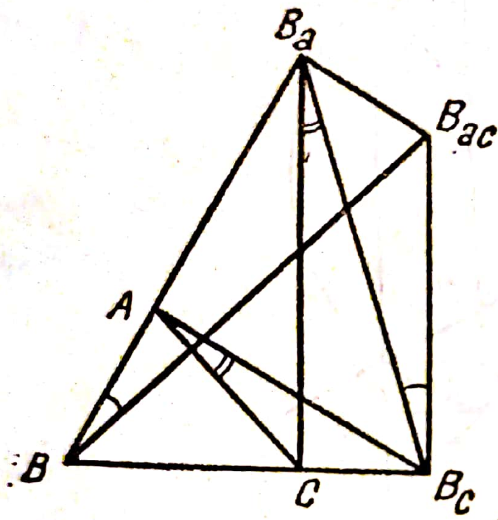


Fig. 3.102

Soluție. Problema se reduce la a arăta că

$$\sphericalangle ABB_{ac} = \sphericalangle CAB_c.$$

Dar patrulaterul $BB_aB_{ac}B_c$ este inscriptibil (deoarece unghiurile opuse din B_a și B_c sînt suplementare fiind drepte) și deci $\sphericalangle B_aBB_{ac} = \sphericalangle B_aB_cB_{ac}$. De asemenea, patrulaterul AB_aB_cC este inscriptibil (avînd $\sphericalangle B_aAB_c = \sphericalangle B_aCB_c = 90°$) și deci:

$$\sphericalangle CAB_c = \sphericalangle CB_aB_c.$$

Deci trebuie să arătăm că $\sphericalangle CB_aB_c = \sphericalangle B_aB_cB_{ac}$ evident, ca unghiuri alterne interne.

3.103. Să se arate că dacă intersecția diagonalelor unui patrulater inscriptibil $ABCD$ este mijlocul diagonalei BD, atunci există relația:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2AC^2.$$

Soluție. Fie M punctul de intersecție a diagonalelor.

Avem: $AM^2 = \dfrac{2(AB^2 + AD^2) - BD^2}{4}$ și

$MC^2 = \dfrac{2(BC^2 + CD^2) - BD^2}{4}$ din relația medianei.

Însumînd avem: $(AM + MC)^2 - 2AM \cdot MC =$ $= \dfrac{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - BD^2}{2}$, sau, ținînd seama de puterea punctului $M : MA \cdot MC = MB \cdot$ $\cdot MD = \dfrac{BD^2}{4}$, avem:

$$AC^2 - 2 \cdot \frac{BD^2}{4} = \frac{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - BD^2}{2},$$

adică $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2AC^2$.

3.104. Pe laturile unui triunghi ABC se consideră trei puncte M, N, P; $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CA$, astfel încît să avem:

$$AN = r \cdot AB, \quad BN = r \cdot BC, \quad CP = r \cdot CA$$

(r număr real).

1). Să se arate că triunghiurile AMP, BMN și CNP au ariile egale.

2). Care trebuie să fie valoarea numărului r pentru ca aria triunghiului MNP să fie 7/12 din aria triunghiului ABC?

3). În ce caz triunghiul MNP are aceeași arie cu triunghiul AMP?

Soluție. 1). Punctele N, M, P sînt interioare laturilor triunghiului ABC dacă $r \in (0, 1)$.

Deoarece triunghiurile AMP și ABC au în comun unghiul A, $\sphericalangle MAP = \sphericalangle BAC$, vom avea:

$$\frac{(AMP)}{(ABC)} = \frac{AM \cdot AP}{AB \cdot AC}$$

(am notat cu (ABC) aria triunghiului ABC).
Dar $AM = r \cdot AB$ iar $AP = AC - PC = AC -$ $- r \cdot AC = (1 - r) \cdot AC$. Rezultă:

$$\frac{(AMP)}{(ABC)} = \frac{r \cdot AB \cdot (1 - r) \cdot AC}{AB \cdot AC} = r(1 - r).$$

Analog se obține

$\dfrac{(BMN)}{(ABC)} = \dfrac{(CNP)}{(ABC)} = r(1 - r)$. De aici rezultă că:

$(AMP) = (BMN) = (CNP) = r(1 - r) \cdot (ABC)$.



2). Ținînd seama de rezultatul precedent, avem:

$$(MNP) = (ABC) - (AMP) - (BMN) - (CNP) =$$
$$= (ABC) - 3\cdot(AMP) = (ABC)\left[1 - 3\frac{(AMP)}{(ABC)}\right] =$$
$$= (ABC)\cdot(1 - 3r + 3r^2).$$

Rezultă că $\frac{(MNP)}{(ABC)} = \frac{7}{12}$, cînd $1 - 3r + 3r^2 = \frac{7}{12} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{6}$, $r_2 = \frac{5}{6}$. Ambele soluții convin.

3). Din condiția $(MNP) = (AMP)$ și folosind rezultatul de la punctul 1) rezultă că $\frac{(MNP)}{(ABC)} = 1 - 3r + 3r^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow (2r - 1)^2 = 0$, deci $r = \frac{1}{2}$.

3.105. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$ unghiurile A și B sînt drepte, iar diagonala BD este egală cu baza mare BC.

a). Să se arate că cercul circumscris triunghiului isoscel BDC taie segmentul AB într-un punct E situat între A și B.

b). Să se arate că DE este bisectoarea unghiului ADB.

c). Să se arate că paralela dusă prin E la bazele trapezului trece prin intersecția diagonalelor trapezului.

(G.M.B., 13094, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Deoarece $\sphericalangle BCD < 90°$ rezultă că $\sphericalangle BED = 180° - \sphericalangle BCD > 90°$ deci punctul E aparține segmentului AB.

b). În triunghiul isoscel BDC avem $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BCD$. Din egalitatea $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 180°$ deducem:

$$\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDB + \sphericalangle BDE + \sphericalangle EDA = 180°.$$

Deci: $\sphericalangle BDE + \sphericalangle EDA = 180° - 2\sphericalangle BCD$. (1)

Din patrulaterul inscriptibil $BCDE$ deducem

$$\sphericalangle DEB = 180° - \sphericalangle BCD. \tag{2}$$

Deoarece $\sphericalangle DEB$ este unghi exterior triunghiului ADE avem:

$$\sphericalangle DEB = 90° + \sphericalangle EDA. \tag{3}$$

Deci din relațiile (2) și (3) deducem

$$\sphericalangle EDA = 90° - \sphericalangle BCD$$

și deoarece avem și relația (1) rezultă că $\sphericalangle EDA = \sphericalangle BDE$, adică DE este bisectoarea interioară a unghiului ADB.

c). Notăm $AE = m$ și $BE = n$ iar I este intersecția diagonalelor trapezului. Fie $m' = IF$ și $n' = IG$ înălțimile în triunghiurile AID și BIC. Din asemănarea triunghiurilor AID și BIC deducem:

$$\frac{m'}{AD} = \frac{n'}{BC} = \frac{m' + n'}{AD + BC}.$$

Triunghiurile dreptunghice EAD și EBC sînt asemenea deoarece $\sphericalangle EDA = \sphericalangle EDB = \sphericalangle ECB$ ultima egalitate rezultînd din patrulaterul inscriptibil $BCDE$.

Scriind proporționalitatea laturilor omoloage avem:

$$\frac{m}{AD} = \frac{n}{BC} = \frac{m + n}{AD + BC}.$$

Deoarece $m + n = m' + n'$ rezultă că

$$m = m' = \frac{(m + n)AD}{AD + BC} \quad \text{și} \quad n = n' = \frac{(m + n)BC}{AD + BC},$$

ceea ce ne arată că EI este paralelă cu BC.

3.106. Într-un triunghi dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, ducem bisectoarea unghiului A care întîlnește pe BC în D, iar prin D ducem perpendiculara pe BC, care taie pe AB în E și pe AC în F.

a). Să se arate că $BD = DF$ și $CD = DE$.

b). Să se arate că simetricul punctului E față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BFC și că simetricul punctului F față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BEC, iar aceste două cercuri sînt egale între ele.

c). Să se arate că unghiurile BEF și BCF sînt egale și că $AE \cdot BF = AF \cdot CE$.

Soluție. a). Patrulaterul $ABDF$ este inscriptibil pentru că unghiurile opuse BAF și BDF sînt suplementare (fiecare e unghi drept). AD fiind bisectoare, înseamnă că $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = 45°$. De aici rezultă că $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DF}$. Dar, într-un cerc la care arce egale corespund coarde egale, deci $BD = DF$.

Patrulaterul $ADCE$ este și el inscriptibil pentru că segmentul EC se vede sub același unghi $(90)°$ și din A și din D.

De aici rezultă că $\sphericalangle DEC = \sphericalangle DAC = 45°$.

Triunghiul DEC fiind dreptunghic în D, înseamnă că $\sphericalangle DEC = 90° - 45° = 45°$, deci triunghiul DEC este isoscel și prin urmare $CD = DE$.

b). Vom arăta că patrulaterele $BE'CF$ și $BECF'$ sînt inscriptibile și că sînt egale.

Din patrulaterul inscriptibil $ADCE$ avem că $\sphericalangle AEF = \sphericalangle FCB$.

Dar $\sphericalangle AEF = \sphericalangle BED$ ca fiind simetrice față de BC. Deci $\sphericalangle BEF = \sphericalangle FCB$. Prin urmare segmentul BF se vede sub același unghi și din E' și din C, deci patrulaterul $BE'CF$ este inscriptibil; deci E' se găsește pe cercul circumscris triunghiului BFC. Unghiul DCF' este egal cu unghiul FCD, fiind simetrice față de BC. Dar am văzut că $\sphericalangle AEF = \sphericalangle FCD$ și $\sphericalangle BE'F = \sphericalangle AEF$.

De aici rezultă că $\sphericalangle DCF' = \sphericalangle AEF$, deci segmentul BF' se vede sub același unghi și din E și din C, deci patrulaterul $BECF'$ este inscriptibil și deci F' se află pe cercul circumscris triunghiului BEC. Să arătăm că cele două patrulatere inscriptibile $BFCE'$ și $BECF'$ sînt egale.

Avem: $BE' = BE$; $BF = BF'$; $FC = F'C$; $CE' = CE$ ca segmente simetrice față de dreapta BC.

De aici rezultă că $\triangle(BE'C) = \triangle(BEC)$; $\triangle(BFC) = \triangle(BF'C)$. Deci cele două patrulatere sînt formate din două triunghiuri respectiv egale și la fel așezate, deci cele două patrulatere sînt egale și prin urmare cercurile circumscrise lor sînt egale.

c). Din patrulaterul inscriptibil $ABDF$ avem $\measuredangle ABF = \measuredangle ADF$. Din patrulaterul inscriptibil $ADCE$ avem $\measuredangle ADF = \measuredangle ADE = \measuredangle ACE$.

Din cele două șiruri de egalități rezultă că $\measuredangle ABF = \measuredangle ACE$ sau $EBF = \measuredangle ACE$.

Din aceste egalități rezultă că triunghiurile dreptunghice ABF și ACE sînt asemenea, avînd cîte un unghi ascuțit egal.

Din asemănarea acestor triunghiuri avem:

$$\frac{AF}{AE} = \frac{BF}{CE}, \quad \text{de unde } AE \cdot BF = AF \cdot CE.$$

3.107. Fie M mijlocul unui segment AB. Se duce un cerc tangent segmentului AB în punctul M. O secantă dusă din A taie cercul în punctele C și D, iar o secantă oarecare dusă din B taie cercul în punctele E și F. Dreptele CF și DE taie dreapta AB respectiv în punctele G și H. Să se demonstreze că segmentele AG și BH sînt egale.

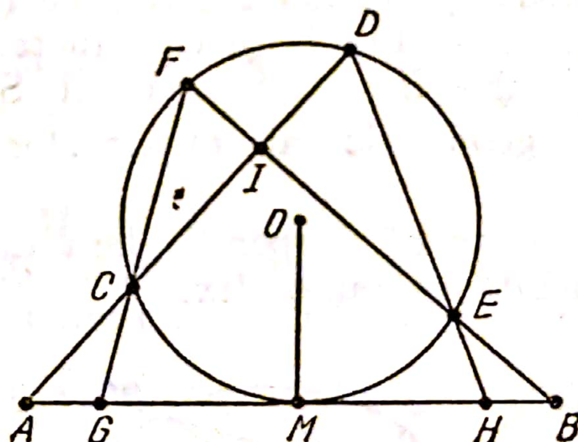


Fig. 3.107

Soluție. Fie $I \equiv (AD, BF)$. Aplicînd *teorema lui Menelaus* triunghiului AIB tăiat de transversalele FCG și DEH, obținem:

$$\frac{CA}{CI} \cdot \frac{FI}{FB} \cdot \frac{GB}{GA} = 1 \qquad (1)$$

și

$$\frac{HB}{HA} \cdot \frac{DA}{DI} \cdot \frac{EI}{EB} = 1. \qquad (2)$$

Cum $AM = MB$, rezultă că A și B au aceeași putere față de (O) și deci:

$$AC \cdot AD = BE \cdot BF. \tag{3}$$

Puterea lui I față de (O) este

$$IC \cdot ID = IE \cdot IF. \tag{4}$$

Înmulțind relațiile (1) și (2) și ținînd seama de (3) și (4) obținem:

$$\frac{BG \cdot BH}{AG \cdot AH} = 1 \text{ sau } \frac{AH}{BH} = \frac{BG}{AG};$$

$$\frac{AH - BH}{BH} = \frac{BG - AG}{AG}; \quad \frac{HB}{BH} = \frac{HB}{AG},$$

de unde $AG = BH$.

3.108. Se dă un triunghi dreptunghic ABC înscris într-un cerc dat. Ipotenuza BC rămîne fixă, iar vîrful A se mișcă pe cerc. Fie B' și C' punctele unde bisectoarele unghiurilor B și C taie cercul. Se cere:

a). Locul geometric al mijloacelor segmentului $B'C'$.

b). Să se arate că perpendiculara dusă din A pe $B'C'$ trece printr-un punct fix.

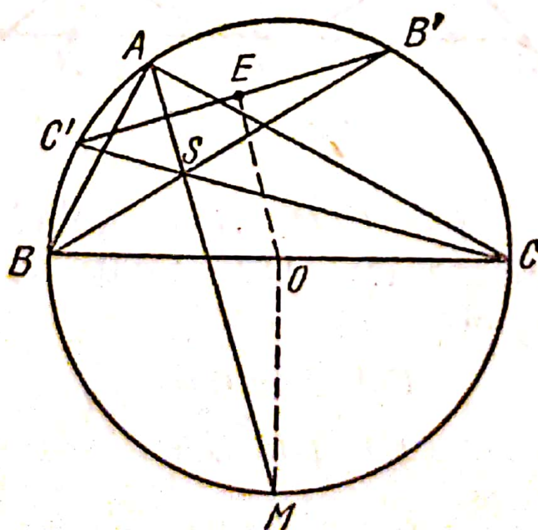


Fig. 3.108

Soluție. a). Avem $\widehat{B'C'} = \frac{\widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow B'C' = l_4$; $OE = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ deci locul lui E este un cerc concentric cu cercul dat de rază $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

b). Fie $AS \perp B'C'$, iar M intersecția dreptei AS cu cercul.

$$\sphericalangle ASB' = 90° = \frac{\widehat{AC} + \widehat{AB} + \widehat{BM}}{2};$$

$$\sphericalangle ASC' = \frac{\widehat{AC} + \widehat{AB} + \widehat{CM}}{2};$$

$BM = \widehat{MC} = 90°$. Deci punctul M este intersecția diametrului perpendicular pe BC cu cercul dat.

3.109. Se consideră un triunghi isoscel OAB ($OA = OB$) în care latura OA rămîne fixă. Să se afle locurile geometrice ale centrelor cercurilor exînscrise în unghiurile A și B.

Soluție. Fie M și N centrele acestor cercuri. Se observă că $OM \parallel AB$ și $ON \parallel AB$. Cum AN, BM sînt bisectoarele exterioare ale unghiurilor A și B avem:

$$\sphericalangle OAN = \sphericalangle ONA \text{ și } \sphericalangle OBM = \sphericalangle OMB.$$

Deci, triunghiurile OAN, OAM sînt isoscele, iar M și N descriu același cerc cu centrul O și raza OA.

3.110. Două cercuri sînt tangente exterior în A. Fie TT' o tangentă comună exterioară, T și T' punctele de contact iar M și M' intersecțiile celor două cercuri cu o dreaptă mobilă care trece prin punctul A.

a). Să se afle locul geometric al punctului P intersecția dreptelor MT și $M'T'$.

b). Să se arate că dreptele PA și MM' sînt perpendiculare.

Soluție. a). Avem $\sphericalangle ATT' = \sphericalangle AMT$; $\sphericalangle AM'T' =$
$= \sphericalangle AT'T$.

$$\sphericalangle ATT' + \sphericalangle AT'T = 90° \Rightarrow \sphericalangle PMM' + \sphericalangle PM'M =$$
$$= 90° \Rightarrow \sphericalangle MPM' = 90°.$$

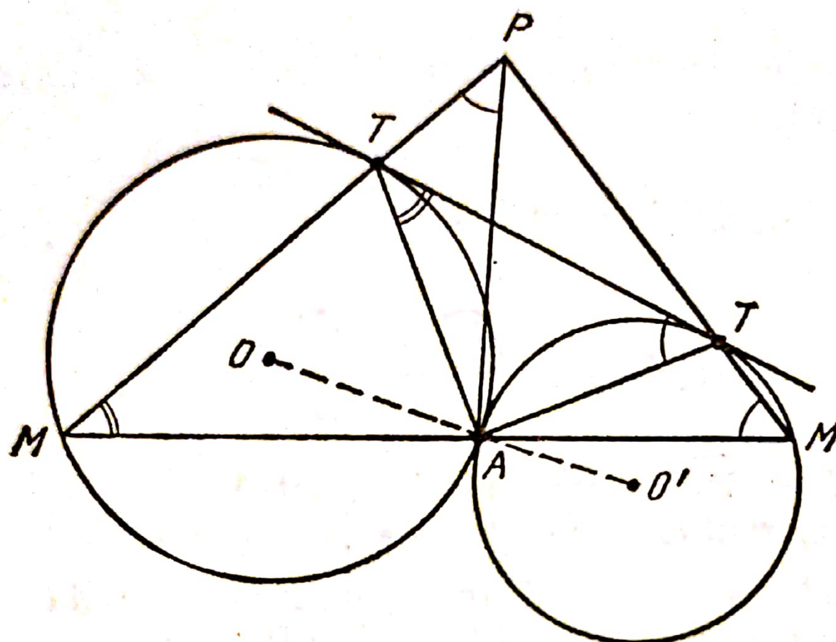


Fig. 3.110

Locul lui P este cercul de diametru TT'.

b). Patrulaterul $AT'PT$ este inscriptibil ($\sphericalangle TAT' =$
$= 90°$)

$$\sphericalangle TT'A = \sphericalangle TPA; \sphericalangle PMM' + \sphericalangle MPA = 90° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sphericalangle PAM = 90°.$$

3.111. Fie ACA' și BOB' două triunghiuri isoscele, unde $AO = A'O$ și $BO = B'O$, $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle BOB' = \alpha$. Punctele AO și B fiind fixe, să se afle locul geometric al celei de a doua intersecții a cercurilor AOA' și BOB'.

Soluție. Fie M a doua intersecție a cercurilor, AOA' și BOB' pentru un anumit unghi α.

Avem $\sphericalangle AA'O = \sphericalangle AMO = \sphericalangle OB'B$.

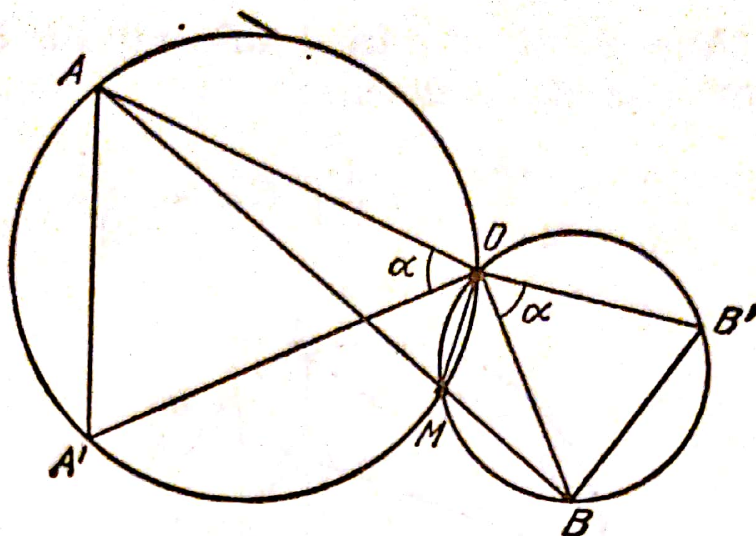


Fig. 3.111

Dar

$$\sphericalangle AMO + \sphericalangle OMB = 180° \text{ sau } \sphericalangle OB'B + \sphericalangle OMB = 180°.$$

Rezultă că punctele A, M, B sînt coliniare.

Cum A și B sînt fixe rezultă că locul lui M se află pe dreapta (segmentul) AB.

3.112. Fie un cerc O de diametru AB. Într-un punct C (fix) al acestui diametru ridicăm perpendiculara. Secanta variabilă ANM taie perpendiculara în N și cercul în M. Se cere:

a). Locul geometric al centrului cercului circumscris patrulaterului $CNMB$;

b). Locul punctelor de contact ale tangentelor duse din A la aceste cercuri;

c). Locurile a) și b) taie diametrul AB respectiv în R și P. Să se arate că segmentul PR este egal cu diferența dintre media aritmetică și cea geometrică a segmentelor AB și AC.

Soluție. a). Patrulaterul $CNMB$ este evident inscriptibil și centrul său O' este mijlocul ipotenuzei comune NB Din O' coborîm perpendiculara $O'R$ pe AB. Triunghiurile $OO'R$ și ACN sînt asemenea și deci

$$\frac{OR}{AC} = \frac{OO'}{AN}. \qquad (1)$$

Dar $AN = 2 \cdot OO'$; OO' fiind linie mijlocie în triunghiul ABN. Așa că (1) devine:

$$\frac{OR}{AC} = \frac{OO'}{2 \cdot OO'} = \frac{1}{2}; \quad OR = \frac{AC}{2}.$$

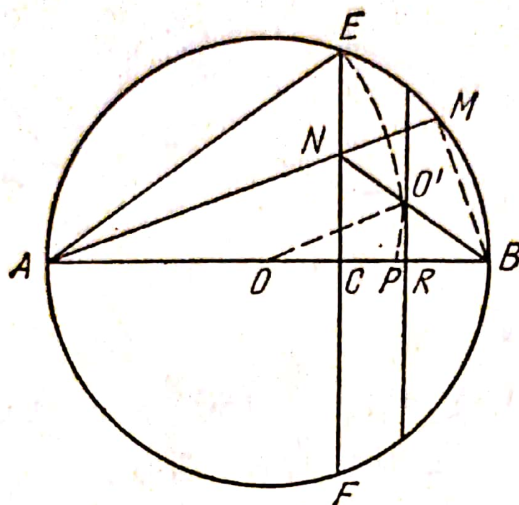


Fig. 3.112

Deci OR este fix, așa că locul centrelor este perpendiculara din O' pe AB.

b). Fie E și F respectiv punctele unde perpendiculara în C taie cercul O. Dacă notăm cu T punctul de contact al tangentei, avem:

$$AT^2 = AB \cdot AC; \text{ dar și } AE^2 = AC \cdot AB,$$

și deci $AT = AE =$ constant, așa că locul este cercul cu centrul în A și raza $AE = \sqrt{AB \cdot AC}$.

c). Deci $AP = \sqrt{AB \cdot AC}$, iar $AR = AO + OR = AO + \frac{AC}{2} = \frac{AB + AC}{2}$. Avem evident $AP < AR$, și prin urmare:

$$PR = AR - AP = \frac{AB + AC}{2} - \sqrt{AB \cdot AC}$$

ceea ce s-a cerut.

3.113. Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$ fix și două cercuri (O_1) și (O_2) tangente în T, unul trecînd prin A și B celălalt prin C și D. Să se găsească locul geometric al punctului T cînd cercurile (O_1) și (O_2) variază.

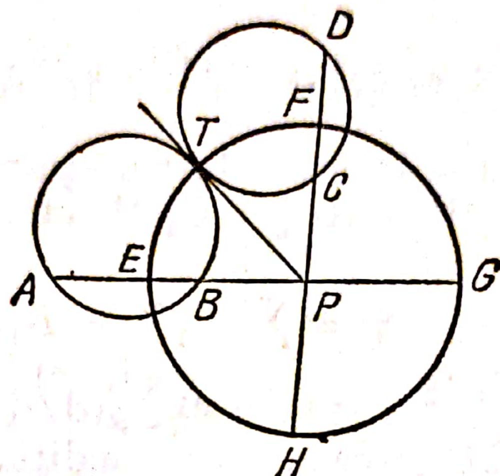


Fig. 3.113

Soluție. Patrulaterul $ABCD$ fiind inscriptibil, punctul P de intersecție a lui AB și CD (dacă există) va verifica relația: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, deci se va afla pe axa radicală a cercurilor (O_1) și (O_2). Exprimînd puterea sa față de cercul O_1 obțin $PT^2 = PA \cdot PB =$ $=$ constant, deci locul geometric căutat va fi un cerc cu centrul în P minus punctele sale de pe AB și CD.

Dacă dreptele AB și CD nu se întîlnesc, $ABCD$ trebuie să fie trapez isoscel, linia centrelor cercurilor (O_1) și (O_2) este axa de simetrie a trapezului și e invariabilă. În acest caz, locul geometric este compus din toate punctele axei de simetrie a trapezului, exceptînd cele 2 puncte de intersecție cu laturile paralele AB și CD.

3.114. În același plan se dau cercurile cu centrele în punctele A, B și C. Fie A_1, B_1 și C_1 intersecțiile tangentelor interioare. Să se arate că perpendicularele pe laturile triunghiului ABC duse prin A_1, B_1 și C_1 sînt concurente.

(Rev. Pitagora, 4, 1937, C. *Ionescu Țiu*).

Soluție. Fie R_1, R_2 și R_3 razele cercurilor A, B și C.

Triunghiurile dreptunghice cu ipotenuzele B_1A și A_1C fiind asemenea avem:

$$\frac{BA_1}{R_2} = \frac{A_1C}{R_3} = k_1 \text{ sau } BA_1 = k_1R_2 \text{ și } A_1C = k_1R_3.$$

Analog avem: $B_1A = k_2R_1$, $B_1C = k_2R_2$, $AC_1 = k_3R_1$ și $C_1B = k_3R_2$.

Presupunem că se întîlnesc într-un punct P. $AP^2 = AB_1^2 + B_1P^2 = AC_1^2 + C_1P^2$, etc. Mai putem scrie:

$$\sum(AB_1^2 - AC_1^2) = \sum(C_1P^2 - B_1P^2);$$

însă $\sum(C_1P^2 - B_1P^2) = 0$, deci $\sum(AB_1^2 - AC_1^2) = 0$ sau $\sum AB_1^2 = \sum AC_1^2$, care este condiția ca perpendicularele pe laturi în A_1, B_1, C_1 să fie concurente.

3.115. Pe latura BC a triunghiului oarecare ABC se ia un punct D, iar triunghiurilor ABD și ACD se circumscriu cercurile O_1 și O_2. Să se demonstreze:

a). Punctele de intersecție cu cercurile, ale diametrelor duse prin A sînt coliniare cu al doilea punct de intersecție al cercurilor.

b). Raportul razelor celor două cercuri e constant.

c). Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul AO_1O_2.

d). Să se afle locul geometric al proiecției punctului A pe O_1O_2.

(Concurs elevi, 1955).

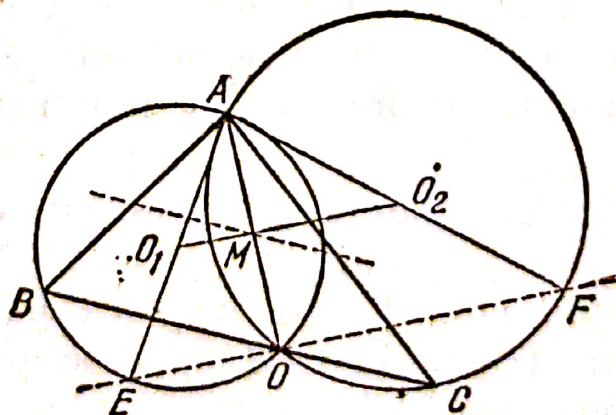


Fig. 3.115

Soluție. a). AD este coarda comună a cercurilor O_1 și O_2. Prin urmare $AM = MD$ și deoarece $AO_1 = O_1E$ și $AO_2 = O_2F$, rezultă că punctele E, D, F sînt coliniare.

b). Să notăm cu R_1 și R_2 razele cercurilor O_1 și O_2. Vom avea:

$$R_1 = \frac{AD}{2 \sin B} \text{ și } R_2 = \frac{AD}{2 \sin C},$$

deci:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin C}{\sin B} = R_c.$$

c). O_1O_2 este linie mijlocie în triunghiul AEF. Deci, $\sphericalangle AO_1O_2 = \sphericalangle AEF$ și $\sphericalangle AO_2O_1 = \sphericalangle AFE$.

Însă, în patrulaterele inscriptibile $ABEB$ și $ADCF$ avem:

$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle B \quad \text{și} \quad \sphericalangle AFE = \sphericalangle C,$$

deci $\quad \sphericalangle AO_1O_2 = \sphericalangle B \quad$ și $\quad \sphericalangle AO_2O_1 = \sphericalangle C,$

deci triunghiurile O_1O_2A și BCA sînt asemenea.

Avem $\dfrac{AO_1}{AO_2} = \dfrac{\sin C}{\sin B} = \dfrac{c}{b}$, deci triunghiurile O_1O_2A și BAC sînt asemenea.

d). Punctul M, care se află la mijlocul lui AD, este proiecția lui A pe O_1O_2. Aflîndu-se la mijlocul lui AD, cînd AD va varia, M va descrie o paralelă la BC, paralelă ce trece prin mijloacele laturilor AB și AC.

3.116. Ox și Oy fiind două drepte perpendiculare se consideră toate dreptunghiurile $ABCD$ care au vîrful A pe Ox, vîrful C pe Oy șu raportul laturilor $\dfrac{AB}{BC} = k$. Se cere:

a). Locul vîrfurilor B și D. b). Locul centrelor dreptunghiurilor.

a). *Soluție.* Avem $\sphericalangle CDA = 90°$, iar $\frac{CD}{DA} = k$, deci triunghiurile ACD rămîn asemenea între ele.

Patrulaterele $OADC$ și $OACB$ sînt inscriptibile.

$$\sphericalangle BOC = \sphericalangle BAC; \sphericalangle AOD = \sphericalangle ACD = \text{constant}.$$

Rezultă că locul vîrfurilor B și D sînt respectiv dreptele OB și OD.

b). Ipotenuza AC este constantă dacă dimensiunile OA și OB sînt date. $OM = \frac{AC}{2} =$ constant, deci locul lui M este cercul de centrul O și de rază $AC/2$.

3.117. În trapezul $ABCD$ ($BC \parallel AD$), fie $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$ și H punctul de intersecție a diagonalelor AC și BD. Să se afle locul geometric al punctului H atunci cînd trapezul se deformează, una din laturile paralele rămînînd fixă.

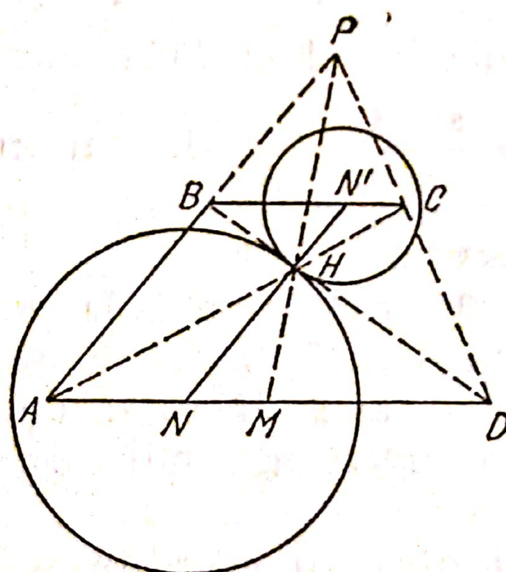


Fig. 3.117

Soluție. Notăm cu P punctul de intersecție a laturilor neparalele AB și CD. Avem:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AD}{BC} \quad \text{sau} \quad \frac{AP - AB}{AP} = \frac{BC}{AD}$$

din care $AP = \frac{ac}{a-b} = \text{const.}$ Considerăm cazul AD fixă.

Segmentul PH taie prin prelungire latura fixă AD în punctul M. Ținînd seama că $\frac{CD}{CP} \cdot \frac{BP}{BA} = 1$, relația lui Ceva $\frac{MA}{MD} \cdot \frac{CD}{CP} \cdot \frac{BP}{BA} = -1$ devine $\frac{MA}{MD} = -1$ și astfel M este un punct fix, mijlocul laturii fixe AD.

Prin H ducem paralela HN la AP. Din relația:

$$\frac{HP}{HM} = \frac{BP}{BA} + \frac{CP}{CD}$$

sau

$$\frac{HP}{HM} = \frac{2BP}{BA}$$

obținem $\frac{NA}{NM} = \frac{2BP}{BA}$, relație care arată că punctul N este fix.

Cum triunghiul PAM și triunghiul HNM sînt asemenea, avem $NH = \frac{ac}{a+b} = \text{const.}$ și locul geometric al punctului H este un cerc de centru N și rază $NH = \frac{ac}{a+b}$.

Observație. În cazul cînd latura BC este fixă obținem analog un cerc de centru N' și rază $N'H$. Cercurile (N) și (N') sînt tangente în H.

3.118. Se dau două drepte perpendiculare Ox și Oy și două drepte paralele cu Oy, dreptele D_1 și D_2. Un unghi drept cu vîrful în O se rotește în jurul lui O, intersectînd cu o latură pe D_1, în P, iar cu a doua latură pe D_2 în Q. Să se afle locul geometric al proiecției lui O pe dreapta PQ.

Soluție. Să însemnăm cu A și B intersecțiile dreptei Ox cu D_1 și D_2 și cu M proiecția vîrfului O pe dreapta PQ.

Patrulaterul $OAMP$ este inscriptibil.

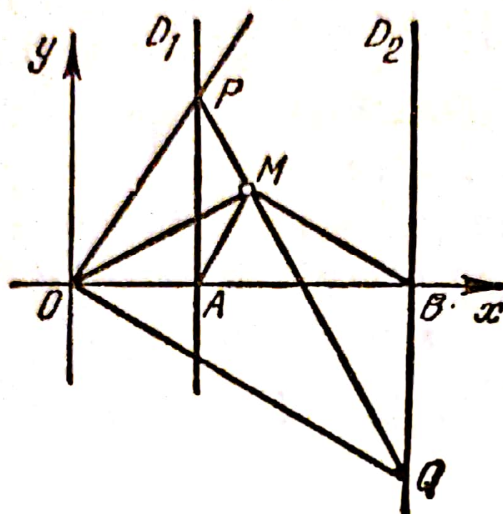


Fig. 3.118

Rezultă $\sphericalangle AOP + \sphericalangle AMP = 180°$.

Patrulaterul $OMBQ$ este de asemenea inscriptibil. Rezultă relația:

$$\sphericalangle OQB + \sphericalangle OMB = 180°.$$

Unghiurile AOP și OQB sînt însă egale avînd laturile perpendiculare rezultă deci și egalitatea $\sphericalangle AMP = \sphericalangle OMB$.

Din cei doi membri ai ei scădem unghiul OMA și obținem egalitatea

$$\sphericalangle OMP = \sphericalangle AMB = 90°.$$

Punctul M este vîrful unui unghi drept, laturile lui trecînd prin punctele fixe A, B. Locul lui M este deci cercul descris pe AB ca diametru.

3.119. Pe laturile unui unghi xOy, se iau două segmente $AA' = BB'$ oarecare, variabile ca mărime și poziție. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție al cercurilor $OA'B$ și OAB', precum și al cercurilor OAB și OAB'.

(G.M.B., 4368)

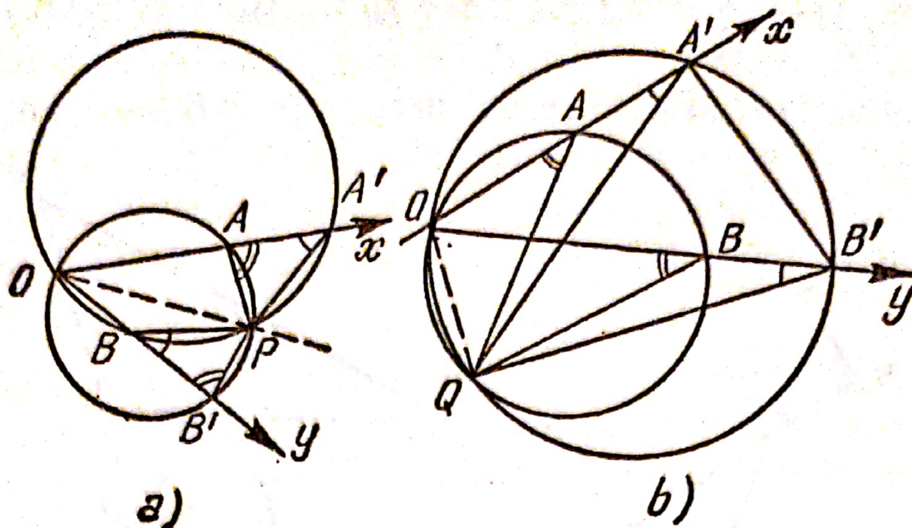


Fig. 3.119

Soluție: a). Fie P punctul de intersecție al cercurilor $OA'B$ și OAB'. Triunghiurile PAA' și PBB' sînt egale, căci au $AA' = BB'$.

$$\sphericalangle PAA' = \sphericalangle PB'B \text{ și } \sphericalangle PA'A = \sphericalangle PBB'.$$

Rezultă $AP = PB'$ deci P se află pe bisectoarea unghiului xOy.

b). Fie Q punctul de intersecție al cercurilor OAB și $OA'B'$. Triunghiurile QAA' și QBB' sînt egale, căci $AA' = BB'$; $\sphericalangle OAQ = \sphericalangle OBQ$ și $\sphericalangle OAQ = \sphericalangle OB'Q$.

Rezultă $QA' = QB$, deci $\sphericalangle QB'A' = \sphericalangle QA'B' = \sphericalangle QOB'$. Însă, $\sphericalangle QB'A' = \sphericalangle QOx'$, Ox' fiind prelungirea dincolo de vîrf a laturii Ox. Deci $\sphericalangle QOB' = \sphericalangle QOx'$.

Punctul Q se află pe bisectoarea unghiului suplementar unghiului dat xOy.

3.120. Pe un segment fix AB se ia un punct variabil C (cuprins între A și B). Prin acest punct se duce o dreaptă variabilă Δ pe care se iau în același sens segmentele $CD = AC$ și $CE = BC$. Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor AD și BE.

Soluție. Deoarece $AC = DC$ și $BC = CE$, triunghiurile ACD și BEC sînt isoscele. Deci avem: $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ADC$ și $\sphericalangle EBC = \sphericalangle CEB$. Dar $\sphericalangle DCA + \sphericalangle ECB =$

$= 180°$. Deci, $2\sphericalangle DAC + 2\sphericalangle EBC = 180°$ sau $\sphericalangle DAC + \sphericalangle EBC = 90°$, de unde rezultă că $\sphericalangle AMB = 90°$ adică locul lui M este cercul descris pe AB ca diametru.

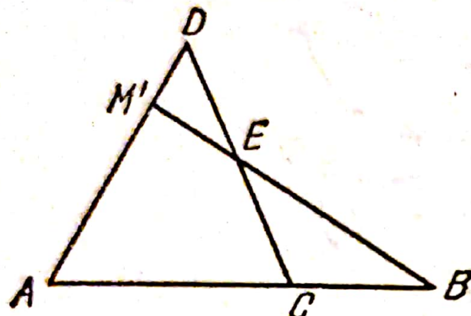


Fig. 3.120

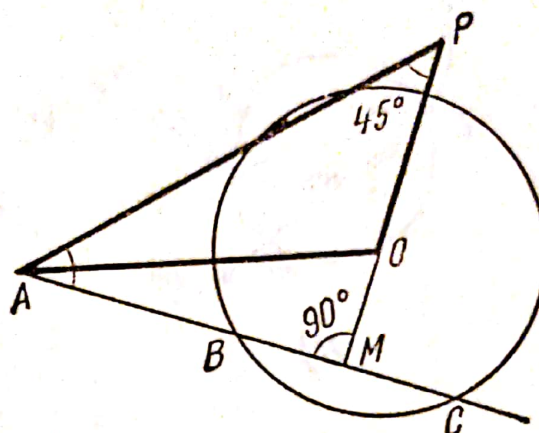


Fig. 3.121

3.121. Se dă un cerc și un punct fix A. Dreapta mobilă dusă prin A taie cercul în B și C. Pe mijlocul M al coardei BC se duce perpendiculara MP egală cu MA. Care este locul geometric al lui P?

Soluție. Evident, triunghiul dreptunghic AMP fiind isoscel, unghiul $APM = 45°$ și cum MP trece prin O centrul cercului dat rezultă că locul lui P este format din două arce de cerc descrise pe AO drept coardă, capabile de unghiul $APO = 45°$ și simetrice față de AO.

3.122. Se consideră un triunghi isoscel OAB ($OA = OB$) în care latura OA rămîne fixă. Să se afle locurile geometrice ale centrelor cercurilor exînscrise în unghiurile A și B.

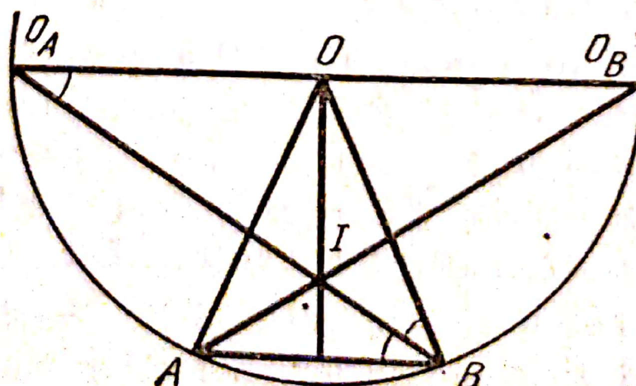


Fig. 3.122

Soluție. Fie O_A, O_B cele două cercuri exînscrise unghiurilor A și B. Avem $\sphericalangle ABO_A = \sphericalangle O_ABO$, însă $\sphericalangle ABO_B = \sphericalangle OO_AB$, deci triunghiul OO_AB este isoscel, iar $OO_A = OB = OA$. Locul lui O_A este cercul O de rază $OA=OB$. Analog $OO_B = OA = OB$, iar locul lui O_B este tot cercul O de rază $OA = OB$ (O_A și O_B sînt diametral opuse în cercul O).

3.123. Se dă cercul O, punctul A pe cerc, diametrul NM și dreapta Δ perpendiculară pe MN în B. Dreapta AN taie pe Δ în C. Se cere locul geometric al centrului cercului ABC:

a). cînd A este mobil pe cerc iar Δ este fixă.

b). cînd A este fix iar Δ se deplasează paralel cu ea însăși.

Soluție. a). Se observă că patrulaterul $ABCM$ este inscriptibil și deci cînd A variază, MB, coardă în cercul ABC, rămîne fixă. Prin urmare centrul cercului ABC este mobil pe mediatoarea lui MB.

b). În cazul cînd A este fix, coarda AM din cercul ABC rămîne fixă și locul centrului este mediatoarea lui AM.

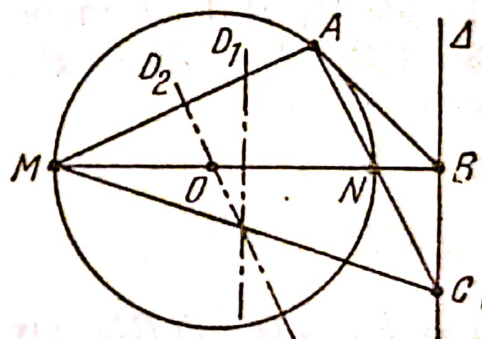


Fig. 3.123

3.124. Două cercuri de centre O și O' și raze respectiv R și r sînt tangente exterior în punctul T. Prin O și O' se duc în fiecare din cele două cercuri diametrele paralele AOB și $CO'D$, unde A și C sînt de aceeași parte a lui OO'.

a). Să se demonstreze că AC, BD și OO' concură în același punct P.

b). Să se exprime PO și PO' în funcție de R și r.

c). Să se demonstreze că dreptele AD și BC trec prin R.

d). Dreapta AC mai taie cercul cu centrul O și cercul cu centrul O' respectiv în A' și C'. Să se arate că OA' și $O'C'$ sînt paralele.

(G.M., 4784, 1974, *C. Ionescu-Ţiu*).

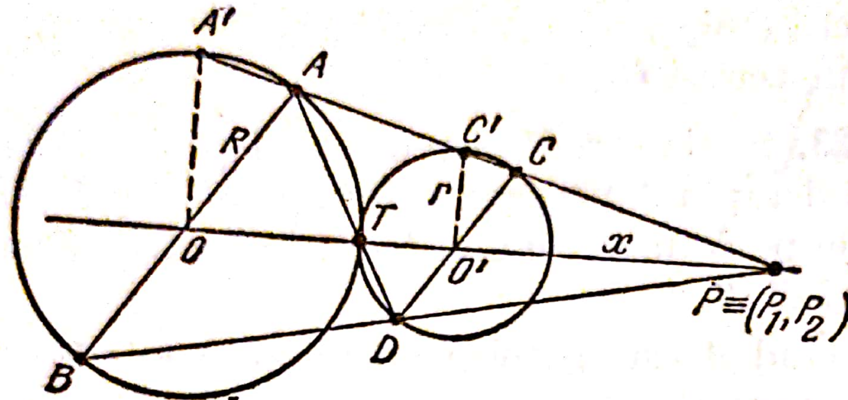


Fig.3. 124

Soluție. a). Fie $P_1 = OO' \cap AC$. Triunghiurile AOP_1 și $CO'P_1$ sînt asemenea deoarece $\sphericalangle AOP_1 = \sphericalangle CO'P_1$ și $\sphericalangle OAP_1 = \sphericalangle O'CP_1$, iar raportul lor de asemănare este

$$\frac{R}{r} = \frac{AP_1}{CP_1} = \frac{OP_1}{O'P_1}.$$

Fie $P_1 = OO' \cap BD$, iar din asemănarea triunghiurilor OBP_2 și $O'DP_2$, în mod analog, avem $\frac{R}{r} = \frac{BP_2}{DP_2} =$

$$= \frac{OP_2}{O'P_2} \Rightarrow \frac{AP_1}{CP_1} = \frac{BP_2}{DP_2} = \frac{OP_1}{O'P_1} = \frac{OP_2}{O'P_2} \Rightarrow P_1 \equiv P_2.$$

b). $PO = O'P + R + r$. Notăm $O'P = x$.

$$\frac{OP}{O'P} = \frac{R}{r} = \frac{O'P + R + r}{O'P} \text{ sau } \frac{R}{r} = \frac{x + R + r}{x} \Rightarrow x =$$

$$= \frac{r(R+r)}{R-r};\ OP = \frac{R(R+r)}{R-r}.$$

c). Triunghiurile ATB și DPC sînt dreptunghice, iar $\sphericalangle ABT = \sphericalangle \frac{AOT}{2}$, $(OB = OT)$ și $\sphericalangle TCD = \sphericalangle \frac{CO'P}{2}$ (unghi exterior) dar $\sphericalangle AOP = \sphericalangle CO'P$, deci triunghiurile ATB și DTC sînt asemenea și, deoarece $AB \parallel CD$, rezultă că AD și BC trec prin T.

d). Se arată că triunghiurile isoscele $CO'C$ și AOA' sînt asemenea, unghiurile de la vîrf $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle CO'C' \Rightarrow OA' \parallel O'C'$.





PROBLEME DE SINTEZĂ (GEOMETRIE PLANĂ)

4.1. Fie $ABCD$, $DEFG$ două pătrate așezate astfel încît laturile DC, DE să aibă aceeași direcție și laturile AD, AG să fie în prelungire. Pe AD și pe prelungirea lui DC luăm două segmente AH, CK egale cu DG. Să se arate că și patrulaterul $HBKF$ este un pătrat.

Soluție. Triunghiurile ABH, CBK, EKF, GHF sînt egale și $HB = BK = KF = FH$, iar $\sphericalangle BKF = 90°$ fiind suma a două unghiuri complementare, deci $HBKF$ este un pătrat.

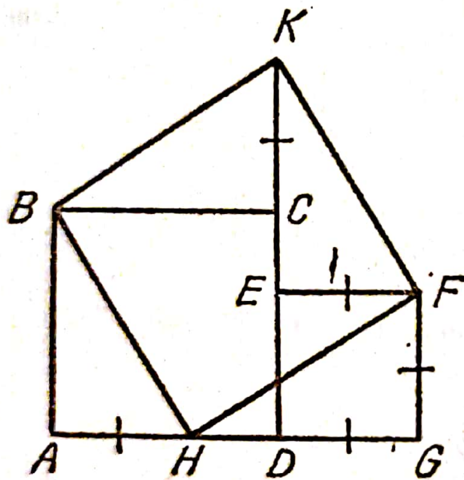


Fig. 4.1

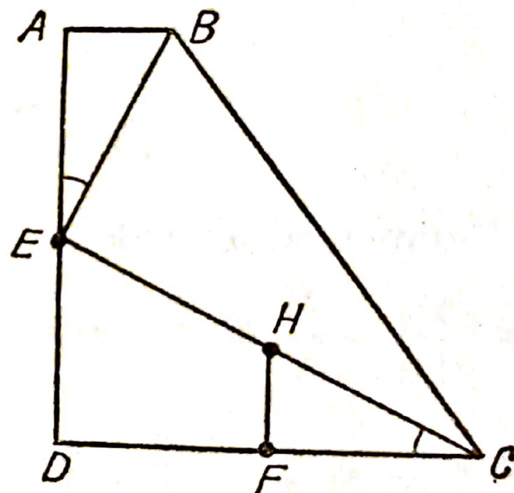


Fig. 4.2

4.2. În trapezul dreptunghic $ABCD$ de baze AB, CD fie E mijlocul înălțimii AD și $AD = DC$. Să se arate că dacă BE este perpendicular pe EC, atunci suprafața trapezului $ABCD$ este egală cu $10 \cdot AB^2$.

Soluție. Se observă că $\sphericalangle DCE = \sphericalangle AEB$, avînd laturile perpendiculare. Dacă luăm mijlocul F al bazei DC și ridicăm perpendiculara, obținem triunghiul HFC

egal cu triunghiul ABE. Avem: $HF = AB = \frac{AD}{4}$ și suprafața trapezului este:

$$S = \frac{(AB + 4AB)4AB}{2} = \frac{20\,AB^2}{2} = 10AB^2.$$

4.3. Să se afle aria și perimetrul dreptunghiului $ABCD$ știind că un dreptunghi $A_1B_1C_1D_1$ are $A_1B_1 = AB + 4$ m, $B_1C_1 = BC - 3$ m și aria $A_1B_1C_1D_1$ este cu 13 m² mai mică decît aria $ABCD$. Un alt dreptunghi $A_2B_2C_2D_2$ are $A_2B_2 = A_1B_1 - 10$ m, $B_2C_2 = B_1C_1 + 10$ m și aria $A_2B_2C_2D_2$ este cu 17 m² mai mare decît aria $ABCD$.

(G.M.B., 13136, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Notăm $AB = x$ și $BC = y$. Avem

$$(x + 4)(y - 3) = xy + 4y - 3x - 12 = xy - 13$$

$$(x+4-10)(y-3+10) = (x-6)(y+7) = xy+7x-6y-42 = xy+17.$$

Rezultă sistemul:

$$-3x + 4y = -1;\ 7x - 6y = 59, \text{ de unde } x = 23 \text{ și } y = 17.$$

$S = 23 \times 17 = 391$ m² și perimetrul $p = 2(x+y) = 80$ m.

4.4. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd înălțimea AA_1, distanța A_1A_2 (A_2 fiind mijlocul laturii BC) și R raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Soluție. Într-adevăr, să considerăm un segment egal cu înălțimea AA_1 și un segment A_1A_2 perpendicular pe AA_1. Din punctul A_2 ridicăm o perpendiculară pe A_1A_2. Din vîrful A, cu o deschizătură de compas cît raza R, descriem un arc de cerc care întîlnește perpendiculara pe A_1A_2 în punctul O (centrul cercului circumscris triunghiului ABC).

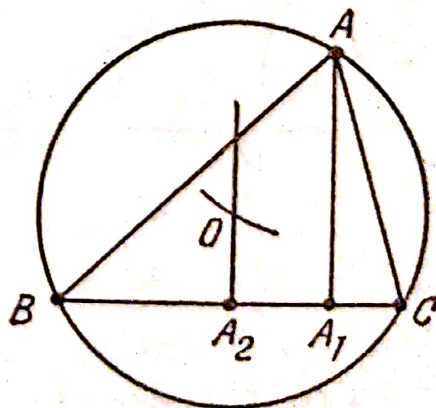


Fig. 4.4.

Cu aceeași deschizătură de compas și cu centrul în punctul O, vom descrie un cerc care intersectează dreapta A_1A_2 (sau prelungirea ei) în punctele B și C. Triunghiul ABC este triunghiul căutat. Problema este posibilă numai atunci cînd $A_1A_2 < R$.

4.5. Fie trapezele cu laturile paralele AB și CD; E și F intersecțiile dreptei AD cu cercul ce trece prin punctele B, C, D și paralela dusă din C la BE. Să se arate că BC este medie geometrică între AD și EF.

(S.G.M., E: 883, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Paralela din B la AD taie pe DC în G și pe FC în H. Urmărim pe o figură, egalitățile de unghiuri

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BED = \sphericalangle CHB,$$

$$\sphericalangle BCH = \text{supl} \sphericalangle CBE = \text{supl.} \sphericalangle CDE = \sphericalangle ADC = \\ = \sphericalangle BGC.$$

Triunghiurile BCG, BCH sînt asemenea. Din proporționalitatea laturilor, rezultă că BC este medie geometrică între $BG = AD$ și $BH = EF$.

4.6. În triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AC = b$, $AB = c$ se înscrie un semicerc tangent catetelor și cu diametrul pe ipotenuză.

Să se demonstreze că: 1° mijlocul diametrului semicercului este piciorul bisectoarei interioare a unghiului A; 2° raza semicercului este dată de relația:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

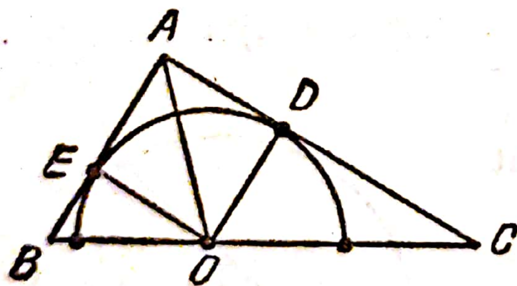


Fig. 4.6

Soluție: 1°). Însemnînd cu D și E punctele de contact ale cercului cu catetele, se constată că figura $ADOE$ este un paralelogram. Ținînd seama că $DO = OE$ și că AC, AB sînt perpendiculare, rezultă că $ADOE$ este un pătrat. Diagonala AO a pătratului este și bisectoarea unghiului DAE.

2°). Din asemănarea triunghiurilor DOC și ABC avem:

$$\frac{OC}{BC} = \frac{DO}{AB},$$

iar din asemănarea triunghiurilor BOE și ABC deducem $\frac{BO}{BC} = \frac{OE}{AC}$.

Adunînd cele două relații și ținînd seama că $OD = OE = R$ avem

$$\frac{BO + OC}{BC} = \frac{R}{AC} + \frac{R}{AB},$$

sau:

$$R\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right) = 1 \quad \text{sau:} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

4.7. O foaie de tablă are forma unui semicerc de diametru $2R$. Să se arate cum se poate decupa un dreptunghi de arie maximă și să se exprime această arie în funcție de R precum și perimetrul dreptunghiului.

(G.M.B., 12811, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Notăm cu $2x$ latura dreptunghiului situată pe diametru și cu y înălțimea dreptunghiului. Aria $S = 2xy$; $S^2 = 4x^2y^2 = 4x^2(R^2 - x^2) = -4x^4 + 4R^2x^2$ care are maximul cînd $x_0^2 = \frac{-b}{2a} = \frac{R^2}{2}$, adică

$$x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}; \quad y = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

$$S = 2 \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = R^2; \text{ iar } x = y.$$

Perimetrul dreptunghiului obținut este $4x + 2y = 6x = 3\sqrt{2} \cdot R$.

4.8. În cercul circumscris unui triunghi ABC, o coardă MN paralelă cu BC, taie laturile AB și AC în D și E. Să se arate că:

$$MD \cdot EN \cdot AE = AD \cdot CN \cdot ME$$

și

$$NE \cdot CM \cdot AB = AC \cdot ND \cdot BM.$$

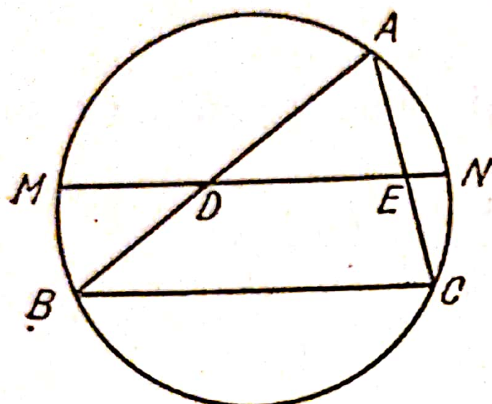


Fig. 4.8

Soluție. Triunghiurile asemenea MEC și AEN, ADN și BMD ne dau respectiv

$$\frac{ME}{EA} = \frac{MC}{AN} \qquad (1)$$

și

$$\frac{MC}{AN} = \frac{EC}{EN} \qquad (1')$$

$$\frac{AD}{MD} = \frac{AN}{MB} \quad (2) \quad \text{și} \quad \frac{AN}{MB} = \frac{DN}{BD}. \qquad (2')$$

Înmulțind (1) cu (2) și ținînd seama că $MC = BN$ și $MB = CN$, obținem prima relație.

Înmulțind (1') cu (2') și ținînd seama că

$$\frac{EC}{BD} = \frac{AC}{AB}$$

obținem a doua relație.

4.9. Două triunghiuri dreptunghice au cîte un unghi egal cu 15°. Cateta mare a unuia din aceste triunghiuri este egală cu cateta mică a celuilalt triunghi. Să se arate că suma ariilor acestor două triunghiuri este dublul ariei pătratului cu latura cît lungimea catetelor egale.

(R.M.F., 4483, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Triunghiurile căutate sînt ABC și ADC, însă ABC este de asemenea un triunghi dreptunghic cu un unghi de 15°, iar AD este înălțime. În acest caz,

suma ariilor celor două triunghiuri este chiar aria ABC a cărei valoare este:

$$A = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{AD^2}{2 \sin C \cdot \cos C} = \frac{AD^2}{\sin 2C} =$$
$$= \frac{AD^2}{\sin 30°} = 2AD^2,$$

adică valoarea ariei triunghiului ABC este dublul ariei pătratului de latură AD.

4.10. Să se arate că dacă în patrulaterul convex $ABCD$ avem $AB + BD \leqslant AC + CD$ atunci $AB < AC$.

Soluție. Presupunem contrariul adică $AB \geqslant AC$, atunci $\sphericalangle ACB \geqslant \sphericalangle ABC$. Dar $\sphericalangle BCD > \sphericalangle ACB \geqslant \sphericalangle ABC > \sphericalangle CBD$. Patrulaterul $ABCD$ fiind convex, $\sphericalangle CBD$ este o parte din $\sphericalangle ABC$, deci în triunghiul BCD avem $\sphericalangle BCD > \sphericalangle CBD$, adică $BD > CD$ și prin urmare obținem că $AB + BD > AC + CD$ ceea ce contrazice ipoteza și deci $AB < AC$ întrucît presupunerea $AB < AC$ este falsă.

4.11. În interiorul patrulaterului convex $ABCD$ există un punct M astfel ca triunghiurile ABM, BCM, CDM, DAM sînt echivalente. Să se caracterizeze clasa patrulaterelor cu această proprietate.

Soluția vectorială. Notăm $\overrightarrow{MA} = \vec{A}$; $\overrightarrow{MB} = \vec{B}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{C}$, $\overrightarrow{MD} = \vec{D}$. Facem produse vectoriale

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{C} = \vec{C} \times \vec{D} = \vec{D} \times \vec{A} \quad \text{sau}$$

$$\vec{B} \times (\vec{A} + \vec{C}) = \vec{C} \times (\vec{A} + \vec{D}) = \vec{D} \times (\vec{A} + \vec{C}) =$$
$$= \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{D}) = 0$$

Fie P, Q, mijloacele diagonalelor AC, BD.

$$\overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} \times \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MD} \times \overrightarrow{MP} =$$
$$= \overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MQ} = 0.$$

Sînt posibile cazurile:

1). $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MP}=0$, patrulaterul devine paralelogram.

2). $\overrightarrow{PM}=0$, dar $\overrightarrow{MQ}=0$, vectorii $\overrightarrow{MQ}$ și $\overrightarrow{MC}$ sînt coliniari. M este mijlocul lui AC ce trece prin mijlocul diagonalei BD.

3). $\overrightarrow{MP}\neq 0$, dar $\overrightarrow{MQ}=0$.

4) $\overrightarrow{MP}\neq 0$, $\overrightarrow{MQ}\neq 0$, dar $\overrightarrow{MP}$ este coliniar cu $\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{MD}$, iar $\overrightarrow{MQ}$ cu $\overrightarrow{MA}$ și $\overrightarrow{MC}$ (imposibil). Deci una din diagonale trece prin mijlocul celeilalte.

4.12. a). Suma a trei vectori de modul egal, avînd același punct de aplicație este 0(zero). Precizați natura poligonului determinat de extremitățile acestor veotori.

b). Suma a patru vectori de modul egal avînd același punct de aplicație 0 (zero). Precizați natura poligonului determinat de extremitățile acestor vectori.

(Concurs elevi, 1975).

Soluție. a). Fie $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ și $\vec{V}_3$ vectorii dați $|\vec{V}_1|=$ $=|\vec{V}_2|=|\vec{V}_3|=r$.

$\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3=0$, deci $\vec{V}_1+\vec{V}_2=-\vec{V}_3$. Rezultă că $\vec{V}_1+\vec{V}_2=\vec{r}$. Deci, considerînd cercul de centru ω (punctul de aplicație al vectorilor $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$) și de rază r, vectorii $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ și $\vec{V}_1+\vec{V}_2$ au extremitățile pe acest cerc. Deci, paralelogramul care are două laturi $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$ și o diagonală $\vec{V}_1+\vec{V}_2$ este de fapt romb, avînd o diagonală egală cu latura. Deci, el se descompune în două triunghiuri echilaterale. Unghiul la centru dintre $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$ este de 120°, iar unghiul dintre $\vec{V}_1+\vec{V}_2$ și $\vec{V}_3$ este de 180° ca să se poată anula. Deci, extremitățile lor sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

b) Ştim că $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = |\vec{V}_3| = |\vec{V}_4| = r$,

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = -(\vec{V}_3 + \vec{V}_4);$$

$$|\vec{V}_1 + \vec{V}_2| = |\vec{V}_3 + \vec{V}_4|.$$

Deci, unghiul dintre $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ şi $\vec{V}_3 + \vec{V}_4$ este de 180°. Deci triunghiurile ωAB şi ωCD sînt egale avînd laturile (module de vectori) egale. Deci, unghiul $\alpha = \beta$ deci $\vec{V}_4$ şi $\vec{V}_1$ sînt în prelungire şi extremităţile A, A', C, C' sînt vîrfurile unui dreptunghi.

4.13. Într-un triunghi oarecare notăm cu p semiperimetrul, iar cu h_a, h_b, h_c înălţimile triunghiului. Să se exprime aria triunghiului.

(G.M., 4425, *C. Ionescu-Ţiu*).

Soluţie. Avem: $a = BC = \frac{2S}{h_a}$; $b = \frac{2S}{h_b}$, $c = \frac{2S}{h_c}$,

$$a + b + c = 2p = 2S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \text{ deci}$$

$$p = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = \frac{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a}{h_a h_b h_c},$$

$$\text{de unde } S = \frac{p \cdot h_a \cdot h_b \cdot h_c}{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a}.$$

4.14. Se dă un segment de dreaptă AB, o dreaptă d care nu taie segmentul şi un punct M mobil pe d. Să se arate că punctul M al dreptei astfel încît unghiul AMB să fie maxim se găseşte pe cercul ce trece prin A şi B, tangent la dreapta d.

Soluţie. Distingem două cazuri:

a). Dacă dreapta d este paralelă cu segmentul AB atunci:

$$\sphericalangle AMB = \frac{\text{măsura } \widehat{AB}}{2}.$$

Orice alt punct $M' \in d$ se află în afara cercului deci

$$\sphericalangle AM'B = \frac{\text{măsura } \widehat{AB} - \text{măsura } \widehat{A'B'}}{2}.$$

Rezultă că $\sphericalangle AMB \leqslant \sphericalangle AM'B$ pentru orice poziție a lui M' pe dreapta d.

b). Dacă dreapta d nu este paralelă cu segmentul AB demonstrația este analoagă cu cea de la punctul a).

4.15. În două triunghiuri dreptunghice ABC și $A_1B_1C_1$ cu unghiurile drepte în A respectiv A_1 mai avem relațiile:

$$AB \cdot AC + A_1B_1 \cdot A_1C_1 = 4AB^2 = 4A_1C_1^2.$$

Să se arate că $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1 = 75°$, dacă $AB < AC$.

(G.M.B., 12967, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. $AB = A_1C_1$; $AB(AC + A_1B_1) = 4AB^2$;

$$\Rightarrow AB + A_1B_1 = 4AB = 4A_1C_1 \text{ sau}$$

$$\frac{AC}{AB} + \frac{A_1B_1}{A_1C_1} = 4 \Rightarrow \text{tg } B + \text{tg } C_1 = 4, \text{ dar}$$

$$\text{tg } C_1 = \text{ctg } B,$$

$$\text{tg } B + \frac{1}{\text{tg } B} = 4 \Rightarrow \text{tg}^2 B - 4 \text{ tg } B + 1 = 0,$$

$$\text{tg } B = 2 \pm \sqrt{3},$$

de unde rezultă $B = 75°$, $C = 15°$, $A = 90°$.

4.16. Fie un triunghi oarecare într-un cerc. Să se arate că produsul distanțelor de la un punct oarecare de pe cerc la două laturi ale triunghiului este egal cu produsul distanțelor acestui punct la latura cea de a treia și pînă la tangenta dusă prin vîrful opus acestei laturi.

Soluție. Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC și MA_1, MB_1, MC_1 perpendicularele din M respectiv pe BC, CA și AB, iar MB_2 perpendiculara din M pe tangenta în B. Din asemănarea

triunghiurilor dreptunghice, BA_1M și AB_1M, avem

$$\frac{MB_1}{MA_1} = \frac{MA}{MB}. \quad (1)$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice AC_1M și BB_2M, rezultă

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MC_1}{MB_2}. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2), deducem

Fig. 4.16

$$\frac{MB_1}{MA_1} = \frac{MC_1}{MB_2} \quad \text{sau} \quad MA_1 \cdot MC_1 = MB_1 \cdot MB_2.$$

4.17. Un trapez isoscel $ABCD$ are bazele AB și CD și diagonalele AC și BD. Cercul cu centrul în A de rază AD taie dreapta AC în punctele M și N, iar dreapta CD taie acest cerc în punctul P. Să se arate că:

a). BC și AP sînt paralele.

b). $CM \cdot CN = AB \cdot DC$.

(G.M., 14854, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Avem $AD = AP = BC$, dar $AB \parallel PC$, rezultă că triunghiurile ABP și BCP sînt egale și apoi că $AB = PC$. Patrulaterul $ABCP$ este paralelogram, AP și BC sînt paralele.

b). Triunghiurile CMP și CDN sînt asemenea deoarece au unghiul din C comun, iar $\sphericalangle MPC = \sphericalangle CDN$ avînd aceeași măsură: $\frac{1}{2}$ arc DPM.

Rezultă $\frac{CM}{CP} = \frac{CD}{CN}$ deci $CM \cdot CN = PC \cdot DC$, dar $PC = AB$.

4.18. Să se construiască triunghiul ABC cunoscînd latura BC, mărimea unghiului A și lungimea bisectoarei unghiului A.

Soluție. Din asemănarea triunghiurilor DML și MAE, unde M este mijlocul arcului BC opus vîrfului A. ME este diametru, iar L este mijlocul lui BC, avem:

$$\frac{DM}{EM} = \frac{LM}{AM} \Rightarrow DM \cdot AM = LM \cdot EM \text{ (cunoscut).}$$

Mai avem $AM - DM = AC = b$. Cunoscînd produsul $AM \cdot DM$ și diferența $AM - DM$, construcția este cunoscută.

4.19. Într-un cerc de diametru AB și de centru O perpendiculara dusă pe mijlocul razei OA taie cercul în C și D. Dintr-un punct M de pe CD, $CM = x$ se duc perpendicularele ME și MF respectiv pe AC și BD.

a). Să se exprime suma $ME + MF$ în funcție de R raza cercului și de distanța x.

b). Să se arate cum se poate construi un cerc tangent la laturile patrulaterului $ABCD$ și să se exprime în funcție de R, aria patrulaterului $ABCD$.

(G.M.B., 12985, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Coarda CD fiind perpendiculară pe mijlocul unei raze, ea este egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cerc adică $CD = R\sqrt{3}$, deci $x \in (0, R\sqrt{3})$. Deoarece $\sphericalangle ACD = 30°$

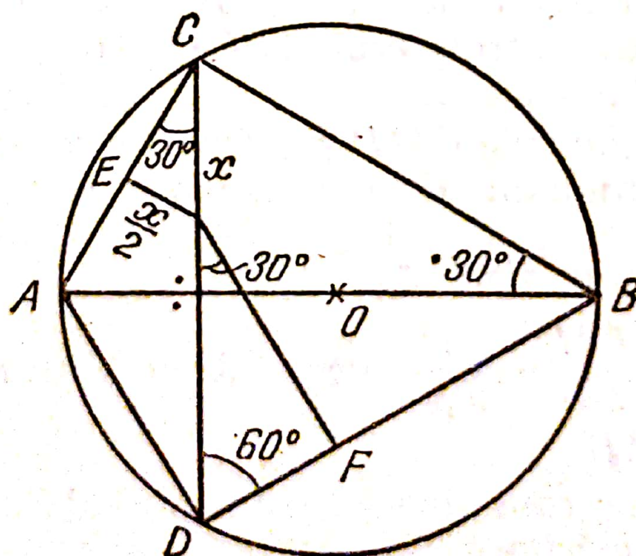


Fig. 4.19

rezultă $ME = \frac{x}{2}$ și $DF = \frac{1}{2}(R\sqrt{3} - x)$.

$$\Rightarrow MF = \frac{1}{2}(3R - x\sqrt{3}). \Rightarrow ME + MF =$$
$$= \frac{1}{2}(3R + x - x\sqrt{3}).$$

b). AB fiind diametru $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$, $AC = AD$ și $BC = BD$. Patrulaterul $ABCD$ admite diagonala AB ca axă de simetrie, iar bisectoarele unghiurilor din C și D se întîlnesc pe AB, iar AB este bisectoarea unghiurilor A și B. Punctul de intersecție al acestor bisectoare este centru cercului înscris în patrulaterul $ABCD$. Aria acestui patrulater este de două ori aria triunghiului ABC deci

$$\text{aria } S = 2 \cdot 2R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = R^2\sqrt{3}.$$

4.20. Să se construiască un triunghi cunoscînd o latură și lungimile medianelor duse din extremitățile ei.

Soluție. Considerăm un triunghi ABC cu latura BC și medianele BB_1 și CC_1 cunoscute. Paralela din B_1 la mediana CC_1 întîlnește latura BC în D. Ținînd seama că $CD = B_1C_1 = \frac{BC}{2}$, facem următoarea construcție:

Construim triunghiul BB_1D în care cunoaștem toate laturile. Luăm segmentul DC spre B, egal cu $\frac{BC}{2}$. Unim C cu B_1 și prelungim cu un segment B_1A, egal cu B_1C. Astfel triunghiul ABC este construit.

4.21. Un trapez dreptunghic $ABCD$ are baza mică AB, baza mare CD și diagonala mică $BD = CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$. Bisectoarea unghiului ABD taie latura AD în punctul E.

a). Să se arate că patrulaterul $BCDE$ este inscriptibil.

b). Perpendiculara din C pe CE este tangentă cercului circumscris triunghiului BDE.

(G.M.B., 13142, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). În triunghiul isoscel BCD ducem bisectoarea AF care este paralelă cu BE deoarece $\sphericalangle BDC$ și $\sphericalangle ABD$ sînt egale ca alterne interne. Rezultă că $\sphericalangle FBD = \sphericalangle BDF = 90° - \sphericalangle DBF$. Prin urmare $\sphericalangle EBF = 90°$. Deoarece și $\sphericalangle ADC = 90°$, rezultă că patrulaterul $EDCB$ este inscriptibil avînd unghiurile opuse din D și B unghiuri drepte.

b). Diagonala CE este diametrul cercului circumscris și deci perpendiculara din C pe CE este perpendiculară pe diametrul EC și deci tangentă la cerc care este și cercul circumscris triunghiului BDE.

4.22. Fiind dat un cerc de diametru AB, fie H și K proiecțiile punctelor A și B pe o coardă MN. Dacă M' este simetricul lui M față de AB, să se arate că $M'N = HK$.

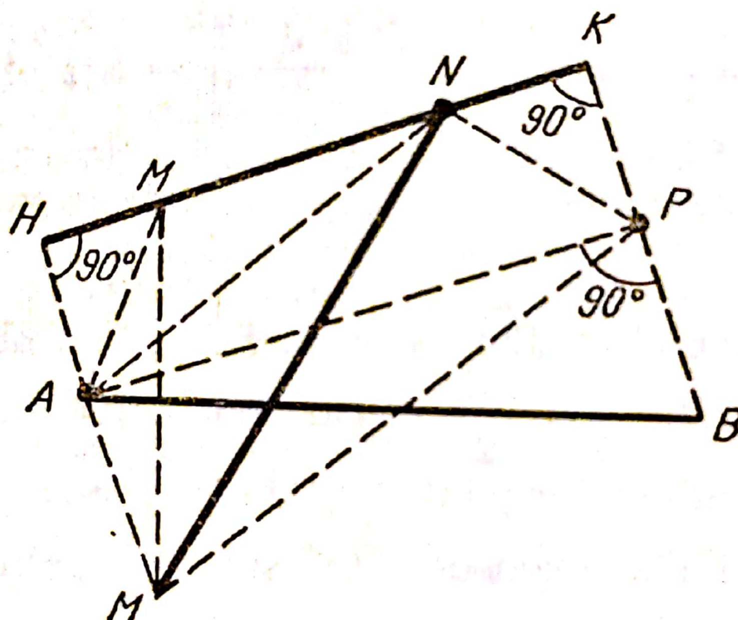


Fig. 4.22

Soluție. Dreapta BK taie cercul $ABNM$ în P astfel că $\sphericalangle APB = 90°$ și înseamnă că $AP \parallel= HK$ (din dreptunghiul $APKH$).

Deoarece $MN \parallel AP$ rezultă că

$$\text{arc } AM = \text{arc } NP, \qquad (1)$$

dar cum M și M' sînt simetrice față de AB, avem:

$$\text{arc } AM = \text{arc } AM' \qquad (2)$$

și comparînd (1) cu (2) $\Rightarrow$ arc NP = arc AM'

și rezultă că în cercul dat, coardele AN și $M'F$ sînt paralele, iar trapezul $ANPM'$ este isoscel. Deci, $AP = M'N$; cum însă $A'P = HK$ rezultă că $M'N = HK$.

4.23. În interiorul unui unghi A de 75° se duce o semidreaptă AM care împarte unghiul în două unghiuri unul de 30° și unul de 45°. Printr-un punct P luat pe AM să se ducă o dreaptă care să taie laturile unghiului dat A în punctele B și C astfel ca $BP = PC$.

(G.M.B., 12127, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Luăm după voie un segment B_1C_1 și fie P_1 mijlocul acestui segment. Căutăm un punct A de unde segmentul B_1P_1 să se vadă sub 30° și segmentul P_1C_1 sub 45°, deci descriem cercurile respective ca locuri geometrice. Fie O_1 vîrful triunghiului echilateral de latură B_1P_1 și O_2 centrul pătratului de latură P_1C_1 de aceeași parte a segmentului B_1C_1. Intersecția cercurilor de centre O_1 și O_2 care trece și prin P_1 este punctul căutat

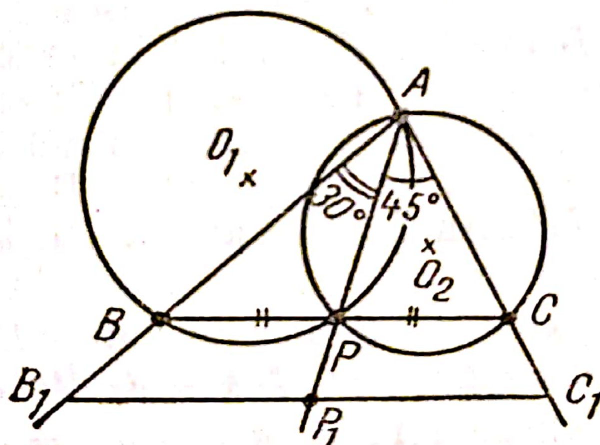


Fig. 4.23

A. Pe semidreapta AP_1 luăm $AP = 5$ cm și prin P_1 ducem paralela BC la B_1C_1, dreapta BC fiind dreapta căutată.

4.24. Se dă paralelogramul $ABCD$ cu diagonalele $AC > BD$. Pe diagonala AC să se determine un punct M astfel ca patrulaterul $BCDM$ să fie inscriptibil. Să se demonstreze că BD este o tangentă comună exterioară a cercurilor AMB și AMD.

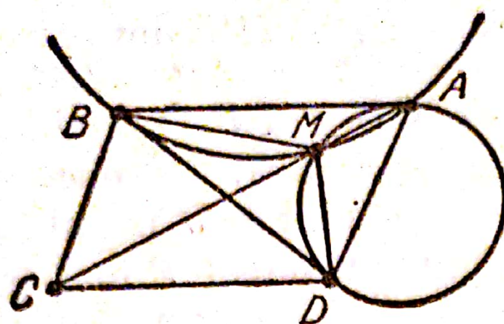


Fig. 4.24

Soluție. În patrulaterul inscriptibil $BMDC$, $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MCD$. Dar: $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MAB$, deci $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBD$; BD este tangentă cercului circumscris lui ABM.

Analog, BD este tangentă cercului circumscris lui AMD. Deci BD este tangentă comună exterioară a cercurilor AMB și AMD.

4.25. În triunghiul oarecare ABC în care am dus înălțimile AA', BB', CC' însemnăm cu H ortocentrul și cu D mijlocul laturii BC. Să se demonstreze că dreptele $B'D$ și $C'D$ sînt tangente cercului circumscris patrulaterului inscriptibil $AC'HB'$.

Soluție. $B'D$ fiind mediana corespunzătoare unghiului drept din triunghiul dreptunghic $B'BC$ este egală cu jumătatea mărimii ipotenuzei BC. Deci: $B'D = BD$. Rezultă că triunghiul DBB' este isoscel și de aceea avem $\sphericalangle BB'D = \sphericalangle DBB'$. Avînd în vedere că triunghiurile dreptunghice $A'AC$ și $B'BC$ au unghiul C comun cu $\sphericalangle DBB' = \sphericalangle HAB'$, rezultă: $\sphericalangle BB'D = \sphericalangle HAB'$, ceea ce dovedește că $B'D$ este tangentă cercului $AC'HB'$. Analog se arată că $C'D$ este tangentă aceluiași cerc.

4.26. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ notăm: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $BD = e$, $AC = f$. Să se demonstreze relația: $ade + bce = abf + cdf$.

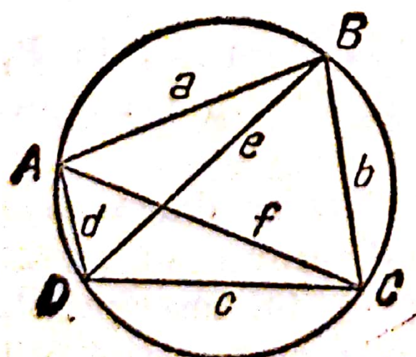


Fig. 4.26

Soluție. Notăm cu R raza cercului $ABCD$. Avem relația evidentă:

Aria (ABC) + Aria (ACD) = = Aria(ABD) + Aria(BCD) sau

$$\frac{abf}{4R} + \frac{cdf}{4R} = \frac{ade}{4R} + \frac{bce}{4R}.$$

$$\Rightarrow ade + bce = abf + cdf,$$

ceea ce trebuie demonstrat.

4.27. Notăm cu a și b laturile, iar cu d_1 și d_2 diagonalele unui paralelogram, θ unghiul format de diagonale, iar φ unghiul format de laturi. Să se stabilească relația:

$$\left|\frac{a^2 - b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}\right|.$$

(R.M.F., 1233, *C. Ionescu-Țiu*).

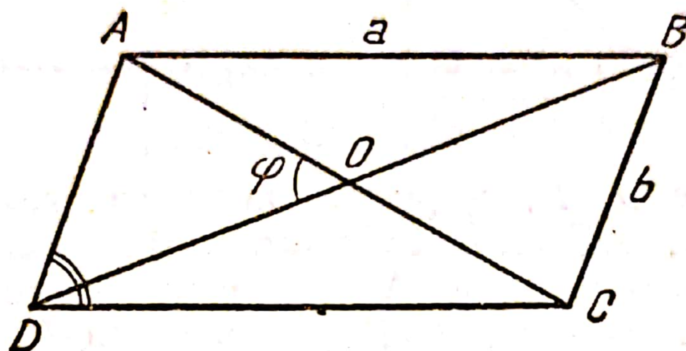


Fig. 4.27

Soluție. Fie $ABCD$ paralelogramul ale cărui laturi $AB = a$, $BC = b$ și diagonalele $BD = d_1$ și $AC = d_2$.

Notăm cu S suprafața lui $ABCD$. Relația cerută se mai poate scrie:

$$\left|\frac{a^2 - b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin\theta - \cos\varphi}{\sin\varphi\cos\theta}\right|.$$

Din relațiile: $ab\sin\theta = S'$; $\frac{d_1d_2}{2}\sin\varphi = S$, obținem

$\sin\varphi = \frac{2S}{d_1d_2}$ și $\sin\theta = \frac{2S}{ab}$. Din teorema cosinusului aplicată în triunghiurile AOD și ADC avem respectiv:

$$\cos\varphi = \frac{d_1^2 + d_2^2 - 4b^2}{2d_1d_2} \text{ și } \cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - d_2^2}{2ab}.$$

Făcînd toate simplificările obținem:

$$\left|\frac{a^2 - b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right| = \frac{1}{4}\left|\frac{d_1^2 + d_2^2 - 4b^2}{a^2 + b^2 - d_2^2}\right|.$$

Teorema medianei aplicată în triunghiul ADC ne dă:

$$\frac{d_1^2}{4} = \frac{2(a^2 + b^2) - d^2}{4}$$

de unde $2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$.

Prin urmare:

$$\left|\frac{a^2 - b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{d_1^2 + d_2^2 - 4b^2}{2a^2 + 2b^2 - 2d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{2a^2 - 2b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right|.$$

Deci:

$$\left|\frac{a^2 - b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\text{tg}\ \theta}{\text{tg}\ \varphi}\right|.$$

4.28. Fie Q, P, S puncte arbitrare, respectiv pe laturile BC, AC, AB în triunghiul oarecare ABC. Paralelele la o direcție (Δ) duse prin vîrfurile A, B, C taie respectiv cercurile (APS), (BSQ), (CQP) în puncte situate pe o dreaptă ce trece prin punctul α de intersecție al celor trei cercuri.

Soluție. Deoarece AD și CE sînt paralele, $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACE$, iar patrulaterul $C\alpha EP$ arată că $\sphericalangle ACE = \sphericalangle P\alpha E$, adică $\sphericalangle P\alpha E = \sphericalangle CAD = \sphericalangle P\alpha D$, deci α, E, D sînt coliniare.

Din patrulaterul $EC\alpha Q$ avem $\sphericalangle ECQ + \sphericalangle E\alpha Q = 180°$. Cum $\sphericalangle ECB = \sphericalangle FBC$, iar $\sphericalangle FBC = \sphericalangle F\alpha Q$; $\sphericalangle F\alpha Q = \sphericalangle ECQ$ și deci $\sphericalangle F\alpha Q + \sphericalangle E\alpha Q = 180°$. Ceea ce arată că și F, α, E sînt coliniare, adică punctele D, E, α, F sînt coliniare.

4.29. Se dă un triunghi ABC în care se cunoaște baza $BC = a$ și înălțimea $AD = h$. La ce distanță de BC trebuie să ducem o dreaptă $EF \parallel BC$ pentru a împărți aria triunghiului în două părți echivalente?

Soluție. Notăm $P = AD \cap EF$; $DP = x$, cu O mijlocul laturii AC, iar $EF = y \Rightarrow PA = h - x$. Avem

$$\frac{h - x}{h} = \frac{y}{a} \text{ și } \frac{y(h - x)}{2} = \frac{(a + y)x}{2};$$

$$\begin{cases} ah - ax = hy, \\ hy - xy = ax + xy. \end{cases} \quad \text{Avem } y = \frac{ah - ax}{h};$$

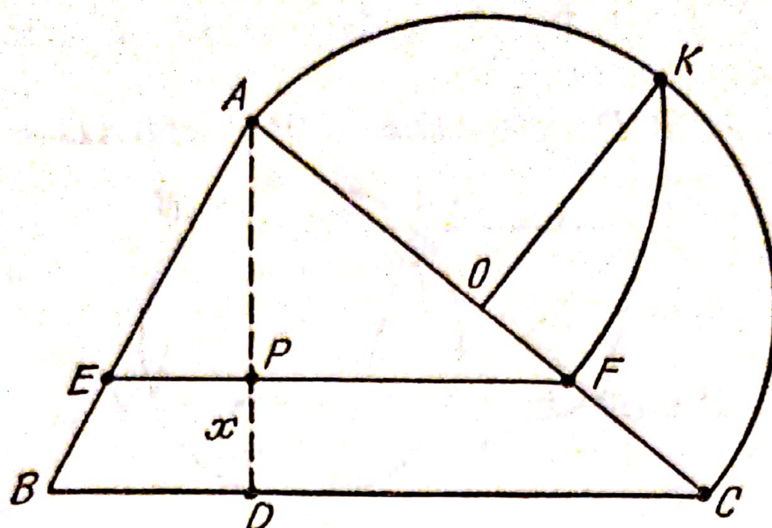


Fig. 4.29

$$\text{sau } ah - ax - 2\,\frac{ahx - ax^2}{h} - ax = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4hx + h^2 = 0; \Rightarrow x = \frac{h}{2}(2 \pm \sqrt{2}).$$

Convine soluția $x = \frac{h}{2}(2 - \sqrt{2})$, deoarece

$$x < \frac{h}{2}, \text{ adică } 2 - \sqrt{2} < 1.$$

Pentru construcția grafică avem

$$\frac{\text{aria } AEF}{\text{aria } ABC} = \frac{AF^2}{AC^2} = \frac{AK^2}{AC^2} = \frac{AO \cdot AC}{AC^2} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă deci construcția: Se descrie semicercul de diametru AC. Din O se duce $OK \perp AC$, $AF = AK$. Prin F se duce paralela la BC.

4.30. AB și CD sînt coarde paralele într-un cerc, AE este o paralelă la BC și E este situat pe cerc. DE întîlnește pe AB în F, iar FG este o paralelă la BC, punctul G fiind pe CD. Dovediți că dreapta AG este tangentă cercului.

Soluție. Prin însăși construcția figurii, patrulaterul $ADGF$ este un trapez. Aceasta pentru că AB și CD sînt paralele, iar punctele A, F și respectiv G, D se află pe aceste paralele. De asemenea sînt paralele prin con-

strucție și FG și BC. Patrulaterul $BCGF$ este deci un paralelogram. Rezultă:

$\sphericalangle AFG = \sphericalangle BCD$; $\sphericalangle FAD = 180° - \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$.

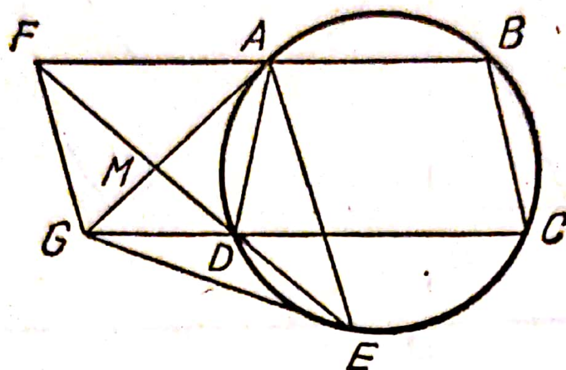


Fig. 4.30

Trapezul $ADGF$ este deci isoscel, prin urmare, inscriptibil $\sphericalangle GAD = \sphericalangle GFD$.

Cum $\sphericalangle GFD = \sphericalangle DEA = \text{măs}\,\frac{\widehat{AD}}{2}$ ca alterne interne (paralele: FG și AE), rezultă $\sphericalangle GAD = \text{măs}\,\frac{\widehat{AD}}{2}$; deci, AG este tangentă la cercul dat.

4.31. Fie D și E proiecțiile ortocentrului H al triunghiului oarecare ABC respectiv pe bisectoarea interioară și exterioară a unghiului A, iar M mijlocul laturii BC. Să se arate că punctele D, E, M sînt coliniare.

Soluție. Fie BB' și CC' înălțimi ale triunghiului. Patrulaterul $ADHE$ din construcție este un drept-

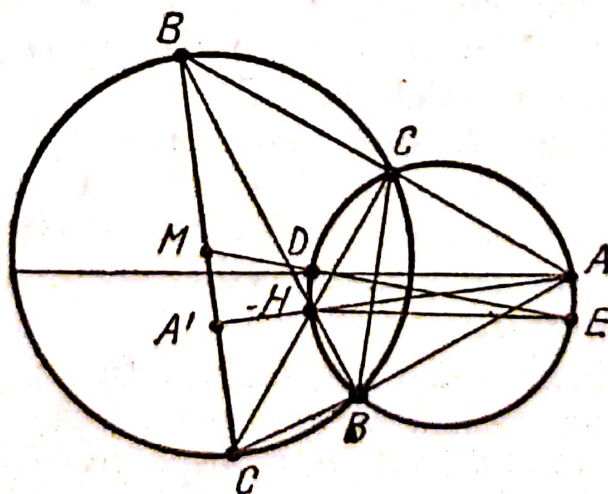


Fig. 4.31

unghi. Cercul circumscris acestui dreptunghi are diagonalele AH și DE ca diametre și mai trece prin punctele B' și C'; arc $(B'HD) = $ arc (DC') deoarece AD este bisectoarea interioară. Rezultă $DE \perp B'C'$ și diametrul DE trece prin F mijlocul coardei $B'C'$. Patrulaterul $BCB'C'$ este inscriptibil în cercul de diametru BC și centru M. Rezultă că MF este perpendiculară în F pe $B'C'$; iar pe aceeași dreaptă MF se află și punctele D și E, deci D, E, M sînt coliniare.

4.32. Să se arate că dacă din cele 3 centre ale cercurilor exînscrise unui triunghi coborîm perpendiculare pe laturile respective, ele sînt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului format de aceste centre.

Soluție. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și I_1, I_2, I_3 centrele cercurilor exînscrise.

I_1A, I_2B, I_3C sînt înălțimi în triunghiul $I_1I_2I_3$ iar ABC este triunghiul ortic.

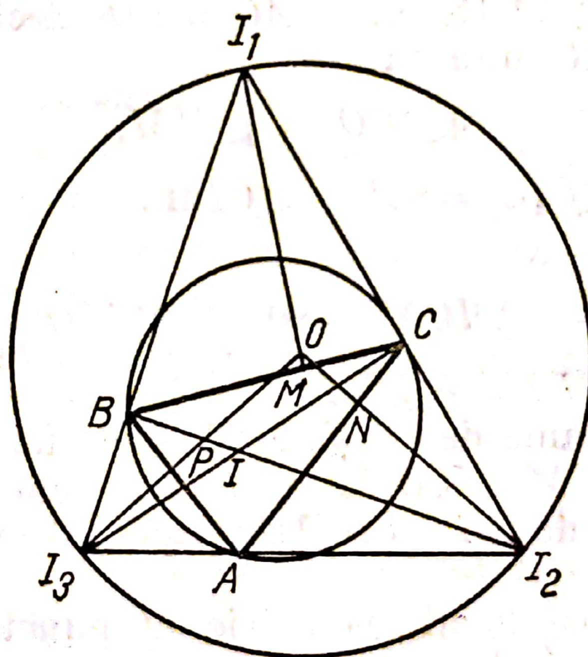


Fig. 4.32

Într-un triunghi, razele cercului circumscris duse prin vîrfurile triunghiului sînt perpendiculare pe laturile triunghiului ortic. Deci, perpendicularele I_1M, I_2N, I_3P sînt razele cercului $I_1I_2I_3$.

4.33. Se dă un cerc cu centrul în O și două diametre perpendiculare AA' și BB'. Din punctul A ducem o secantă variabilă care taie cercul în C iar diametrul BB' în I. Tangenta în C la cerc și perpendiculara în I pe diametrul BB' se taie în M. Se cere locul geometric al lui M cînd secanta dusă prin A variază.

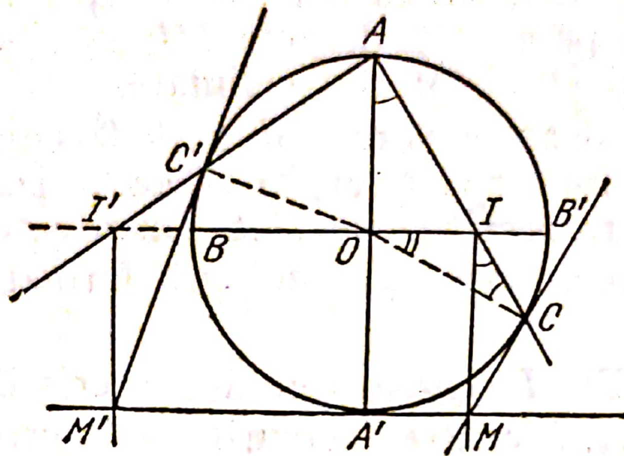


Fig. 4.33

Soluție. Deoarece $IM \perp BB'$ deci $IM \parallel AA'$, avem $\sphericalangle CIM = \sphericalangle CAA'$; însă $AO = CO$ deci $\sphericalangle CAA' = \sphericalangle ACO$. Rezultă că

$$\sphericalangle ACO = \sphericalangle CIM. \qquad (1)$$

Deoarece $\sphericalangle CIO = 90° + \sphericalangle CIM$

și

$$\sphericalangle ICM = 90° + \sphericalangle ACO \qquad (2)$$

avem și $\sphericalangle CIO = \sphericalangle ICM$.

Ținînd seama de (1) și de (2) și de faptul că în triunghiurile ICM și ICO, latura IC este comună, deducem că triunghiurile ICM și ICO sînt egale. Deci $IM = CO = OA'$.

Rezultă că locul geometric al punctului M este tangenta în A' la cercul dat.

4.34. a). Dovediți că perpendicularele coborîte din mijloacele laturilor unui patrulater inscriptibil pe laturile opuse sînt concurente.

b). Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, BCD, CDA, DAB formează un patrulater inscriptibil.

Soluție. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA ale patrulaterului inscriptibil și S intersecția lui MP cu NQ. $MNPQ$ fiind paralelogram, punctul S este centrul de simetrie. Prin simetrie față de S perpendiculara din M pe CD se transformă în mediatoarea laturii CD, analog pentru celelalte perpendiculare. Mediatoarele laturilor lui $ABCD$ fiind concurente rezultă că perpendicularele din M, N, P, Q pe laturile opuse sînt și ele concurente și că punctul lor comun este simetricul față de S al centrului cercului circumscris lui $ABCD$.

b). Fie E și F mijloacele diagonalelor AC și BD și G centrul de greutate al triunghiului BCD. Punctul de intersecție M al lui AG și EF este mijlocul lui EF. Într-adevăr, dacă H este mijlocul lui GC, atunci din $AE = EC$ rezultă că EH este paralel cu AG și cum $EG = GH$ avem $FM = ME$. Avem: $MG = \frac{1}{2} EN = \frac{1}{4} AG$, deci G este imaginea lui A printr-o omotetie, de centru M, raportul de omotetie fiind 3 : 1. Punctul G este deci situat pe cercul omotetic cercului circumscris lui $ABCD$. Același lucru e valabil și pentru centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, CDA, DAB.

4.35. 1°. Să se arate că există un triunghi ABC ale cărui laturi să fie exprimate prin numerele:

$$a = m\sqrt{1 + n^2}; \quad b = n\sqrt{1 + m^2}; \quad c = m + n$$

unde m și n sînt numere reale și pozitive.

2. De asemenea există un triunghi $A_1B_1C_1$ cu laturile

$$a_1 = m(1 + n^2); \quad b_1 = n(1 + m^2); \quad c_1 = (m+n)(1 - mn)$$

unde m și n sînt numere pozitive și $mn < 1$.

(R.M.F., 1055, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. 1°. Avem evident $a + b > c$. Rămîne să demonstrăm că

$$a + c > b \quad \text{și} \quad b + c > a.$$

Notăm $m = \text{tg}\,\alpha$, $n = \text{tg}\,\beta$; $\left(0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(0 < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

Inegalitatea $a + c > b$ se scrie:

$$\frac{\text{tg}\,\alpha}{\cos \beta} + \text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta > \frac{\text{tg}\,\beta}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta > \sin \beta;$$

$\sin(\alpha + \beta) > \sin \beta - \sin \beta$; simplificînd cu $2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$;

$\Rightarrow \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) > \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$, care este evidentă.

Inegalitatea $b + c > a$ se reduce, de asemenea, la inegalitatea evidentă:

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) > \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

2. Şi în acest caz $a_1 + b_1 > c_1$. Cu aceeaşi notaţie ca mai sus inegalitatea $a_1 + c_1 > b_1$ se scrie:

$$\frac{\text{tg}\,\alpha}{\cos^2 \beta} + (\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta)(1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta)\frac{\text{tg}\,\beta}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta \sin(\alpha + \beta)(1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta) > 0;$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) > 0.$$

Inegalitatea $b_1 + c_1 > a_1$ se reduce la

$$\sin(\beta - \alpha) + \sin(\alpha + \beta) > 0.$$

Ultimele două inegalităţi trigonometrice sînt evidente.

4.36. Se dă un cerc de rază 5 cm şi o dreaptă (D) la distanţa de 21 cm de O, centrul cercului. Fie P piciorul perpendicularei din O pe dreapta (D). Pe OB se ia OI egală cu 12 cm. Se duce $IM = 4$ cm perpendiculară pe OI. Să se construiască un paralelogram avînd centrul în punctul M, două din vîrfuri pe cerc şi două din vîrfuri pe dreapta (D). Să se calculeze aria paralelogramului.

(G.M.F., 5889, *C. Ionescu-Ţiu*).

Soluție. Pe IO luăm segmentul $IE = IP = 21 - 12 = 9$ cm. Prin E ducem paralela la (D) care taie cercul în A și B. Dreptele AM și respectiv BM intersectează pe (D) în C și respectiv D. Patrulaterul $ABCD$ este chiar paralelogramul cerut.

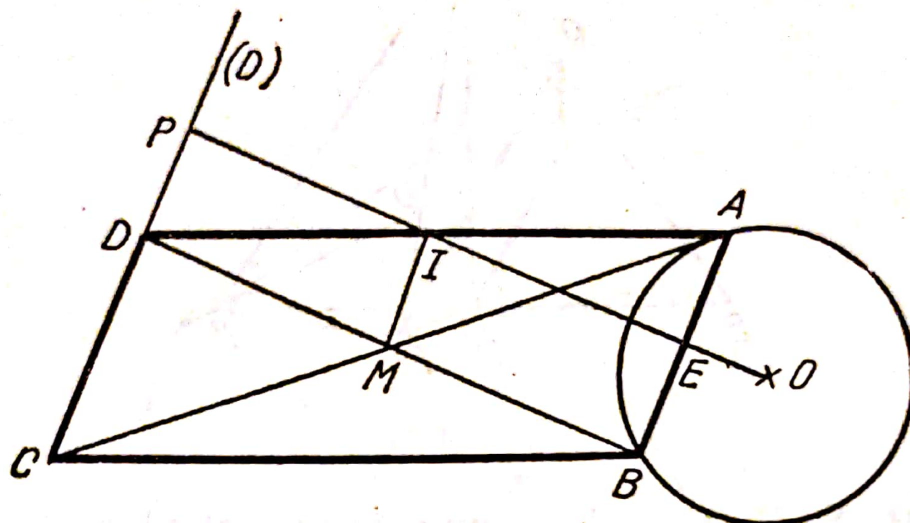


Fig. 4.36

Justificarea construcției. În trapezul $PDBE$, I fiind mijlocul lui PE, iar IM și PD fiind paralele rezultă că IM este linie mijlocie. Deci, BM și MD sînt egale.

Triunghiurile ABM și CDM sînt evident egale. Deducem că: $AB = CD$ și $AM = MC$. Dar cum AB și (D) sînt paralele rezultă că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram cu centrul în M. Aria acestui paralelogram este $A = PE \cdot DC = 18\ AB$.

Dar, din triunghiul dreptunghic BOE reiese $BE^2 = BO^2 - OE^2$ și cum $BO = 5$ cm, iar $OE = 21$ cm $-$ 18 cm $= 3$ cm, avem $BE^2 = 25 - 9 = 16$. Deci, $BE = 4$ cm, iar $AB = 2 \cdot BE = 8$ cm. Atunci $A = 18 \cdot 8$ cm $= 144$ cm^2.

Observație. Rezultă că $EB = IM = PD = 4$ cm și deci, patrulaterul $PDBE$ este dreptunghic, iar AD trece prin I.

4.37. Se dă patrulaterul $ABCD$ și fie $\alpha = (AB, CD)$ și $\beta = (AD, BC)$. Se proiectează α pe AD și BC respectiv în M și N, iar β pe CD și AB în P și Q respectiv. În ce caz patrulaterul $MNPQ$ este trapez?

Soluție. Vom demonstra mai întîi că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil. Într-adevăr, din M, N, P, Q, segmentul $\alpha\beta$ se vede sub un unghi de 90°. Deci punc-

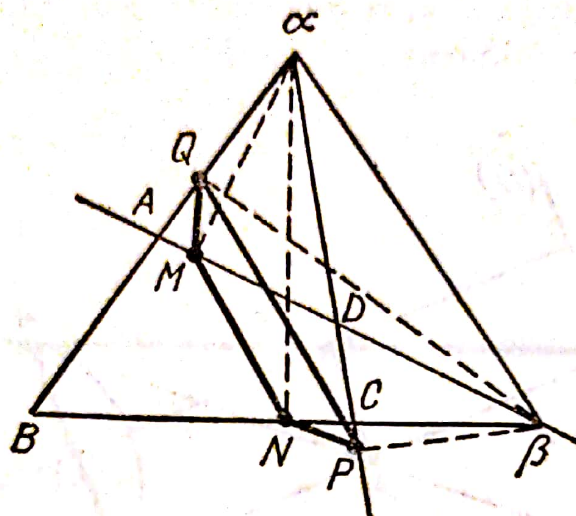


Fig. 4.37

tele M, N, P, Q se află pe un cerc cu centrul în mijlocul segmentului $\alpha\beta$. Rezultă, conform proprietății de mai sus, că patrulaterul $MNPQ$ nu poate fi, în particular, decît trapez isoscel. În acest caz avem $MQ = NP$ și deci unghiurile $Q\alpha M$ și $N\beta P$ sînt egale. Rezultă, întrucît $\sphericalangle \alpha MA = \sphericalangle \beta PC = 90°$ că unghiurile αAM și βCP sînt egale.

Deoarece $\sphericalangle \beta CP = \sphericalangle BCD$, obținem:

$$\sphericalangle BCD + \sphericalangle BAD = 180°,$$

ceea ce arată că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

Dacă luăm, de exemplu, unghiurile A și C ascuțite, procedînd analog vom obține $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$.

Deci, în concluzie, pentru ca $MNPQ$ să fie trapez isoscel, trebuie ca patrulaterul $ABCD$ să aibă două unghiuri opuse egale sau suplimentare.

4.38. Se dau două cercuri tangente exterior, cu centrele O_1 și O_2 și punctul lor de tangență T. Să se determine pe tangenta comună în T punctele din care tangentele duse la cele două cercuri sînt perpendiculare.

(G.M.B., 10639, *Gh. D. Simionescu*).

Soluție. Fie P unul din punctele cerute. Avem $\sphericalangle O_1PT = \sphericalangle O_1PT_1$ și $\sphericalangle O_2PT = \sphericalangle O_2PT_2$ unde T_1

și T_2 sînt punctele de contact ale tangentelor ce se mai pot duce din P respectiv la cercurile de centru O_1 și O_2.

Deoarece $\sphericalangle T_1PT_2 = 90°$ rezultă $\sphericalangle O_1PO_2 = 45°$. Cercul circumscris triunghiului O_1O_2P se poate construi cunoscînd unghiul $\sphericalangle O_1PO_2 = 45°$.

Fig. 4.38

Cercul circumscris triunghiului O_1O_2P mai taie tangenta în T în punctul P_1 astfel ca $\sphericalangle O_1PO_2 = 180° - 45° = 135°$. Tangentele duse din P_1 la cele două cercuri (O_1) și (O_2) au punctele de contact respectiv T_3 și T_4.

De asemenea, $\sphericalangle TP_1O_1 = \sphericalangle O_1P_1T_3$ și $\sphericalangle TP_1O_2 = \sphericalangle O_2PT_4$. Rezultă că unghiul cel mai mic format de P_1T_3 și P_1T_4 are valoarea de $360° - 135° - 135° = 90°$, prin urmare și punctul P_1 corespunde problemei. Din motive de simetrie față de dreapta P_1O_2 mai corespunde problemei punctele P' și P_1' simetricele lui P și P_1 față de dreapta O_1O_2. Corespund deci patru soluții.

4.39. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu laturile paralele AB, CD și P un punct oarecare de pe cercul O cir-

cumscris trapezului. Să se demonstreze că perpendiculara din B pe CP se întîlnește pe cercul O cu perpendiculara din D pe AP.

(G.M.F., 3241, *Gh. Buicliu*).

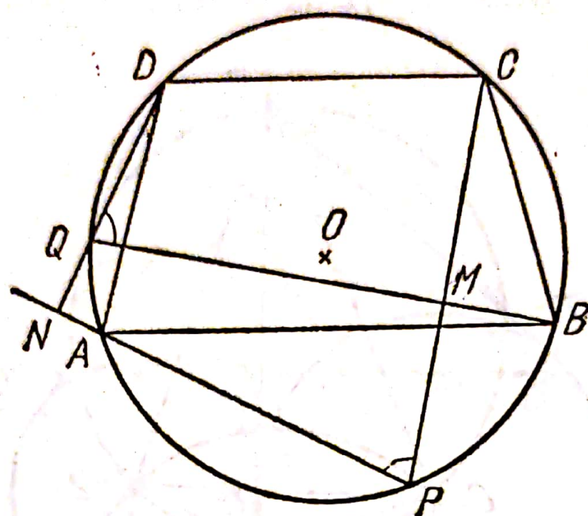


Fig. 4.39

Soluție. Fie M și N proiecțiile lui B și D pe CP și AP și Q intersecția BM cu DN. Patrulaterul $PMQN$ avînd unghiurile din M și N drepte este inscriptibil și prin urmare $\sphericalangle NPM = \sphericalangle MQD = \sphericalangle BQD$.
Dar

$$\sphericalangle NPM = \frac{\text{arc } \overset{\frown}{DA} + \text{arc } \overset{\frown}{DC}}{2}$$

și cum arc $\overset{\frown}{DA}$ = arc $\overset{\frown}{BC}$ rezultă că

$$\sphericalangle NPM = \sphericalangle MQD = \sphericalangle BQD = \frac{\text{arc } \overset{\frown}{DC} + \text{arc } \overset{\frown}{CB}}{2} = \alpha,$$

ceea ce arată că Q se află pe arcul de cerc capabil de unghiul α descris pe BD, adică se află într-un punct oarecare pe arcul $BPAD$ al cercului O.

4.40. Prin ortocentrul H al unui triunghi oarecare se duce o dreaptă oarecare Δ care intersectează laturile AC și AB respectiv în P și Q. Perpendicularele din P și Q pe Δ intersectează înălțimile CF respectiv BE în punctele U și V.

Să se arate că $UV \parallel BC$.

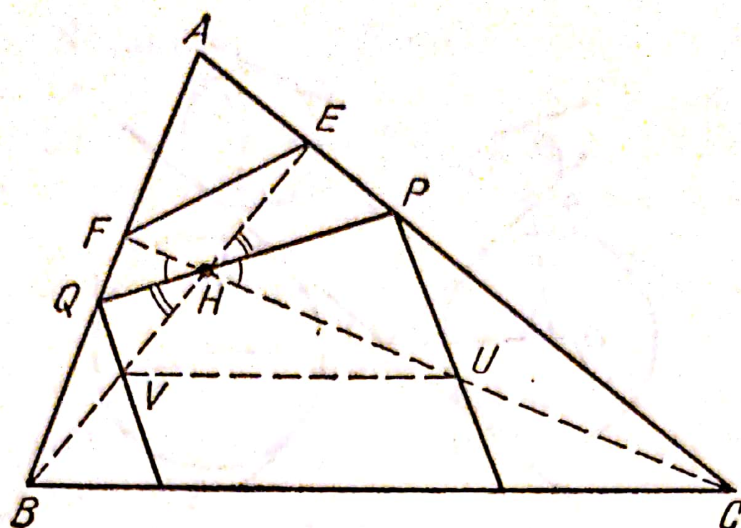


Fig. 4.40

Soluție. Triunghiurile HPU și HQF sînt asemenea. $\Rightarrow \frac{HU}{HQ} = \frac{HP}{HF}$. Triunghiurile HPE și HQV sînt asemenea și

$$\frac{HP}{HV} = \frac{HE}{HQ} \Rightarrow \frac{HU}{HV} = \frac{HE}{HF}. \qquad (1)$$

Patrulaterul $BFEC$ este inscriptibil.

$$HB \cdot HE = HF \cdot HC \Rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{HC}{HB} \qquad (2)$$

$\Rightarrow \triangle FHS \sim \triangle EHC$. Din (1) și (2) obținem

$$\frac{HC}{HB} = \frac{HU}{HV} \Rightarrow UV \parallel BC.$$

4.41. Laturile unui patrulater convex oarecare se prelungesc și se înscriu patru cercuri fiecare tangent la una din laturi și prelungirii celorlalte două laturi învecinate. Să se demonstreze că centrele acestor cercuri se află pe același cerc.

Soluție. Fie $ABCD$ patrulaterul și O_1, O_2, O_3, O_4 centrele celor 4 cercuri. O_1, O_2, O_3, O_4 se află la intersecția bisectoarelor exterioare ale patrulaterului, luate două cîte două. Grupele de puncte (O_1, A, O_2); $(O_2,$

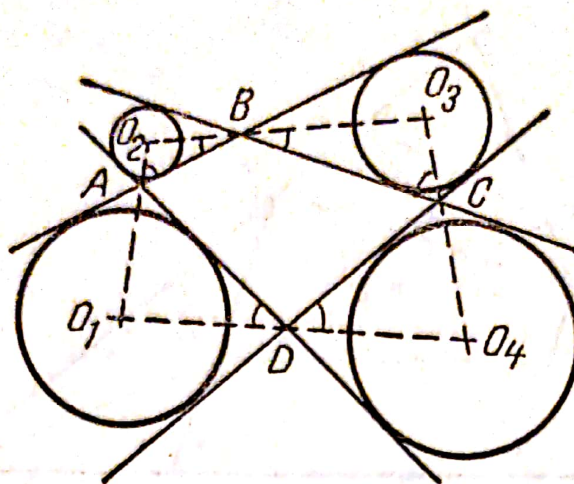


Fig. 4.41

B, O_3); (O_3, C, O_4); (O_4, D, O_1) sînt coliniare deoarece sînt situate pe bisectoarele unor unghiuri opuse la vîrf (cu laturile în prelungire). Deci, vom avea:

$$\sphericalangle O_2BA + \sphericalangle O_2AB + \sphericalangle O_4DC + \sphericalangle O_4CD =$$
$$= \frac{180° - \sphericalangle ABC}{2} + \frac{180° - \sphericalangle BAD}{2} +$$
$$+ \frac{180° - \sphericalangle ADC}{2} + \frac{180° - \sphericalangle BCD}{2} =$$
$$= \frac{720° - (\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB)}{2} = 180°.$$

Apoi

$$\sphericalangle O_1O_2O_3 + \sphericalangle O_1O_4O_3 = 180° - (\sphericalangle O_2BA + \sphericalangle O_2AB) +$$
$$+ 180° - (\sphericalangle O_4DC + \sphericalangle O_4CD) = 360° - (\sphericalangle O_2BA +$$
$$+ \sphericalangle O_2AB + \sphericalangle O_4DC + \sphericalangle O_4CD) = 360° - 180° = 180°.$$

Rezultă că patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$ este inscriptibil.

4.42. Fie cercul O, coarda BC fixă și punctul A mobil pe cerc. Bisectoarele unghiurilor B și C ale triunghiului ABC taie cercul în B' și C'. Să găsim locul geometric al mijlocului coardei $B'C'$ și să arătăm că perpendiculara dusă din A pe $B'C'$ trece printr-un punct fix.

(G.M.B., 6959).

Soluție. Notăm cu D și E mijloacele celor două arce BC, $M = (AB,\ B'C')$. $N = (AC,\ B'C')$, arc $BEC = \alpha$. Arc $BDC = 2\pi - \alpha$. Deoarece perechile de arce BC', $C'A$ și AB', $B'C$ sînt egale, putem scrie:

$$\text{arc } \widehat{C'A} + \text{arc } \widehat{AB'} = \pi - \frac{\alpha}{2} = \text{constant.}$$

Atunci și coarda $B'C'$ este constantă ca mărime și mijlocul ei P descrie o parte din cercul concentric cu cel dat și raza OP.

Triunghiul AMN este isoscel deoarece $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ANM = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$. Perpendiculara din A pe $B'C'$ este bisectoarea unghiului BAC și trece prin E care este fix.

Să delimităm precis locul geometric descris de P. Cînd A se apropie de B pe arcul BDC, C' se apropie de

Fig. 4.42

B, B' de D iar cînd A coincide cu B, coarda $C'B'$ ia poziția limită BD. Cînd A coincide cu C, coarda $B'C'$ ia poziția limită CD. Așadar, cînd A se mișcă pe arcul BDC, P descrie arcul de cerc KPL unde K și L sînt mijloacele coardelor BD și CD, centrul acestui arc de

cerc fiind O. Cum OK și OL împart arcele BD și DC în părți egale avem arc $KPL = \pi - \frac{\alpha}{2}$.

Analog se arată că, atunci cînd A se mișcă pe arcul de cerc BEC, mijlocul coardei $B'C'$ descrie arcul de cerc $K'P'L'$ de centru O și raza OL' iar arc $K'P'L' = \frac{\alpha}{2}$. În acest caz, perpendiculara din A pe $B'C'$ trece prin punctul fix D.

În concluzie, locul geometric căutat se compune din două arce de cerc KPL și $K'P'L'$, concentrice cu cercul dat, de raze diferite în general astfel încît arc $KPL +$ $+$ arc $K'P'L' = \pi$.

Dacă $BC = l_3$, atunci arcele de cerc KPL și $K'P'L'$ au razele $OL' = a_6$, $OL = a_3$ și mărimile în radiani $\frac{\pi}{6}$ și $\frac{5\pi}{6}$.

Dacă BC este chiar diametrul cercului dăm peste altă problemă.

În acest caz, locul geometric este format din arcele KPL și $K'P'L'$ care fac parte din același cerc, concentric cu cel dat, cu raza egală cu a_4 avînd fiecare $\frac{\pi}{2}$ radiani.

4.43. Dacă într-un patrulater circumscriptibil diagonalele sînt perpendiculare între ele, să se demonstreze că cel puțin o diagonală este axă de simetrie a figurii.

Soluție. Fie patrulaterul $ABCD$ circumscris cercului O și avînd diagonalele perpendiculare. Notăm $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Avem $a + c = b + d$ relația într-un patrulater circumscriptibil. Fie I intersecția diagonalelor. Notăm $IA = \alpha$, $IB = \beta$, $IC = \gamma$, $ID = \delta$. Rezultă relația:

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + \sqrt{\delta^2 + \alpha^2}. \quad (1)$$

Prin două ridicări la pătrat și simplificări obținem $(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2) = 0$, de unde sau $\alpha = \gamma$ sau $\beta = \delta$ sau și una și alta cînd patrulaterul $ABCD$ este romb și admite două axe de simetrie.

Dacă $\alpha = \gamma$ atunci diagonala BD este axă de simetrie, iar dacă $\beta = \delta$ atunci diagonala AC este axă de simetrie.

4.44. Fie cercul O și un punct exterior, C. Ducem secanta CBA și tangenta CD la cercul O. Cercul CBD taie pe AD în E. Să se arate că: a). dreptele CD și CE sînt egale, b). dreapta CE este tangenta cercului ABE.

Soluție. Avem $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDB = \frac{1}{2}$ arc $\widehat{BD}$. Deci $\sphericalangle CDE = 180° - \sphericalangle CDB - \sphericalangle BDA = 180° - \sphericalangle BAD - \sphericalangle BDA = \sphericalangle ABD$. De asemenea, $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CBE = \frac{1}{2}$ arc $\widehat{CE}$. Deci, $\sphericalangle CBE = \sphericalangle ABD$ iar $\sphericalangle ECD = \frac{1}{2}$ arc $\widehat{DE} = \sphericalangle EBD = 180° - \sphericalangle CBE - \sphericalangle ABD = 180° - 2 \sphericalangle ABD$.

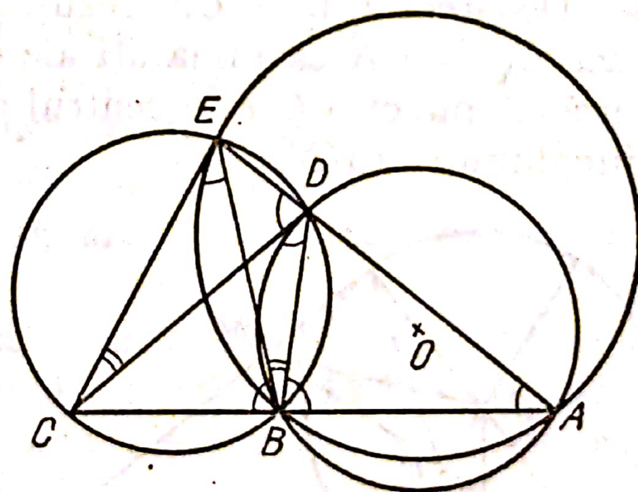


Fig. 4.44

Atunci în triunghiul CDE avem $\sphericalangle CED = 180° - \sphericalangle CDE - \sphericalangle ECD = 180° - \sphericalangle CDE - (180° - 2 \sphericalangle ABD) = 2 \sphericalangle ABD - \sphericalangle CDE = 2 \sphericalangle CDE - \sphericalangle CDE = \sphericalangle CDE$.

Deci triunghiul CDE este isoscel așa că $CD = CE$.

$\sphericalangle ECB = 180° - \sphericalangle EDB = \sphericalangle BDA$; $\sphericalangle CBE = \sphericalangle ABD$ deci triunghiurile CBE și DBA sînt asemenea și urmează că și $\sphericalangle CEB = \sphericalangle DAB$ care arată că CE este tangentă cercului ABE $\left(\sphericalangle CEB = \sphericalangle DAB = \frac{1}{2} \text{ arc } \widehat{BE}\right)$.

4.45. Să se arate că două tangente la un cerc și coarda de contact împart în două părți egale perpendiculara dusă dintr-un punct oarecare al coardei de contact pe diametrul ce trece prin acel punct.

Soluție. Patrulaterul $OAMC$ este inscriptibil deoarece $\sphericalangle OAM = \sphericalangle OCM = 90°$. În consecință, $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OMC$.

Patrulaterul $OCBN$ este inscriptibil deoarece $\sphericalangle OCN = \sphericalangle OBN = 90°$ (avînd ON diametrul cercului circumscris). Deci $\sphericalangle ONC = \sphericalangle OBC$. Dar în triunghiul OAB, $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBC$. Rezultă că triunghiul OMN este isoscel, iar înălțimea OC este mediana laturei MN. Deci $CM = CN$.

Observație. Deoarece $CM = CN$ rezultă că $MQ = NR$, fiindcă $CQ = CR$ ca jumătăți ale coardei QR. Se mai observă că punctul C este centrul cercului circumscris triunghiului AMN.

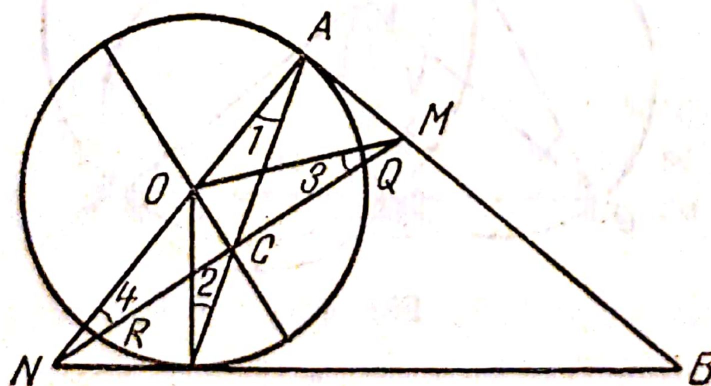


Fig. 4.45

4.46. Tangentele în B și C la cercul circumscris triunghiului ABC se întîlnesc în D. Ducem prin D o paralelă la tangentă în A la cerc, care taie pe AB

în A' și pe AC în D'. Să se arate că: a). triunghiurile $A'BD$ și DCD' sînt isoscele; b). $A'D = DD'$.

Soluție. Observăm că: $\sphericalangle EAB = C$, dar $\sphericalangle EAB = \sphericalangle AA'D = C$. Cum $\sphericalangle A'BD = 180° - (\sphericalangle DBC + \sphericalangle ABC) = 180° - (A + B) = C$, adică $\sphericalangle DA'B = \sphericalangle DBA' = C$, de unde deducem că triunghiul $A'BD$ este isoscel.

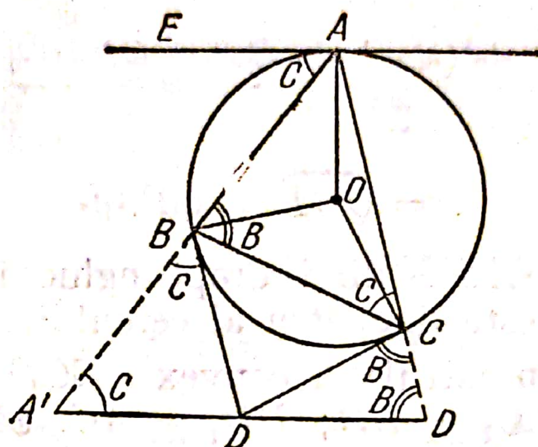


Fig. 4.46

Analog, se demonstrează că : $\sphericalangle DCD' = \sphericalangle DD'C = \sphericalangle B$, deci și triunghiul DCD' este isoscel.

b). Din cele spuse mai sus putem scrie: $DB = DA'$ și $DC = DD'$. Dar $DB = DC$, ca tangente duse dintr-un punct exterior cercului deci: $DA' = DD'$.

4.47. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc. Se notează M, N, P, Q mijloacele arcelor AB, BC, CD, DA.

1). Să se arate că MP și NQ sînt perpendiculare.

2). Dacă patrulaterul $MNPQ$ este trapez să se arate că una din diagonalele trapezului $ABCD$ este diametru.

Soluție. 1) Fie $I = MP \cap NQ$; $\sphericalangle MIN =$

$$= \frac{\overset{\frown}{MBN} + \overset{\frown}{QDP}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA}}{4} =$$

$$= \frac{360°}{4} = 90°. \text{ Deci } MP \perp NQ.$$

2) Presupunem că $QM \parallel NP$. Atunci $\overset{\frown}{QDP} = \overset{\frown}{MBN} = 90°$ (conform celor demonstrate anterior).

$$\sphericalangle B = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AQ} + \overset{\frown}{QDP} + \overset{\frown}{PC}}{2}.\ \text{Însă}\ \overset{\frown}{AQ} =$$

$$= \overset{\frown}{QD},\ \overset{\frown}{PC} = \overset{\frown}{PD}.$$

$$\sphericalangle B = \frac{\overset{\frown}{QD} + \overset{\frown}{QDP} + \overset{\frown}{DP}}{2} = \frac{\overset{\frown}{QDP} + \overset{\frown}{QDP}}{2} =$$

$$= \overset{\frown}{QDP} = 90°.$$

Triunghiul ABC fiind dreptunghic în B, rezultă că latura AC este diametru al cercului.

4.48. Fie un patrulater convex $ABCD$ și $AA_1 \perp BD$; $BB_1 \perp AC$; $CC_1 \perp BD$; $DD_1 \perp AC$. Să se arate că patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este asemenea cu patrulaterul $ABCD$.

Soluție. Patrulaterul ABB_1A_1 este inscriptibil în cercul cu diametrul AB; BCB_1C_1 este înscris în cercul cu diametrul BC; CDD_1CC_1 este înscris în cercul cu

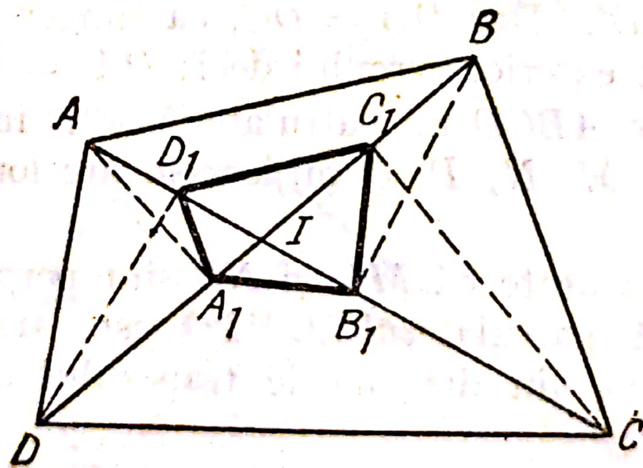


Fig. 4.48

diametrul CD iar AD punctele D_1 și A_1 sînt pe cercul cu diametrul AD. Fie $I = AC \cap BD$.

Triunghiurile ABI și A_1B_1I sînt asemenea și avem $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BA_1B_1$; $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AB_1A_1$.

Triunghiurile BCI şi B_1C_1I sînt asemenea; triunghiurile CDI şi C_1D_1I sînt asemenea, la fel triunghiurile DIA şi D_1IA_1 sînt asemenea.

Din asemănările perechilor de triunghiuri care formează patrulaterele $ABCD$ respectiv $A_1B_1C_1D_1$ rezultă asemănarea acestor două patrulatere.

4.49. În triunghiul ABC mediana AM formează cu latura BC unghiul ascuţit de 60°. Cunoscînd latura $AC = b$ şi $AB = c$, $b > c$, să se calculeze

a). latura BC,

b). sinusul unghiului A.

(G.M.B., 10514, *C. Ionescu-Ţiu*).

Soluţie. a) Notăm $CM = MB = x$ şi $AM = y$. Avem $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $x^2 + y^2 + xy = b^2$; $x^2 + y^2 - xy = c^2$ de unde $x^2 + y^2 = \frac{b^2 + c^2}{2}$ şi $2xy = b^2 - c^2$.

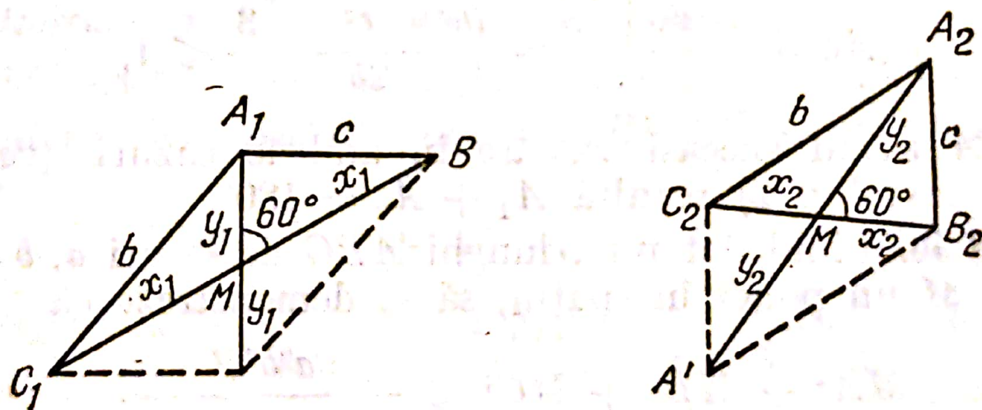


Fig. 4.49

Rezultă $x + y = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} + b^2 - c^2} = \sqrt{\frac{3b^2 - c^2}{2}}$.

Fie x şi y rădăcinile ecuaţiei:

$$z^2 - \sqrt{\frac{3b^2 - c^2}{2}}\, z + \frac{b^2 - c^2}{2} = 0, \text{ sau } 2z^2 - \sqrt{6b^2 - 2c^2}\, z + (b^2 - c^2) = 0.$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{6b^2 - 2c^2} + \sqrt{6b^2 - 2c^2 - 8b^2 + 8c^2}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3b^2 - c^2} + \sqrt{3c^2 - b^2})}{4}.$$

Rezultă și condiția $b > c > \frac{b}{\sqrt{3}}$; $B_1C_1 = a_1 = 2x_1$ (fig. 1).

$$A_1M = y_1 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3b^2 - c^2} - \sqrt{3c^2 - b^2})}{4}.$$

Analog obținem:

$x_2 = y_1$ și $2x_2 = B_2C_2 = 2y_1$, iar $A_2M = y_2 = x_1$.

b). Fie S aria triunghiului ABC. Se constată că triunghiurile A_1MB_1, A_1MC_1, A_2MB_2 și AMC sînt egale.

$S = xy \sin 60° = \frac{xy\sqrt{3}}{2}$. De asemenea $S = \frac{bc \sin A}{2}$ de unde:

$$\sin A = \frac{xy\sqrt{3}}{bc} = \frac{(b^2 - c^2)\sqrt{3}}{2bc} \leqslant 1,$$

$\sin A$ avînd aceeași valoare în ambele cazuri (vezi fig. 1 și fig. 2) rezultă $A_1 + A_2 = 180°$.

4.50. Fiind dat un triunghi ABC de laturi a, b și c și M un punct în spațiu, să se demonstreze că

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 \geqslant \frac{a^2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

(G.M.B., 12224, *I. Tomescu*).

Soluție. Este evident că minimumul sumei $\sum MA^4$ se obține atunci cînd M se găsește în planul triunghiului ABC. (În caz contrar vom considera proiecția punctului M pe planul triunghiului ABC).

Fie AA', BB', CC' bisectoarele triunghiului ABC și I centru cercului înscris în triunghi.

Mai întîi vom demonstra că $\sum aAM^2 \geqslant abc$, minimumul fiind atins cînd $M \equiv I$.

Cu *teorema lui Menelaus* aplicată triunghiului $AA'B$ obținem:

$$\frac{AI}{IA'}\cdot\frac{CA'}{BC}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1, \text{ de unde}$$

$$\frac{AI}{IA'}=\frac{BC}{CA'}\cdot\frac{C'A}{BC'}=\frac{b+c}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b+c}{a}.$$

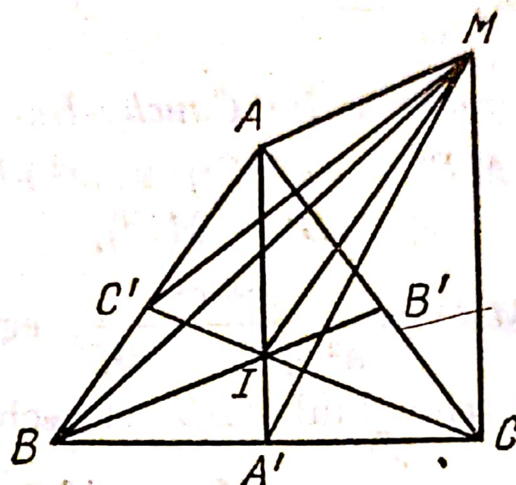


Fig. 4.50

Cu *teorema lui Stewart* obținem pe rînd:

(1) $MI^2\cdot AA' + AI\cdot IA'\cdot AA = MA^2\cdot IA' + MA^2\cdot IA$ și

(2) $MA'^2\cdot BC + BA'\cdot A'C\cdot BC = MB^2\cdot A'C + MC^2\cdot A'B$,

sau:

(1) $$MI^2\cdot AA' + AI\cdot IA'\cdot AA' =$$

$$= MA^2\cdot\frac{a}{a+b+c}AA' + MA'^2\cdot\frac{b+c}{a+b+c}\cdot AA' \text{ și}$$

(2) $$MA'^2 : a + a\cdot\frac{a^2bc}{(b+c)^2} = MB^2\cdot\frac{b}{b+c}\cdot a + MC^2\cdot\frac{c}{b+c}a,$$

de unde:

$$\frac{a\cdot MA^2 + b\cdot MB^2 + c\cdot MC^2}{a+b+c} = MI^2 + AI\cdot IA' + \frac{a^2bc}{(b+c)(a+b+c)}$$

deci $\sum a \cdot MA^2 =$ minim cînd $MI = 0$ sau cînd $M \equiv I$.

În acest caz, $(\sum a \cdot MA^2)_{M \equiv I} = \sum a \cdot \dfrac{(p-a)^2}{\cos^2 \dfrac{A}{2}} =$

$$= \sum a \frac{(p-a)^2}{\dfrac{p(p-a)}{bc}} = abc \sum \frac{p-a}{p} = abc.$$

Aplicînd *inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski*:

$$(a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)(MA^4 + MB^4 + MC^4),$$

obținem $\sum MA^4 \geqslant \dfrac{a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$, egalitatea avînd loc numai cînd triunghiul ABC este echilateral. $\left(\dfrac{a}{MA^2} = \dfrac{b}{MB^2} = \dfrac{c}{MC^2}\right)$ și M coincide cu centrul său.

Într-adevăr, $\sum MA^4 = 3R^4 = 3\dfrac{a^4}{9} = \dfrac{a^4}{3}$ dacă $a = b = c$.

4.51. a). Să se arate că orice punct din interiorul unui cerc poate fi centrul de greutate al unui triunghi înscris în cerc.

b). Să se arate că orice punct din interiorul unui cerc poate fi punctul de intersecție a bisectoarelor unui triunghi înscris în cerc.

c). Să se arate că orice punct din interiorul sau de pe circumferința unui cerc poate fi ortocentrul unui triunghi neobtuzunghic înscris în cerc.

d). Să se determine mulțimea ortocentrelor în cazul general (deci și cînd triunghiurile pot fi obtuzunghice).

(Concurs elevi, G.M.B. 14197).

Soluție. a). Dîndu-se cercul O și punctul său interior G, ducem prin G coarda AB. Această coardă este împărțită de G fie în părți egale, fie în părți inegale.

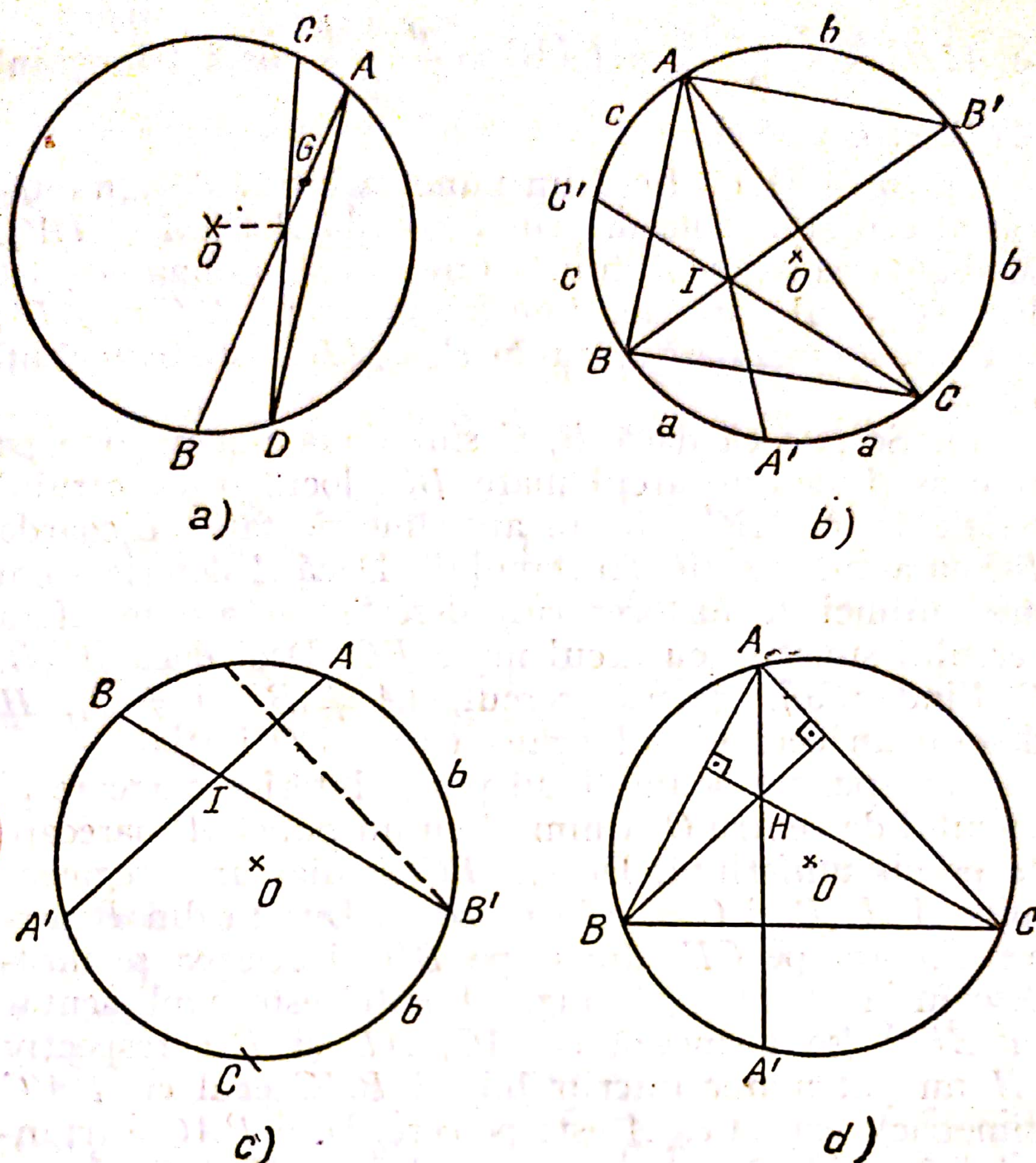


Fig. 4.51

Fie, de exemplu, $AG \leqslant GB$. Ducem în prelungirea segmentului AG segmentul $GA' = \frac{AG}{2}$. Unim O cu A' și ducem coarda CD perpendiculară în A' pe OA'. Triunghiul ACD este cel căutat (fig. 4.51.a).

b). Considerăm problema rezolvată (fig. 4.51.b). Fie I punctul de intersecție a bisectoarelor interioare a triunghiului înscris ABC. AI taie a doua oară cercul în A', BI în B', CI în C'. Notăm arcele $\overset{\frown}{AC'} = \overset{\frown}{C'B} = c$, $\overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{B'C} = b$, $\overset{\frown}{CA'} = \overset{\frown}{A'B} = a$.

$\sphericalangle AIB' = \dfrac{a+b}{2}$, $\sphericalangle IAB' = \dfrac{a+b}{2}$ deci triunghiul AIB' este isoscel.

În fig. 4.51, c), fie I un punct arbitrar dat, în interiorul cercului. Ducem prin I coarda $AA'(IA < IA')$. Mediatoarea segmentului AI taie cercul în două puncte. Fie B' unul din ele. Construim arcul $B'C = AB'$; $B'I$ taie a doua oară cercul în B. $\triangle ABC$ este triunghiul căutat.

c). Se știe că dacă B, C sînt două puncte fixe pe cerc și A descrie arcul mare BC, locul ortocentrului triunghiului ABC este un arc simetric față de coarda BC cu arcul mic BC (al cercului). Dacă A descrie arcul mic, atunci H (ortocentrul) descrie un arc în afara cercului simetric cu arcul mare BC. Deci dacă A (B, C fiind fixe), descrie cercul, ($A \neq B$, $A \neq C$), H descrie un cerc secant egal cu cercul O inițial.

Presupunem acum H un punct interior oarecare al cercului de centru O. Unim H cu un punct A' oarecare de pe circumferință. Ducem BC mediatoarea segmentului $A'H$ (B și C se află pe cerc). Ducem din B perpendiculara pe CH, din C pe BH și acestea se întîlnesc în A. Pentru că unghiul BAC este suplimentar cu BHC (se formează cu AC, AB și BH respectiv CH un patrulater inscriptibil) și BHC egal cu $BA'C$ (simetric) rezultă că A este pe cerc. Deci BAC e triunghiul înscris căutat (ascuțitunghic în $H \neq O$, dreptunghic dacă $H = O$).

Dacă H se găsește în exteriorul cercului astfel încît să existe un cerc egal cu cercul O care să treacă prin H și să fie secant cu cercul O, problema este posibilă. Deci locul geometric este alcătuit din mulțimea punctelor din interiorul unui cerc concentric cu cel inițial și cu raza triplă.

4.52. Se consideră un pătrat $ABCD$ și un punct M situat în planul său. Se notează: $AB = BC = CD = DA = m$; $MA = a$, $AB = b$, $MC = c$.

1°. În cazul particular $m = \sqrt{10}$, $a = 5$, $c = 1$, punctul M poate avea două poziții: M_1 și M_2. Să se calculeze: $M_1B = b_1$; $M_2B = b_2$.

2°. Revenind la cazul general, să se arate că între lungimile m, a, b, c, avem relația:

$$(a^4 + c^4) - 2(a^2 + c^2)(b^2 + m^2) + 2(b^4 + m^4) = 0.$$

Să se aplice la rezolvarea punctului 1°.

3°. Dîndu-se valorile: $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$, să se deducă latura pătratului.

4°. Să se dea o construcție geometrică a pătratului cînd se cunosc distanțele $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$. Să se facă efectiv construcția pentru $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$.

5°. Se presupune acum că distanțele a și c păstrează valorile $a = 5$, $c = 1$ de la punctele 3 și 4 ale problemei, dar că distanța b poate lua și alte valori decît $b = 3$.

Care sînt valorile ce pot fi date lui b pentru ca determinarea pătratului să fie posibilă? Care sînt valorile laturii pătratului ce corespund valorilor extreme ale lui b?

(Concurs elevi, 1956).

Soluție. 1°. *Construcția grafică.* Se desenează un pătrat $ABCD$ cu latura $\sqrt{10} \approx 3{,}16$; se descriu cercuri cu centrele în A și C de raze 5 și 1 respectiv; la intersecția lor avem punctele M_1 și M_2.

Calculul distanțelor, M_1B și M_2B. — În triunghiul ACM_1 cunoaștem laturile și putem calcula unghiul $\alpha = \sphericalangle CAM_1$:

$$M_1C^2 = M_1A^2 + CA^2 - 2M_1A \cdot CA \cos \alpha$$

adică,

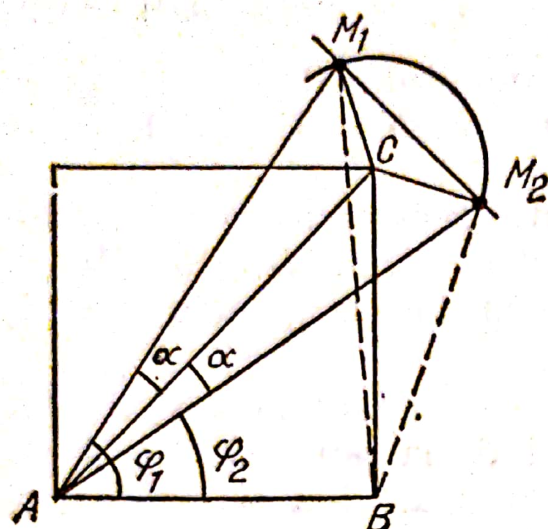
$$1 = 25 + 20 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{20} \cos \alpha$$

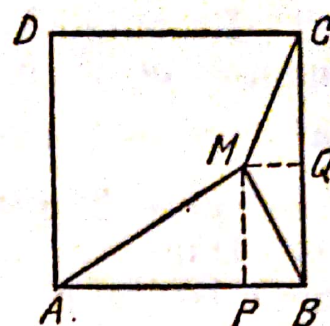
de unde

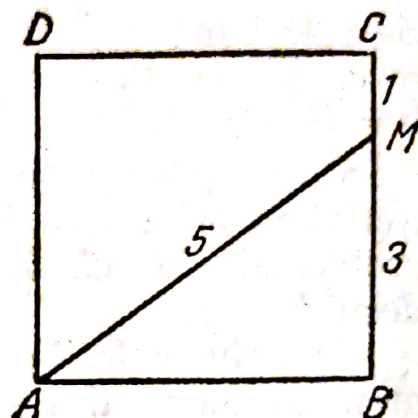
$$\cos \alpha = \frac{11}{5\sqrt{5}}, \text{ și deci } \sin \alpha = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

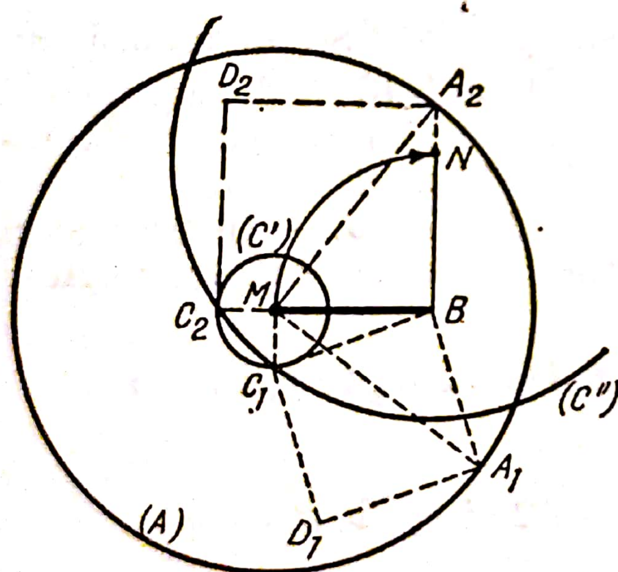
Notînd $\varphi_1 = \sphericalangle BAM_1$, avem $\varphi_1 = 45° + \alpha$, deci,

$$\cos \varphi_1 = \cos 45° \cdot \cos \alpha - \sin 45° \cdot \sin \alpha = \frac{9}{5\sqrt{10}}.$$









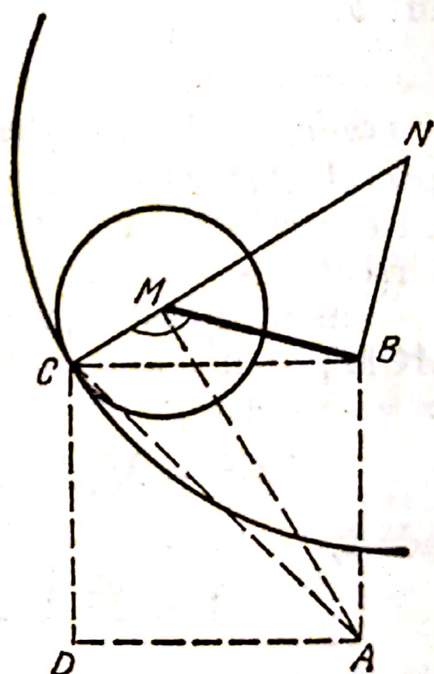


Fig. 4.52

Din triunghiul BAM_1, avem:

$$BM_1^2 = BA^2 + AM_1^2 - 2BA \cdot AM_1 \cdot \cos \alpha_1 =$$

$$= 10 + 25 - 2\sqrt{10} \cdot 5 \frac{9}{5\sqrt{10}} = 17, \Rightarrow BM_1 = \sqrt{17}.$$

Analog, $\varphi_2 = 45° - \alpha$; $\cos \varphi_2 = \frac{13}{5\sqrt{10}}$; $BM_2 = 3$.

2°. Relația cerută se obține astfel: Fie P și Q proiecțiile lui M pe AB, BC. Calculăm segmentul PB din triunghiul ABM (prin *teorema lui Pitagora* generalizată), apoi segmentul QB din triunghiul CBM; rezultatele obținute le înlocuim în relația $PB^2 + QB^2 = MB^2$.

Avem: $$MA^2 = AB^2 + MB^2 - 2AB \cdot PB,$$
$$a^2 = m^2 + b^2 - 2m \cdot PB,$$

de unde
$$PB = \frac{m^2 + b^2 - a^2}{2m}.$$

La fel, $QB = \frac{m^2 + b^2 - c^2}{2m}$. Înlocuind, obținem:
$$\frac{(m^2 + b^2 - a^2)^2}{4m^2} + \frac{(m^2 + b^2 - c^2)^2}{4m^2} = b^2.$$

Efectuînd calculele și grupînd termenii, obținem relația
$$a^4 + c^4 - 2(a^2 + c^2)(b^2 + m^2) + 2(b^4 + m^4) = 0.$$

Înlocuind $a = 5$, $c = 1$, $m = \sqrt{10}$, obținem
$$b^4 - 26b^2 + 153 = 0,$$
de unde $b_1 = \sqrt{17}$; $b_2 = 3$.

3°. Înlocuind în relație pe a, b, c cu valorile date, obținem
$$m^4 - 26m^2 + 160 = 0$$

de unde $m_2 = \sqrt{10}$; $m_2 = 4$.

Prima valoare a lui m corespunde cazului de la punctul 1° (valoarea $b_1 = 3$). A doua valoare corespunde unei figuri în care punctul M este pe latura BC.

4°. Să luăm în plan un segment MB avînd valoarea dată și să căutăm pozițiile punctelor A și C. Să facem următoarea observație.

Punctul C se poate deduce din punctul A, printr-o rotație de 90° cu centrul în B.

Să aplicăm cele spuse la construcția cerută. Anume, vom determina poziția punctului C prin metoda intersecției locurilor geometrice.

a). Condiția $MC = c$ (c fiind dat), arată că punctul C descrie un cerc cu centrul în M de rază c. Să notăm cu (C') acest cerc.

b). Condiția $MA = a$ (a fiind dat), arată că punctul A descrie un cerc cu centrul în M de rază a; să notăm acest cerc cu (A). Conform celor spuse mai sus, în acest caz punctul C va descrie un cerc, ce se obține din cercul (A) printr-o rotație de 90° în jurul punctului B; să notăm cu (C'') acest cerc. Centrul cercului (C'') este punctul N obținut din M printr-o rotație de 90° în jurul punctului B, iar raza cercului (C'') este egală cu raza cercului (A), adică este a.

Punctul C se află la intersecția cercurilor (C) și (C''). Aceste cercuri se taie în două puncte, C_1 și C_2. Odată cunoscute aceste puncte, reconstituirea pătratului este imediată. Se obțin pătratele $A_1B_1C_1D_1$ (linii scurte) și $A_2B_2C_2D_2$ (linii lungi).

5°. Acest punct (împreună cu punctul 6°) sînt generalizarea și discuția punctelor 3° și 4°.

Discuție geometrică. Pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca cercurile (C') și (C'') să se intersecteze. Distanța centrelor este $MN = b\sqrt{2}$, iar razele sînt a și c. Presupunînd, pentru fixarea ideilor, $a > c$, condiția de posibilitate este

$$a - c \leqslant b\sqrt{2} \leqslant a + c,$$

de unde

$$\frac{a - c}{\sqrt{2}} \leqslant b \leqslant \frac{a + c}{\sqrt{2}}.$$

În cazul particular $a = 5$, $c = 1$, obținem

$$2\sqrt{2} \leqslant b \leqslant 3\sqrt{2}.$$

Să găsim valoarea laturii pătratului ce corespunde unei valori extreme a lui b.

Dacă b este egal cu una din valorile extreme, atunci cercurile (C') şi (C'') sînt tangente şi avem pentru punctul C o singură poziţie pe linia centrelor, adică pe dreapta MN.

Să considerăm cazul cînd cercurile sînt tangente interior. În acest caz, unghiul BMC este de 135°, deci patrulaterul $ABMC$ este inscriptibil.
În consecinţă, unghiul AMC este drept şi avem:

$$AC^2 = AM^2 + CM^2$$

adică,

$$2m^2 = a^2 + c^2;\ m = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}.$$

La acelaşi rezultat se ajunge dacă cercurile sînt tangente exterior. În cazul particular $a = 5$, $c = 1$, obţinem $m = \sqrt{13}$.

4.53. Se consideră triunghiul ABC cu ortocentrul H. Prin punctele A şi H se duc două drepte paralele, iar prin B şi C, o altă pereche de drepte paralele perpendiculare pe primele. Se formează astfel dreptunghiul $MNPQ$ căruia i se circumscrie cercul (O).

Să se demonstreze că:

a). Diagonalele dreptunghiului $MNPQ$ trec prin picioarele înălţimilor BH şi CH.

b). Cercul (O) trece printr-un punct fix.

c). Locul punctului O este cercul lui Euler al triunghiului ABC.

(G.M.F.B., 1805, *Mihail Popescu*).

Soluţie. Fie $A'B'C'$ triunghiul ortic al triunghiului ABC. Din patrulaterele inscriptibile $AMBB'$ şi $HCPB'$ se deduc egalităţile:

$$\sphericalangle AB'M = \sphericalangle ABM \quad \text{şi} \quad \sphericalangle CB'P = \sphericalangle PHC.$$

Cum $\sphericalangle PHC = \sphericalangle ABM$, ca unghiuri cu laturile perpendiculare, rezultă $\sphericalangle AB'M = \sphericalangle CB'P$, ceea ce dovedeşte coliniaritatea punctelor M, B', P. Analog se poate arăta că şi punctele N, C', Q sînt coliniare.

Pe de altă parte, din patrulaterele inscriptibile $PHA'C$ și $AMBA'$ se deduc egalitățile:

$$\sphericalangle AA'P = \sphericalangle HCP \quad \text{și} \quad \sphericalangle AA'M = \sphericalangle ABM.$$

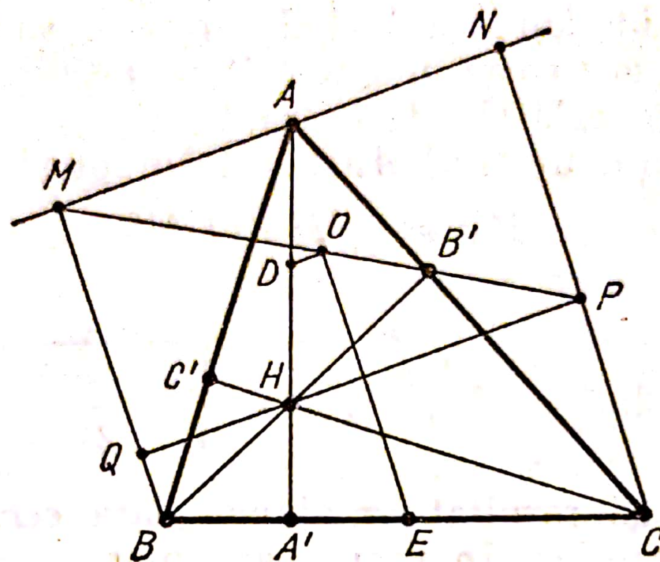


Fig. 4.53

Cum $\sphericalangle HCP = \sphericalangle BAM$, ca unghiuri cu laturile perpendiculare, rezultă

$$\sphericalangle MA'P = \sphericalangle AA'M + \sphericalangle AA'P = \sphericalangle ABM + \\ + \sphericalangle BAM = 90°.$$

Prin urmare, cercul (O) trece prin punctul fix A'.

Într-adevăr, notînd cu D și E mijloacele segmentelor AH și BC rezultă că punctul O descrie cercul de diametru DE, care este tocmai *cercul Euler* al triunghiului ABC.

4.54. Fie M un punct care împarte segmentul AB într-un raport k. Se duce un cerc tangent segmentului AB în punctul M. O secantă dusă din A taie cercul în punctele C și D, iar o secantă oarecare dusă din B taie cercul în punctele E și F. Dreptele CF și DE taie dreapta AB respectiv în punctele G și H. Între segmentele AG și BH există relația:

$$\frac{k^2}{AG} - \frac{1}{BH} = \frac{k^2 - 1}{AB}.$$

Soluție. Fie $I \equiv (AD, BF)$. Aplicînd *teorema lui Menelaus* triunghiului AIB tăiat de transversalele FCG și DEH obținem:

$$\frac{CA}{CI}\cdot\frac{FI}{FB}\cdot\frac{GB}{GA}=1 \quad (1) \quad \text{și} \quad \frac{HB}{HA}\cdot\frac{DA}{DI}\cdot\frac{EI}{EB}=1 \quad (2)$$

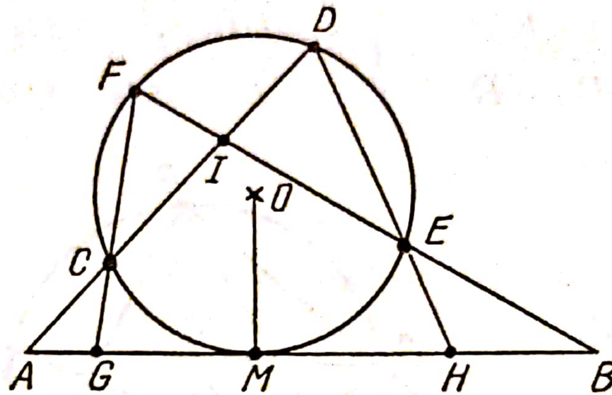


Fig. 4.54

Cum $AM = kMB$, rezultă $AC \cdot AD = k^2 \cdot BE \cdot BF$. (3)

Puterea lui I față de cercul (O) este $IC \cdot ID = IE \cdot IF$. (4)

Înmulțind relațiile (1) și (2) și ținînd seama de (3) și (4) obținem:

$$\frac{k^2 \cdot BG \cdot BH}{AG \cdot AH}=1 \quad \text{sau} \quad k^2 \cdot \frac{BG}{AG}=\frac{AH}{BH} \quad \text{sau}$$

$$k^2 \cdot \frac{AB-AG}{AG}=\frac{AB-BH}{BH} \quad \text{sau}$$

$$\frac{k^2 \cdot AB}{AG}=\frac{AB}{BH}+k^2-1 \text{ de unde } \frac{k^2}{AG}-\frac{1}{BA}=\frac{k^2-1}{AB}.$$

4.55. Fie A și B două puncte mobile pe cercul fix (O), iar C și D două puncte fixe în planul cercului. Dreptele CA, DB, CB, DA taie a doua oară cercul în punctele E, F, G, H. Se cere locul punctului de intersecție al dreptelor EF și GH.

Soluție. Fie $K(AC; BD)$, $L(AD; BC)$, $P_1(CD; EF)$, $P_2(CD; CH)$.

Aplicînd *teorema lui Menelaus* triunghiurilor CDL, CDK, DLB și BCK, tăiate de transversalele EFP_1, GHP_2, ACK, LAD, obținem:

$$\frac{P_1D}{P_1C}\cdot\frac{EC}{EK}\cdot\frac{FK}{FD}=1; \qquad \frac{P_2C}{P_2D}\cdot\frac{HD}{HL}\cdot\frac{GL}{GC}=1;$$

$$\frac{AD}{AL}\cdot\frac{CL}{CB}\cdot\frac{KB}{KD}=1; \qquad \frac{LB}{LC}\cdot\frac{AC}{AK}\cdot\frac{DK}{DB}=1;$$

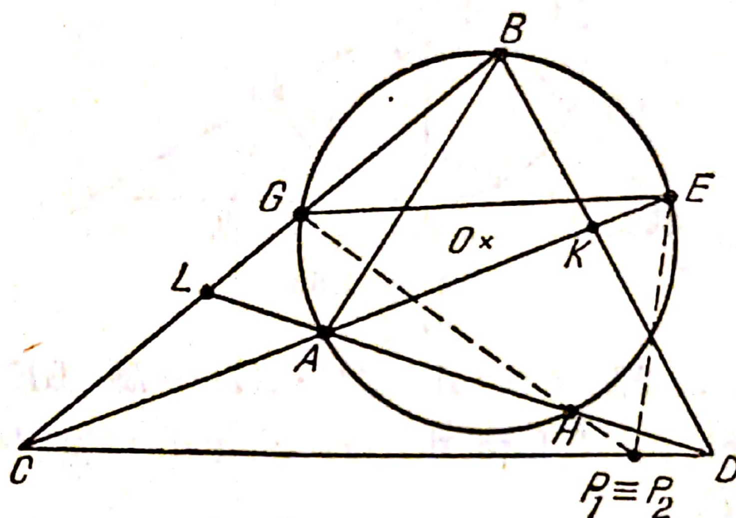


Fig. 4.55

Înmulțind cele patru relații obținem:

$$\frac{P_1D}{P_1C}\cdot\frac{P_2C}{P_2D}\cdot\frac{EC}{GC}\cdot\frac{FK}{EK}\cdot\frac{HD}{FD}\cdot\frac{GL}{HL}\cdot\frac{AC}{CB}\cdot\frac{KB}{AK}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{LB}{AL}= 1. \tag{1}$$

Datorită egalității unghiurilor, triunghiurile CGE, FKE, HDF, GLH sînt asemenea cu triunghiurile CAB, AKB, BDA, ALB. Deci,

$$\frac{EC}{GC}=\frac{CB}{AC}; \quad \frac{FK}{EK}=\frac{AK}{KB}; \quad \frac{HD}{FD}=\frac{DB}{AD}; \quad \frac{GL}{HL}=\frac{AL}{LB}$$

sau:

$$\frac{EC}{GC}\cdot\frac{FK}{EK}\cdot\frac{HD}{FD}\cdot\frac{GL}{HL}\cdot\frac{AC}{CB}\cdot\frac{KB}{AK}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{LB}{AL}=1. \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) scoatem:

$$\frac{P_1D}{P_1C} = \frac{P_2D}{P_2C} \quad \text{deci} \quad P_1 \equiv P_2,$$

ceea ce înseamnă că locul punctului de intersecție al dreptelor EF și GH este dreapta fixă CD.

4.56. Într-un cerc, printr-un punct oarecare C se duc coardele MN și PQ. Fie D și E intersecțiile dreptei AB cu dreptele PN și MQ respectiv. Să se arate că:

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{CE} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{DC}.$$

Soluție. Dreptele PN și MQ se întîlnesc în O. Aplicînd *teorema lui Menelaus* triunghiului ODE, tăiat de transversalele PCQ și MCN, avem:

$$\frac{OP}{DP} \cdot \frac{DC}{CE} \cdot \frac{EQ}{OQ} = 1; \quad \frac{OM}{EM} \cdot \frac{CE}{DC} \cdot \frac{DN}{ON} = 1.$$

Împărțind aceste relații obținem:

$$\frac{DC^2}{CE^2} = \frac{DP \cdot OQ \cdot OM \cdot DN}{OP \cdot EQ \cdot EM \cdot ON} \quad (1)$$

Dar ținînd seama de puterea punctului Q față de cerc avem:

$$OP \cdot ON = OM \cdot OQ.$$

$$\Rightarrow \frac{DC^2}{CE^2} = \frac{DP \cdot DN}{EM \cdot EQ}. \quad (2)$$

Ținînd seama de puterile punctelor D și E față de cerc avem:

$$DP \cdot DN = DA \cdot DB;$$

$$EM \cdot EQ = EB \cdot EA$$

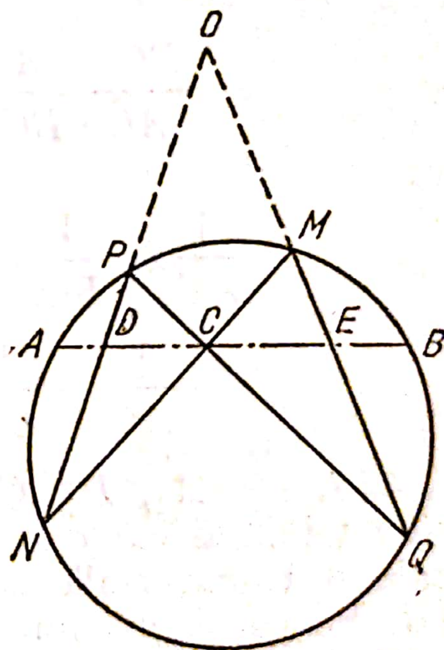


Fig. 4.56

și ținînd seama că:

$$DA = AC - DC; \quad DB = BC + DC;$$
$$EB = BC - CE; \quad EA = AC + CE;$$

avem:

$$DA \cdot DB = (AC - DC)(BC + DC) = AC \cdot BC + \\ + AC \cdot DC - DC \cdot BC - DC^2,$$

$$EB \cdot EA = (BC - CE)(AC + CE) = AC \cdot BC + \\ + BC \cdot CE - AC \cdot CE - CE^2.$$

Relația (2) devine

$$\frac{DC^2}{CE^2} = \frac{AC \cdot BC + AC \cdot DC - DC \cdot BC - DC^2}{AC \cdot BC + BC \cdot CE - AC \cdot CE - CE^2}.$$

Această relație devine succesiv:

$$DC^2 \cdot AC \cdot BC + DC^2 \cdot CE(BC - AC) = CE^2 \cdot AC \cdot BC - \\ - CE^2 \cdot DC \cdot (BC - AC)$$

sau

$$CE^2 \cdot DC \cdot (BC - AC) + DC^2 \cdot CE(BC - AC) = \\ = CE^2 \cdot AC \cdot BC - DC^2 \cdot AC \cdot BC$$

sau

$$CE \cdot DC(BC - AC)(CE + DC) = \\ = AC \cdot BC(CE - DC)(CE + DC), \text{ sau}$$

$$\frac{BC - AC}{AC \cdot BC} = \frac{CE - DC}{CE \cdot DC};$$

sau

$$\frac{1}{AC} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{DC} - \frac{1}{CE}; \text{ adică}$$

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{CE} = \frac{1}{DC} + \frac{1}{BC}.$$

4.57. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene într-un triunghi oarecare ABC, iar A_2, B_2, C_2 punctele unde o transversală oarecare taie laturile BC, CA, AB. Se consideră punctele $A_3 \equiv (B_1C_2;\ BC)$, $B_3 \equiv (C_1A_2;\ CA)$, $C_3 \equiv (A_1B_2;\ AB)$. Să se arate că AA_3, BB_3, CC_3 sînt concurente.

Soluție. Conform *teoremei lui Ceva*, avem:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1,$$

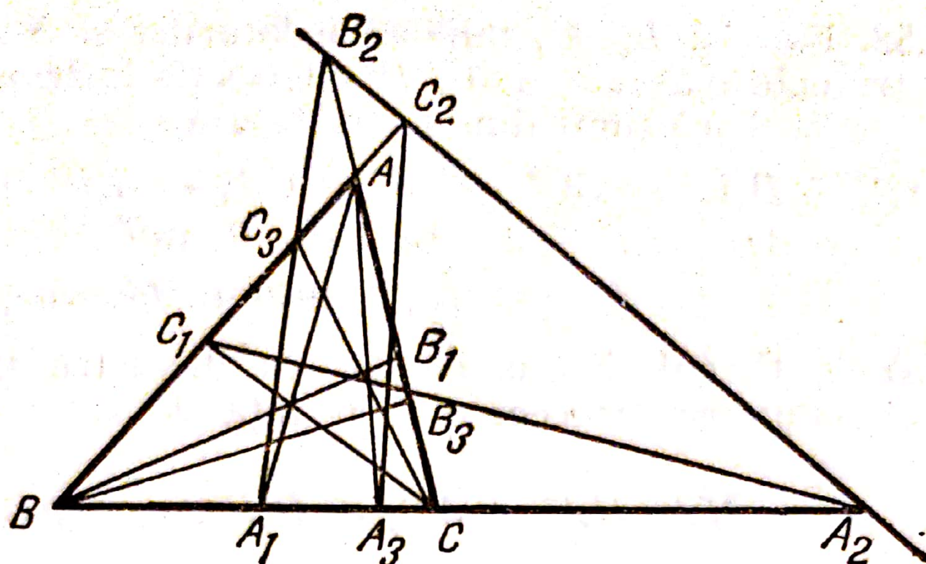


Fig. 4.57

iar *teorema lui Menelaus* ne dă:

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=1.$$

Aplicînd *teorema lui Menelaus* triunghiului ABC tăiat de transversalele A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2, obținem

$$\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=1;\qquad \frac{C_2B}{C_2A}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{A_3C}{A_3B}=1;$$

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_3C}{B_2A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1.$$

Din aceste ultimele trei relații deducem:

$$\frac{A_3B}{A_3C}\cdot\frac{B_3C}{B_3A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_2C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=$$
$$=1.$$

Ținînd seama de primele două relații, rezultă:

$$\frac{A_3B}{A_3C}\cdot\frac{B_3C}{B_3A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B}=1$$

adică conform reciprocei *teoremei lui Ceva*, dreptele AA_3, BB_3, CC_3 sînt concurente.

4.58. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor şi S aria unui triunghi oarecare ABC, H intersecţia înălţimilor şi A' piciorul înălţimii din A. Să se arate că

$$AB_1^2 - B_1H^2 - BC^2 - CH^2 = CA_1^2 - A_1^2H =$$
$$= AH \cdot HA' = 2S \text{ ctg } A \text{ ctg } B \text{ ctg } C.$$

(S.G.M., 7, 1949, *C. Ionescu-Ţiu*).

Soluţie. Cercul descris pe AC ca diametru trece prin A'. Puterea ortocentrului H faţă de acest cerc este:

$$HA \cdot HA' = AB_1^2 - B_1H^2.$$

Pe de altă parte, R fiind raza cercului circumscris

$$AH = 2R \cos A,\ HA' = 2R \cos B \cos C,\ S =$$
$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

4.59. Se consideră într-un plan π dreptele d_1 şi d_2 paralele necoincidente şi punctele $A_1 \notin \pi$ şi $A_2 \notin \pi$ aşa fel încît $d(A_1, A_2) \cap \pi \equiv A_0$.

a). Să se arate că dacă α este un plan mobil care conţine dreapta $d(A_1, A_2)$ şi dacă $B_1 \equiv d_1 \cap \alpha$ şi $B_2 \equiv d_2 \cap \alpha$, atunci $d(B_1, B_2)$ trece printr-un punct fix.

b). Mulţimea punctelor $P \equiv d(A_1, B_1) \cap d(A_2, B_2)$ este o dreaptă paralelă cu planul π.

c). Să se rezolve problema dacă $d_1 \cap d_2 \equiv B_0$ şi să se arate că mijloacele segmentelor $[B_0, A_1]$, $[B_0, A_2]$, $[B_1, A_1]$ şi $[B_1, A_2]$ sînt coplanare şi formează un paralelogram.

(G.M.B., 9376, 1969, *C. Borş*)

Soluţie. a). Rezultă că $A_0 \in \pi \cap \alpha = d(B_1, B_2)$.

b). Punctul P se află în planele $\pi(d_1, A_1)$ şi $\pi(d_2, A_2)$ adică pe dreapta lor de intersecţie. Aceste plane trecînd prin dreptele paralele d_1 şi d_2, dreapta lor de intersecţie este paralelă cu d_1 (şi cu d_2) şi deci şi cu planul π.

c). În cazul general $d_1 \cap d_2 \equiv B_0$, mulţimea punctelor P este o dreaptă care conţine punctul B_0. Punctele B_0, B_1, A_1, A_2 formează un patrulater strîmb. Demonstraţia rezultă folosind proprietăţile liniei mijlocii într-un triunghi.

4.60. Într-un patrulater inscriptibil suma produselor laturilor opuse este egală cu produsul diagonalelor (*Teorema lui Ptolemeu*).

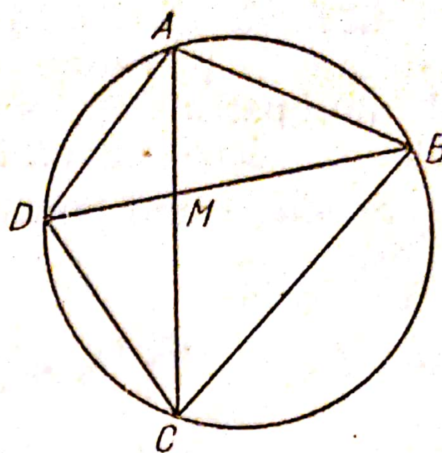


Fig. 4.60

Soluție. Din asemănarea triunghiurilor AMD și BMC, avem:

$$\frac{AM}{BM} = \frac{DM}{CM} = \frac{AD}{BC}. \quad (1)$$

La fel, din asemănarea triunghiurilor AMB și CMD, avem

$$\frac{AM}{DM} = \frac{BM}{CM} = \frac{AB}{CD} \quad (2)$$

Aplicînd *teorema lui Stewart* în triunghiul BCD obținem:

$$BC^2 \cdot MD + CD^2 \cdot MB = MC^2 \cdot BD + MD \cdot MB \cdot BD. \quad (3)$$

Dar puterea punctului M față de cerc ne dă $MD \cdot MB = MA \cdot MC$, deci relația (3) devine:

$$BC^2 \cdot MD + CD^2 \cdot MB = MC^2 \cdot BD(MC + MA),$$

sau

$$BC^2 \cdot MD + CD^2 \cdot MB = MC \cdot BD \cdot AC.$$

Împărțind această relație cu MC obținem:

$$BC^2 \cdot \frac{MD}{MC} + CD^2 \cdot \frac{MB}{MC} = BD \cdot AC$$

sau, avînd în vedere relațiile (1) și (2),

$$BC^2 \cdot \frac{AD}{BC} + CD^2 \cdot \frac{AB}{CD} = BD \cdot AC,$$

$$\Rightarrow BC \cdot AD + AB \cdot CD = AC \cdot BD.$$

4.61. Să se arate că produsul distanțelor unui punct oarecare de pe cercul circumscris la două laturi opuse ale unui patrulater înscris, este egal cu produsul distanțelor la celelalte două laturi opuse (Pappus).

Soluție. Unim punctul M cu vîrfurile A și C. Vom avea:

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle C_1 = \frac{1}{2} \text{arc } \widehat{MB};$$

$$\sphericalangle A_2 = \sphericalangle C_2 = \frac{1}{2} \text{arc } \widehat{MAD}.$$

Însă:

$$ME = AM \cdot \sin A_1; \qquad MG = CM \cdot \sin C_2.$$

$$MF = CM \cdot \sin C_1; \; MH = AM \cdot \sin A_2.$$

Înmulțind relațiile două cîte două avem:

$$ME \cdot MG = AM \cdot CM \sin A_1 \sin C_2,$$

$$MP \cdot MH = AM \cdot CM \sin A_2 \sin C_1$$

de unde rezultă $ME \cdot MG = MF \cdot MH$.

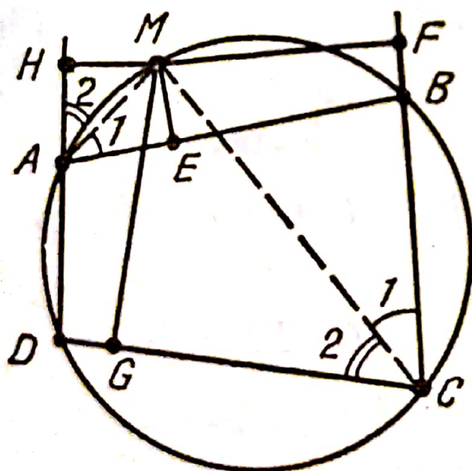


Fig. 4.61

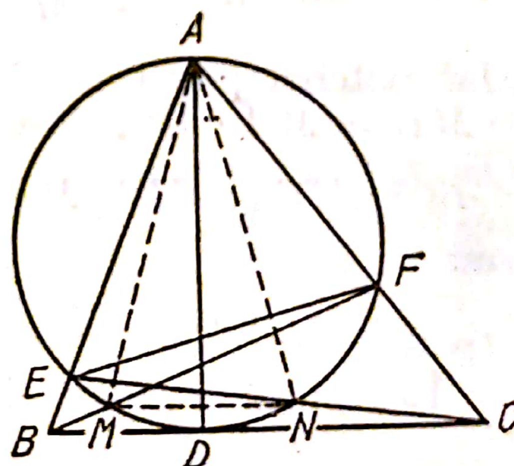


Fig. 4.62

4.62. Cercul construit pe înălțimea AD, a unui triunghi oarecare ABC, ca diametru, taie laturile AB, AC respectiv în E și F. Dreptele BF și CE taie a doua oară cercul în M și N. Să se arate că:

a). dreptele BC și EF sînt antiparalele,
b). triunghiul AMN este isoscel.

Soluția I. a). Pentru a arăta că BC și EF sînt antiparalele trebuie să demonstrăm că $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AEF$ sau că patrulaterul $EBCF$ este inscriptibil.

Într-adevăr,

$$\text{măs } \sphericalangle ACB = \frac{\widehat{AD} - \widehat{DNF}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{DNF}}{2} = \frac{\widehat{AF}}{2}$$

și $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AEF$, deci dreptele BC și EF sînt antiparalele.

CAPITOLUL V

DREPTE ȘI PLANE ÎN SPAȚIU. LOCURI GEOMETRICE

Planul este o suprafață avînd proprietatea că orice dreaptă care unește două puncte ale acestei suprafețe este conținută în întregime în ea. Prin trei puncte necoliniare trece un plan și numai unul.

Două plane distincte care au un punct comun, au o infinitate de puncte comune situate toate pe aceeași dreaptă.

Teoremă. Dacă două drepte D_1, D_2 sînt paralele, atunci paralela la D_1 dusă printr-un punct arbitrar (din afara dreptelor) al spațiului, coincide cu paralela dusă prin același punct la D_2.

Teoremă. Dacă un plan P este paralel cu o dreaptă D atunci orice plan dus prin D și care este secant cu P taie planul P după o dreaptă D_1 paralelă cu D.

Teoremă. Dacă două drepte sînt paralele, orice plan paralel cu una din ele sau care o conține este paralel cu a doua sau o conține.

Teoremă. Intersecția a trei plane diferite și neparalele este un punct.

Teoremă. O dreaptă paralelă cu două plane este paralelă cu intersecția lor.

Teoremă. Dacă două drepte sînt paralele, orice plan care taie una din drepte, o taie și pe a doua.

Teoremă. Un plan paralel cu două drepte concurente dintr-un al doilea plan, distinct de primul, este paralel cu acesta.

Definiție. Unghiul a două drepte oarecare din spațiu situate sau nu în același plan este egal cu unghiul format de paralele duse la aceste drepte printr-un punct arbitrar al spațiului.

Teoremă. Porțiunile de paralele cuprinse între două plane paralele sau între o dreaptă și un plan paralel cu ea sînt egale.

Teoremă. Trei plane paralele determină pe secante oarecare segmente proporționale.

Teoremă. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte neparalele dintr-un plan, ea este perpendiculară pe plan.

Teoremă. Perpendicularele într-un punct pe o dreaptă sînt situate într-un plan perpendicular pe dreaptă.

Teoremă. Două drepte perpendiculare pe același plan sînt paralele.

Teoremă. Dintr-un punct ducem o perpendiculară pe un plan și mai multe oblice. Această perpendiculară este mai scurtă decît orice oblică.

Teoremă. Locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte A, B este un plan perpendicular pe mijlocul segmentului AB.

Teoremă. Locul geometric al dreptelor duse printr-un punct dat și care formează unghiuri egale cu două *semidrepte* date, duse din același punct, este planul care trece prin bisectoarea unghiului format de semidreptele date și prin perpendiculara pe planul lor dusă prin punctul lor comun.

Definiție. Se numește *unghi diedru* figura formată de două *semiplane* mărginită de dreapta comună planelor numită și *muchia diedrului*, iar cele două semiplane sînt *fețele diedrului*. Unghiului plan format de două perpendiculare pe muchia diedrului și conținute în fețele diedrului are aceeași măsură cu măsura unghiului diedru.

— Prin intersecția a trei plane obținem un unghi triedru care are ca vîrf punctul comun planelor și 3 fețe formate din cele 3 plane.

— Prin intersecția unui număr oarecare de plane obținem un *poliedru*.

Locul geometric al proiecțiilor punctelor unei drepte D pe un plan P, este un plan Q perpendicular pe planul P, iar intersecția acestor două plane este proiecția

D' a dreptei D pe planul Q, unghiul format de D și D' este unghiul format de dreapta D în planul P.

Teoremă. Dacă D_1 și Δ_1 sînt proiecțiile a două drepte din spațiu D și Δ pe planul P, atunci două din următoarele proprietăți:

a). dreptele D și Δ sînt perpendiculare;

b). una din drepte este paralelă cu planul P;

c). proiecțiile D_1, Δ_1 sînt perpendiculare, implică pe a treia.

Teoremă. Un unghi drept cu o latură paralelă cu un plan P se proiectează pe planul P tot după un unghi drept. Reciproc, dacă un unghi cu o latură paralelă cu un plan P se proiectează pe acest plan P după un unghi drept, atunci unghiul considerat este drept.

Teoremele celor 3 perpendiculare.

Teoremă. Dacă dintr-un punct A al spațiului ducem o perpendiculară Aa pe un plan P și o perpendiculară AO pe o dreaptă OB din planul P, atunci dreapta Oa care unește picioarele acestor două perpendiculare este de asemenea perpendiculară pe OB.

Reciproca 1. Dacă dintr-un punct a al planului P ducem o perpendiculară aO pe o dreaptă oarecare OB din planul P, atunci dreapta care unește punctul O cu un punct oarecare A al perpendicularei duse pe acest plan în a este de asemenea perpendiculară pe OB.

Reciproca 2. Dacă dintr-un punct A exterior unui plan P ducem o perpendiculară AO pe dreapta OB din acest plan P și ducem în O, în planul P perpendiculara Oa pe OB, atunci perpendiculara dusă din A pe Oa este perpendiculară pe planul P.

Definiție. Dacă un plan orizontal H se intersectează cu un plan înclinat P, atunci unghiul diedru al planelor P și H este numit *unghiul de cea mai mare pantă*, iar dreapta D din planul P care are ca proiecție pe planul H o dreaptă d perpendiculară pe intersecția celor două plane, este numită *linia de cea mai mare pantă.*

Definiție. Perpendiculara comună a două drepte D_1 și D_2 neparalele din spațiu este o singură dreaptă care le taie pe cele două drepte D_1 și D_2 sub unghi drept. Lungimea segmentului din perpendiculara co-

mună cuprins între intersecțiile ei cu dreptele D_1 și D_2 este distanța cea mai scurtă între aceste două drepte.

Teoremă. Proiecția unei arii plane pe un plan are ca măsură produsul dintre aria ce se proiectează prin cosinusul unghiului ascuțit format din cele două plane. $S = S'\cos\alpha$.

Teorema lui Désargues. Fie două triunghiuri în spațiu ABC și $A_1B_1C_1$. Dacă dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente, atunci laturile opuse BC, B_1C_1; AC, A_1C_1; și AB, A_1B_1 se întîlnesc în puncte situate pe o dreaptă și reciproc.



PROBLEME

5.1. Fie două paralelograme oarecare în spațiu $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$, iar $A_2B_2C_2D_2$, punctele care împart segmentele AA_1, BB_1 și CC_1 în același raport. Să se arate că $A_2B_2C_2D_2$ este tot un paralelogram.

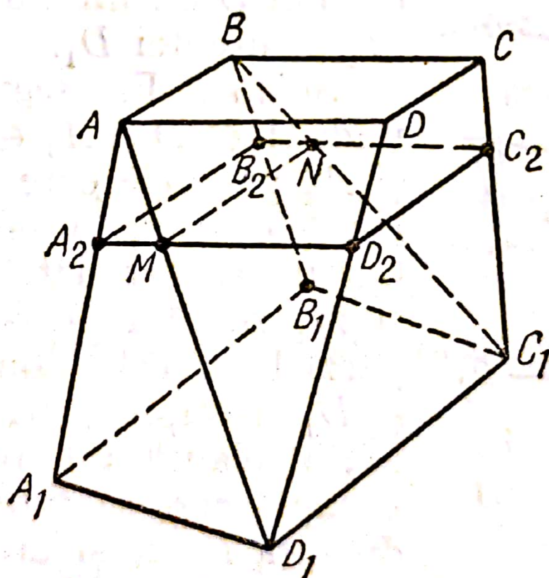


Fig. 5.1

Soluție. Avem:

$$\frac{A_2A_1}{A_2A} = \frac{B_2B_1}{B_2B} = \frac{C_2C_1}{C_2C} = \frac{D_2D_1}{D_2D} = \frac{m}{n}.$$

Pe dreptele D_1A, C_1B luăm punctele M și N astfel ca

$$\frac{D_1M}{AM} = \frac{C_1N}{BN} = \frac{m}{n}.$$

Din asemănări de triunghiuri: AA_1D_1 cu AA_2M, AD_1D cu MD_1D_2, BCC_1 cu NC_2C_1 și BB_1C_1 cu BB_2N, avem:

$$\frac{D_2M}{DA} = \frac{m}{m+n}; \quad \frac{A_2M}{A_1D_1} = \frac{n}{m+n}; \quad \frac{C_2N}{CB} = \frac{m}{m+n};$$

$$\frac{B_2N}{B_1C_1} = \frac{n}{m+n}.$$

Avem $DA = BC$ și $A_1D_1 = B_1C_1$, deci $D_2M = C_2N$ și $A_2M = B_2N$ rezultă că D_2MNC_2 și A_2MNB_2 sînt paralelograme și apoi rezultă că $A_2B_2C_2D_2$ este tot un paralelogram.

5.2. Se dau două drepte D, D_1 nesituate în același plan. Să se afle locul geometric al punctelor care împart într-un raport dat segmentul de dreaptă care unește un punct oarecare M al dreptei D cu un punct oarecare M_1 al dreptei D_1.

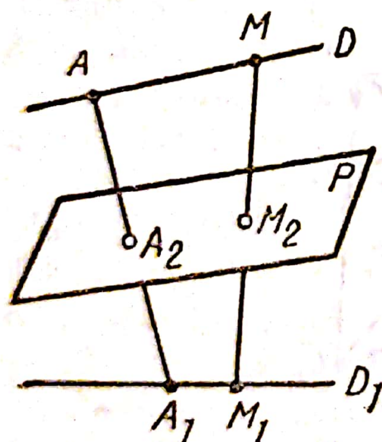


Fig. 5.2

Soluție. Fie segmentul AA_1 unde $A \in D$ și $A_1 \in D_1$ iar M_2 și A_2 punctele care împart segmentele AM_1 și respectiv AA_1 într-un raport dat. Punctele A_2 și M_2 se află într-un plan P paralel cu cele două drepte D și D_1. Reciproc, prin orice punct M_2 al planului P putem duce o dreaptă care să intersecteze atît dreapta D cît și dreapta D_1.

5.3. Să se arate că o dreaptă egal înclinată pe cele două fețe ale unui diedru intersectează aceste fețe în două puncte egal depărtate de muchia diedrului și invers.

Soluție. Fie A și B punctele situate respectiv pe fețele P și Q ale diedrului, AC și BD perpendicularele

duse respectiv pe fețele Q și P, iar AE și BF perpendicularele duse pe muchia diedrului. Conform teoremei celor trei perpendiculare avem CE și DF perpendiculare pe muchia diedrului. $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BFD$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$, deci triunghiurile dreptunghice ABC și BAD sînt egale.

Prin urmare, $AC = BD$. Triunghiurile ACE și BDF sînt, de asemenea, egale, deci $AE = BF$.

Reciproc, dacă $AE = BF$, triunghiurile ACE și BDE sînt egale, deci $AC = BD$. De asemenea, și triunghiurile ABC și BAD care au ipotenuza comună și cîte o catetă egală, fiind egale rezultă $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$.

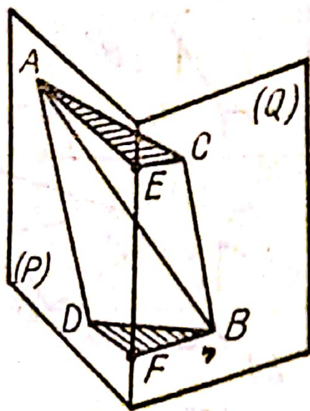


Fig. 5.3

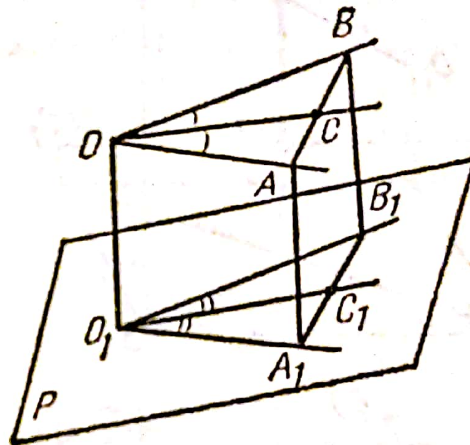


Fig. 5.4

5.4. Fie un unghi AOB unde $OA = OB$ și bisectoarea sa OC. Să se arate că proiecția unghiului AOB pe un plan paralel cu OC are bisectoarea O_1C_1 paralelă cu OC, unde O_1 și C_1 sînt proiecțiile pe plan ale punctelor O și C.

Soluție. Fie A_1 și B_1 proiecțiile lui A și B pe planul P paralel cu OC. Triunghiul AOB fiind isoscel rezultă că $\sphericalangle OCA = \sphericalangle OCB = 90°$, $AC = CB$ și $\sphericalangle OCA$ are latura OC paralelă cu planul P deci și $\sphericalangle O_1C_1A_1$ este tot unghi drept.

Deoarece $AC = CB$ rezultă $A_1C_1 = C_1B_1$, deoarece AA_1, CC_1 și BB_1 sînt paralele. Triunghiurile dreptunghice $O_1C_1A_1$ și $O_1C_1B_1$ sînt egale și deci O_1C_1 este bisectoarea unghiului $A_1O_1B_1$.

5.5. Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 4$ m și $BC = 2$ m. Pe planul dreptunghiului se ridică perpendicularele: $AA_1 = 3$ m, $BB_1 = 8$ m, $CC_1 = 1$ m și $DD_1 = 2$ m. Notăm cu M și N mijloacele segmentelor A_1C_1 și respectiv B_1D_1.

a). Să se calculeze lungimea segmentului MN.

b). Să se găsească locul geometric al mijloacelor segmentelor EF formate unind orice punct E de pe segmentul AA_1 cu orice punct F de pe segmentul BC.

(G.M.B., 14107, Concurs elevi, 1974, *C. Ionescu-Țiu*).

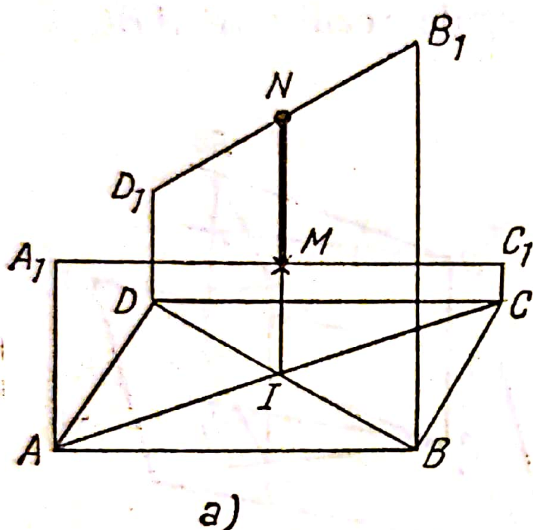


Fig. 5.5 a

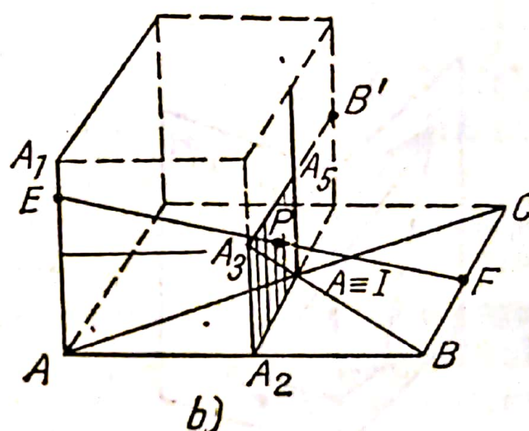


Fig. 5.5 b

Soluție. a).

$$MN = IN - IM = \frac{DD_1 + BB_1}{2} - \frac{AA_1 + CC_1}{2} =$$

$$= \frac{2+8}{2} - \frac{3+1}{2} = 5 - 2 = 3 \text{ m}.$$

b). Avem $AA' \parallel BC$; $BB' \parallel AA_1$; $pl(AA'A_1) \parallel pl(BB'C)$ iar $AB \perp$ pl $BB'F$. Deoarece $EP = PF$, punctul P se află în planul mediator al segmentului AB.

Delimitarea locului geometric. Dacă $F \equiv B$ iar $E \in AA_1$ atunci P descrie segmentul

$$A_2A_3 = \frac{AA_1}{2} = 1,5 \text{ m}.$$

Dacă $F \equiv C$ și $E \in AA_1 \Rightarrow P$ descrie segmentul $A_4A_5 = 1{,}5$ m.

Dacă $E \equiv A$ și $F \in BC \Rightarrow P$ descrie segmentul $A_2A_4 = 1$ m.

Reciproc. Orice punct P din interiorul dreptunghiului $A_2A_3A_4A_5$ unit cu un punct $E \in AA_1$ intersectează pe BF și invers.

Dreptunghiul $A_2A_3A_4A_5$ are dimensiunile $A_2A_4 = A_3A_5 = \frac{BC}{2} = 1{,}5$ m; iar $A_2A_3 = A_4A_5 = \frac{AA_1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ m.

5.6. Se dă un plan π și o dreaptă Ox care face cu planul π un unghi de 30°, iar $O \in \pi$. Un punct A situat de aceeași parte a planului cu Ox se proiectează pe planul π în punctul B iar pe Ox se ia un punct C. Se dă $OA = 17$, $OB = 8$ și $OC = 12$. Notăm cu D proiecția lui C pe planul și cu M mijlocul lui OP.

a). Să se calculeze distanța BC.

b). Să se arate că AM și OD sînt perpendiculare.

Soluție. a). Avem:

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{289 - 64} = 15;$$

$$CD = \frac{OC}{2} = 6; \quad AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} =$$

$$= \sqrt{289 - 144} = \sqrt{145}; \quad BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} =$$

$$= \sqrt{64 + 36} = 10.$$

b). Avem $OB = BD$; $AB \perp \pi$; $BM \perp OD$, deci $AM \perp OD$, conform teoremei celor trei perpendiculare.

5.7. Se consideră dreptele d_1 și d_2 în spațiu și o dreaptă d mobilă care se reazemă pe d_1 și d_2 în punctele A, B. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului AB.

Soluție. Perpendiculara comună dreptelor d_1, d_2 întîlnește dreptele în O_1 și O_2. Fie O mijlocul lui O_1O_2 și P mijlocul lui AB. Notăm cu C și D mijloacele segmentelor OA_2 și BO_1. Figura $OCPD$ este un paralelogram aflat în planul mediator al segmentului O_1O_2.

Dacă A este fix și B mobil pe d_2, punctul P descrie o dreaptă paralelă cu d_2 aflată în planul mediator al segmentului O_1O_2. Analog dacă B este fix.

Reciproc: Fie P un punct din planul mediator segmentului O_1O_2. Prin P se pot duce drepte care să se rezeme pe d_1 și d_2 ($PA = PB$ o singură dreaptă).

5.8. Se dau în spațiu dreptele d_1 și d_2 și planele α și β. Să se ducă o dreaptă care să se sprijine pe d_1 și d_2, să fie paralelă cu planul α și să facă un unghi x cu planul β.

Soluție. Fie $d = \alpha \cap \beta$ și $A \in \alpha$, $AB \perp \beta$, unde $B \in \beta$. Ducem arcul capabil de unghiul x față de segmentul AB care rotit în jurul lui AB dă o suprafață care se intersectează cu d în C; $\sphericalangle BCA = x$, $AC \in \alpha$ (se obțin în general două puncte C_1 și C_2 pe d, un punct C sau nici unul).

Ducem $FG \parallel AC$, unde $F \in d_2$ și $G \in d_1$.

Dacă $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 0 < x$ nu avem soluție.

5.9. Fie un tetraedru $ABCD$ în care cunoaștem muchiile sale $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a_1$, $DB = b_1$, $DC = c_1$. Să se construiască înălțimea DH a tetraedrului.

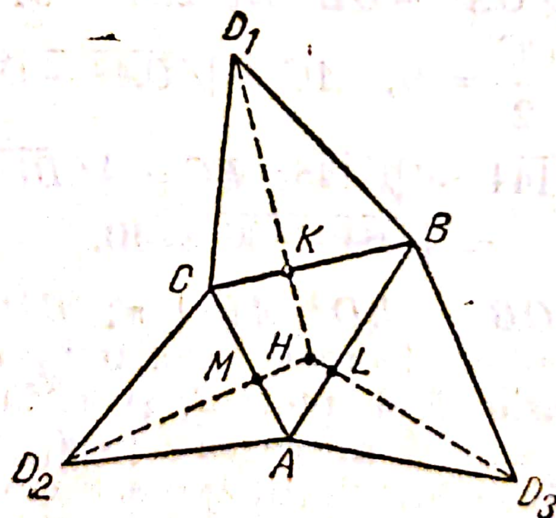


Fig. 5.9

Soluție. Desfășurăm fețele laterale pe planul bazei ABC în jurul lățimilor de la bază obținînd triunghiurile BCD_1, CAD_2 și ABD_3. Înălțimile acestor triunghiuri duse din D_1, D_2, D_3 pe laturile opuse sînt concu-

rente în punctul H care este și proiecția vîrfului D pe planul ABC. Astfel avem: $DH^2 = D_1K^2 - KH^2 = D_2M^2 - MH^2 = D_3L^2 - LH^2$ unde $D_1K \perp BC$, $D_2M \perp AC$ și $D_3L \perp AB$. Construcția înălțimii DH a tetraedrului este evidentă.

5.10. În planul unui triunghi oarecare ABC de laturi $BC = a$, $AC = b$, și $AB = c$ se construiesc în afara triunghiului dat, triunghiurile BCD, ACE, ABF, astfel că $AE = FA = a$, $BD = FB = b$ și $DC = CE = c$.

a). Să se arate că perpendicularele duse din D, E și F respectiv pe BC, AC și AB sînt concurente într-un punct G.

b). În punctul G se duce perpendiculara GI pe planul ABC. Să se arate că: $(IE_1 + GE_1)(IE_1 - GE_1) = (ID_1 + GD_1)(ID_1 - GD_1) = (IF_1 + GF_1)(IF_1 - GF_1)$,
unde D_1, E_1, F_1 sînt picioarele perpendicularelor duse din D, E și F respectiv pe BC, AC și AB.

(G.M., 14235, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Facem construcția și deducem că A, B, C sînt mijloacele segmentelor EF, DF și DE. Perpendicularele duse din D, E și F respectiv pe BC, AC și AB sînt înălțimile în triunghiul DEF deci concurente într-un punct G.

b). Deoarece GI este catetă comună triunghiurilor dreptunghice IGE_1, IGD_1 și IGF_1 rezultă:

$$IG^2 = IE_1^2 - E_1G^2 = ID_1^2 - D_1G^2 = IF_1^2 - F_1G^2$$

de unde obținem relația din enunț.

5.11. Se dă un unghi diedru și pe una din fețele lui un punct A. Să se găsească cel mai scurt drum pe suprafața unghiului triedru care să treacă prin A și să intersecteze toate muchiile.

Soluție. Fie $OMNP$ triedrul dat și A un punct pe fața OMN. Desfășurăm triedrul astfel: luăm un punct O' și semidreapta $O'A'$ pe care luăm $O'A_a = OA$. Luăm apoi $\sphericalangle A'O'N' = \sphericalangle AON$, $\sphericalangle N'O'P' = \sphericalangle NOP$, $\sphericalangle P'O'M' = \sphericalangle POM$, $\sphericalangle M'O'A' = \sphericalangle MOA$.

Observăm că la triedru OA' și OA'_1 coincid.

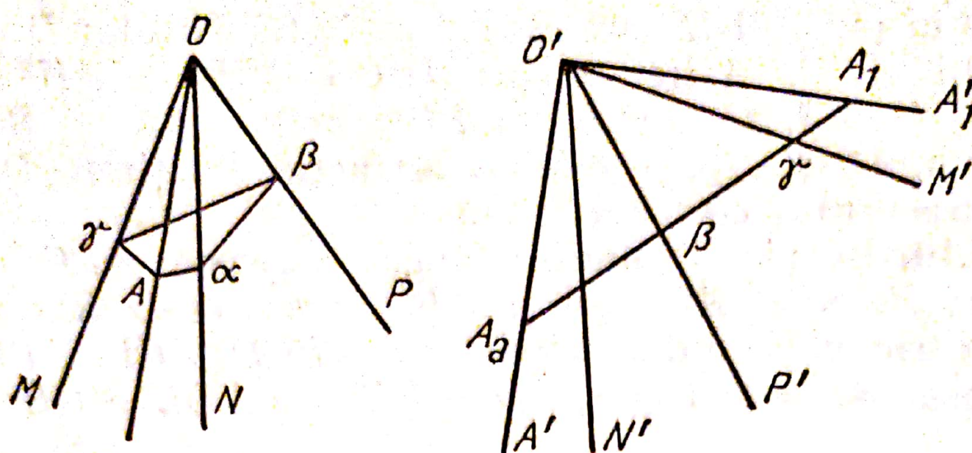


Fig. 5.11

Pe OA_1 luăm $O'A_1 = OA$ (A_1 și A_a vor coincide la triedru).

După cum se observă ușor, problema se reduce la a găsi cel mai scurt drum între A α și A_1. Aceasta este dreapta A_aA_1 care taie pe $O'N'$, $O'P'$, $O'M'$ în α, β, γ.

Pentru a construi drumul pe triedru este suficient să așezăm segmentul $O'\alpha$ pe ON, $O'\beta$ pe OB și $O'y$ pe OM; obținem astfel cele trei puncte de pe muchiile triedrului pe care le vom uni prin drepte între ele și cu punctul A.

5.12. Fie trei drepte paralele nesituate în același plan. Pe una din ele luăm un segment AB de lungime dată iar pe celelalte două, respectiv punctele arbitrare C, D. Să se arate că volumul tetraedrului $ABCD$ nu depinde de poziția punctelor A, C, D și nici de alegerea paralelei pe care luăm punctele A și B, cu condiția ca lungimea AB să fie constantă.

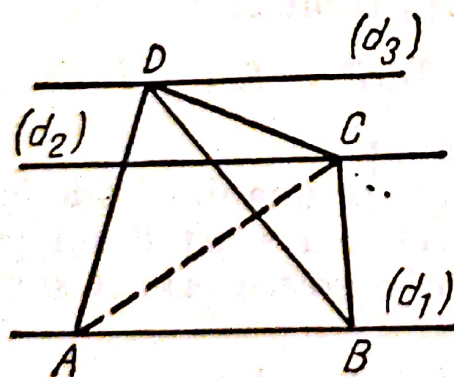


Fig. 5.12

Soluție. Dacă deplasăm segmentul AC pe aceeași dreaptă fără a modifica lungimea acestui segment și vîrfurile C și D pe celelalte paralele nu se schimbă nici aria ABC și nici lungimea înălțimii dusă din vîrful D, deci volumul $ABCD$ nu se schimbă.

De asemenea, volumul nu se schimbă dacă segmentul $AB = a$ este luat pe dreapta unde se afla inițial vîrful C, iar vîrful C îl vom lua pe dreapta pe care inițial era situată muchia AB. Analog, volumul nu se schimbă dacă AB este luată pe dreapta pe care inițial se afla vîrful D, iar vîrful D pe dreapta pe care inițial se afla AB, deoarece în acest caz, aria ABD rămîne constantă și de asemenea înălțimea tetraedrului dusă din vîrful C rămîne constantă.

5.13. Se dau în spațiu punctele A, B, C, D nesituate în același plan. Prin A și B se duc paralele (d) și (d'). Fie M proiecția lui C pe (d) și N proiecția lui D pe (d'). Să se afle locul geometric al punctului P, mijlocul segmentului MN cînd direcțiile dreptelor (d) și (d') se mișcă rămînînd paralele între ele.

Soluție. Fie O și Q mijloacele segmentelor AB și CD. Avem $OP \perp DQ$ deci P este pe o sferă cu diametrul OQ cînd direcția paralelelor d, d' variază.

Reciproc, P' fiind pe sfera de diametru OQ avem $OP' \perp P'Q$. Prin A putem duce o paralelă la OP', idem din B. Nu putem avea $\sphericalangle OP'Q \neq 90°$, deci și reciproca este adevărată.

5.14. Fie un cub cu latura 1. Să se arate că oricum am alege 28 de puncte interioare, cel puțin două dintre ele au distanța mai mică sau egală cu $\sqrt{3}/3$.

Soluție. Să împărțim fiecare muchie a cubului în cîte 3 părți egale și ducînd prin ele paralele la muchii obținem pe fiecare față a cubului cîte 9 pătrate egale. Ducînd plane paralele cu fețele cubului prin punctele de diviziune, cubul este astfel împărțit în 27 cubulețe cu latura $1/3$ fiecare. Vom demonstra propoziția din enunț prin reducere la absurd. Dacă oricare ar fi două din cele 28 puncte cu distanța între ele mai mare sau egală cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$, nu se pot găsi două puncte în interiorul unui cubuleț căci atunci distanța dintre ele ar fi mai mare decît diagonala cubulețului care este $\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}$ (deoarece $d^2 = 3a^2$, a fiind latura unui cub, iar d diago-

nala). Fiecare din cele 28 puncte s-ar găsi în alt cubuleț și deoarece avem 27 cubulețe cu 28 de puncte acest fapt este imposibil, deci presupunerea făcută este falsă.

Observație. Din cele 27 cubulețe numai unul nu are nici un punct comun cu fețele cubului de latură 1, adică din centrul cubului dat. Distanța dintre cele două puncte în cazul absurd considerat poate fi $\frac{\sqrt{3}}{3}$ numai dacă aceste două puncte sînt două vîrfuri opuse ale cubulețului din mijloc, distanța între aceste două puncte egală cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$ dar nu mai mare decît $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.15. Să se ducă printr-un punct A din spațiu o dreaptă D care să formeze cu trei drepte date oarecare D_1, D_2, D_3 unghiuri egale.

Soluție. Ducem prin A semidreptele Ax, Ay, Az paralele cu D_1, D_2, D_3. Luăm pe aceste semidrepte punctele M, N, P, astfel ca $AM = AN = AP$. Perpendiculara din A pe planul MNP este egal înclinată față de Ax, Ay, Az și deci față de dreptele D_1, D_2, D_3. Considerînd pentru semidrepte alte sensuri (de exemplu Ax, Ay, Az') se constată că locul geometric este format din 4 drepte.

Observație: Dacă dreptele sînt coplanare avem o singură soluție, anume perpendiculara din A pe planul lor.

5.16. Se dau trei plane paralele α, β, γ și punctele A, B în planul α și C, D în planul β. Dreptele AC, BC, BD, AD întîlnesc planul γ în punctele E, F, G, H. Să se arate că figura $EFGH$ este un paralelogram. În ce cazuri devine romb, dreptunghi, pătrat?

Soluție. Planele ABC și ABD tăiate de planele paralele α, γ ne dau $EF \parallel AB$; $GH \parallel AB$, deci $EF \parallel GH$.

Planele CDA și CDB tăiate de β, γ ne dau: $EH \parallel$ $\parallel CD \parallel FG$.

Figura $EFGH$ este paralelogram.

a). Pentru a fi dreptunghi este suficient ca unghiurile să fie drepte, deci AB și CD să fie perpendiculare.

b). Condiția ca să fie romb. Fie k raportul distanțelor de la planul γ la α și β. Din asemănări de triunghiuri

$$EF = \frac{CF \cdot AB}{CB} \quad \text{și} \quad FG = \frac{BF \cdot CD}{BC} \quad \text{pentru } EF = FG$$

rezultă

$$\frac{AB}{CD} = \frac{FB}{FC} = k.$$

5.17. Fie tetraedrul $ABCD$. Planul bisector al diedrului de muchie AD taie muchia BC în punctul E. Să se arate că:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{\text{aria } ABD}{\text{aria } ACD}.$$

Soluție. Considerăm ca bază ABD și ACD respectiv ale tetraedrelor $ABDE$ și $ACDE$. Punctul E este egal depărtat de planele acestor două baze, rezultă că:

$$\frac{\text{vol. } ABDE}{\text{vol. } ACDE} = \frac{\text{aria } ABD}{\text{aria } ACD}. \quad (1)$$

Dacă luăm fața ADE ca bază comună a tetraedrelor $ABDE$ și $ACDE$ raportul volumelor va fi:

$$\frac{\text{vol. } ABDE}{\text{vol. } ACDE} = \frac{EB}{EC}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă relația cerută.

5.18. Un trapez $A_1A_2A_3A_4$ are $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = 2$ dm, iar $A_1A_4 = 4$ dm. Pe planul trapezului se ridică perpendicularele $A_1B_1 = 3$ dm, $A_2B_2 = 9$ dm, $A_3B_3 = 5$ dm și $A_4B_4 = 1$ dm. O dreaptă (d) perpendiculară pe plan întîlnește pe B_1B_3 în M și pe B_2B_4 în N. Să se afle lungimea segmentului MN.

(G.M.B., 14119, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Avem $A_1A_3 = A_2A_4 = 2\sqrt{3}$; $B_1B_3 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$.

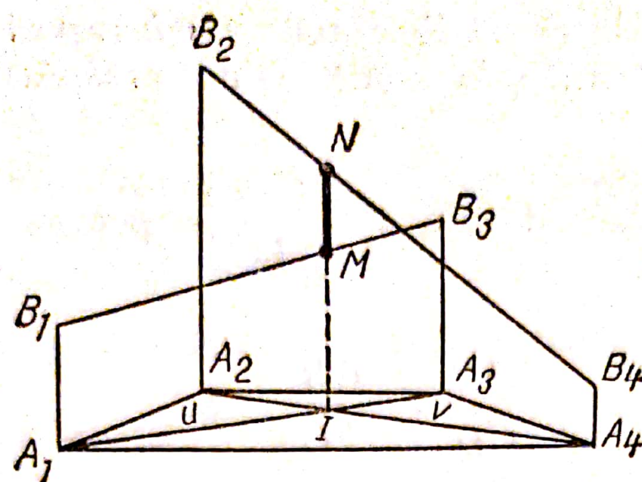


Fig. 5.18

Fie $B_1M = x$; $MB_3 = y$; $x + y = 4$. Notăm cu I intersecția diagonalelor trapezului. Apoi $A_1I = u$, $IA_2 = v$; $\frac{u}{4} = \frac{v}{2}$; $u = 2v$.

$$\frac{x}{} = \frac{y}{c}; \quad x = 2y; \quad x = 2 \cdot \frac{4}{3}; \quad y = \frac{4}{3};$$

$A_3B_3 - A_1B_1 = 5 - 3 = 2$; $A_2B_2 - A_4B_4 = 9 - 1 = 8$;

$$IM = 3 + 2 \cdot \frac{2}{3} = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3};$$

$$IN = 1 + \frac{2}{3} \cdot 8 = 1 + \frac{16}{3} = \frac{19}{3}.$$

$$MN = \frac{19}{3} - \frac{13}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ dm}.$$

5.19. Dintr-un punct A exterior unui plan se duc: perpendiculara AO și oblicele AC, AC față de acest plan. Fie H și H_1 respectiv ortocentrele triunghiurilor ABC și OBC, AE și BE înălțimi în triunghiul ABC, iar BE_1 înălțime în triunghiul OBC. Să se arate că dreapta HH_1 este perpendiculară pe planul ABC.

(G.M.B., 9490, 1969).

Soluție. Avem $BC \perp AD$ și cum AO este perpendiculară pe planul OBC rezultă că $OD \perp BC$. Deci, BC este perpendiculară pe planul ADO și cum BC aparține planului ABC rezultă că planele ADO și ABC sînt perpendiculare. Dreapta AO fiind perpendiculară pe planul OBC este perpendiculară și pe BE_1. Deci $BE_1 \perp AO$ și $BE_1 \perp OC$ de unde rezultă că BE_1 este perpendiculară pe planul OAC și cum $BE \perp AC$ rezultă că $E_1E \perp AC$. Avem deci AC este perpendiculară pe planul BEE_1. Deoarece AC aparține planului ABC rezultă că planele BEE_1 și ABC sînt perpendiculare. Cum $H \in AD$, $H_1 \in OD$ rezultă că $HH_1 \in$ planului ADO. De asemenea, $H \in BE$ și $H_1 \in BE_1$, deci $HH_1 \in$ planului BEE_1. Rezultă că HH_1 este intersecția celor două plane care sînt ambele perpendiculare pe planul ABC deci H_1H este perpendiculară pe planul ABC.

5.20. Se dau patru puncte A, B, C și D. Să se afle locul geometric al punctelor M din spațiu pentru care produsele scalare $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MD}$ sînt egale.

(G.M.B., 9898, 1969).

Soluție. Folosind teorema cosinusului putem scrie:

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM \cdot MB \cdot \cos \sphericalangle AMB$$

$$CD^2 = MC^2 + MD^2 - 2MC \cdot MD \cdot \cos \sphericalangle CMD.$$

Ținînd cont că $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, adică $AM \cdot MB \cdot \cos \sphericalangle AMB = MC \cdot MD \cdot \cos \sphericalangle CMD$, scăzînd cele două egalități de mai sus, obținem:

$$AB^2 - CD^2 = AM^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2. \quad (1)$$

Folosind teorema medianei putem scrie:

$$MP^2 = \frac{AM^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$$

$$MQ^2 = \frac{MC^2 + MD^2}{2} - \frac{CD^2}{4};$$

unde P este mijlocul segmentului AB iar Q este mijlocul segmentului CD.

Scăzînd ultimele două egalități obținem:

$$AM^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 2(MP^2 - MQ^2) + \frac{AB^2 - CD^2}{2}. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) deducem:

$$MP^2 - MQ^2 = \frac{AB^2 - CD^2}{4} = \text{constant}.$$

Deci, locul geometric căutat este un plan perpendicular pe segmentul PQ.

5.21. Pe planul pătratului $ABCD$ de latură a se duce în punctul A perpendiculara $AO = a\sqrt{2}$. Proiecțiile lui A pe planele OBC și OCD le notăm respectiv cu M și N. Fie P proiecția lui M pe planul AOD și L proiecția lui A pe MN.

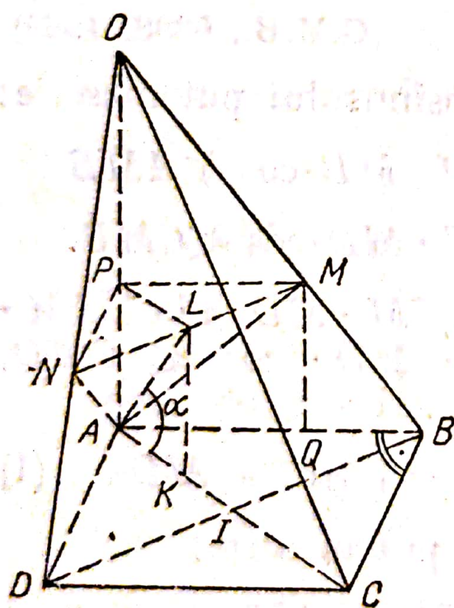


Fig. 5.21

a). Să se calculeze MP și AL.

b). Să se calculeze unghiul diedru format de planele AMN și $ABCD$.

Soluție. a). Folosim teorema celor trei perpendiculare și reciprocele ei.

Avem

$\sphericalangle OBC = 90°$, $M \in OB = 90°$,
$\sphericalangle ODC = 90°$, $N \in OD$,
$\sphericalangle AND = 90°$,
$P \in AO$, $\sphericalangle MPA = 90°$,
$AM \cdot OB = AO \cdot AB$,

unde $OB = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$, deci $AM = \dfrac{AO \cdot AB}{OB} =$

$= \dfrac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $OM^2 = AO^2 - AM^2 = 2a^2 -$

$-\frac{2a^2}{3}=\frac{4a^2}{3}$; $OM=\frac{2a}{\sqrt{3}}$; $MP^2=\frac{OM\cdot AM}{OA}=$
$=\frac{2a\cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\,a\sqrt{2}}=\frac{2a}{3}$.

Planul AOC este un plan de simetrie al figurii, deci $PN=PM=\frac{2a}{3}$ iar $MN=\frac{2a}{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{2}{3}a\sqrt{2}=$ $=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}AO$. Planele MNP și ABD sînt paralele, $PL \parallel AC$ și $PL=\frac{2}{3}AI$, unde $I=AC\cap BD$; $PL=\frac{a\sqrt{2}}{3}=AK$, unde AK este perpendiculară pe AC; $AL^2=AP^2+PL^2=\frac{4a^2}{9}$, deci $AL=\frac{2a}{3}$.

b). Fie α unghiul diedru cerut. Avem: $\operatorname{tg}\alpha=$ $=\frac{LK}{AK}=\frac{AP}{AK}=\frac{AP}{PL}=1$, deci $\alpha=45°$, sau $\cos\alpha=$ $=\frac{AK}{AL}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ deci, din nou $\alpha=45°$.

5.22. Din punctele A, B, C situate pe muchia xy a unghiului diedru drept $PxyQ$ se duc trei perpendiculare pe muchie și anume: AA' în planul P, CC' în planul Q și BB' în afara acestor plane, făcînd un unghi α cu planul P. Dacă segmentele AA', CC', AB și BC le notăm respectiv cu a, c, m și n, să se arate că, în cazul cînd dreptele BB', și $A'C'$ sînt concurente, avem relația $\operatorname{tg}\alpha=\frac{cm}{an}$.

(G.M.B., 9170, *Gh. Bazacov*).

Soluție. Notăm cu BB'' proiecția ortogonală a dreptei BB' pe planul P. Dreptele $A'C$ și BB'', situate în planul P se întîlneso în punctul K.

Dar aceste drepte sînt totodată intersecțiile cu (P) ale planelor triunghiurilor $A'CC'$ și $BB'B''$, ambele

perpendiculare pe (P). Rezultă că punctul K este atunci un punct comun planelor celor două triunghiuri și, în baza unei axiome, aceste plane mai au cel puțin încă un punct comun și deci o dreaptă comună pe care s-o notăm cu Δ.

Această dreaptă Δ este perpendiculară pe planul (P) în baza teoremei: intersecția a două plane perpendiculare pe un plan (P) este o dreaptă perpendiculară pe (P).

În cazul cînd dreptele $A'C'$, BB' sînt concurente, punctul I, intersecția lor, este atunci un punct comun planelor triunghiurilor $A'CC'$ și $BB'B''$, în consecință punctul I aparține dreptei Δ.

În acest caz, unghiul α se poate calcula din triunghiul dreptunghic BKI, unde

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KI}{KB}. \tag{1}$$

În triunghiul CAA' avem $BK \parallel AA'$ și putem scrie:

$$\frac{BK}{AA'} = \frac{BC}{AC} \quad \text{și} \quad \frac{A'K}{A'C} = \frac{AB}{AC}.$$

Ținînd seama de notațiile date, avem:

$$\frac{BK}{a} = \frac{n}{m+n} \quad \text{de unde} \quad BK = \frac{an}{m+n} \quad \text{și}$$

$$\frac{A'K}{A'C} = \frac{m}{m+n}.$$

Din asemănarea triunghiurilor $A'CC'$ și $A'KI$ se deduce că

$$\frac{KI}{CC'} = \frac{A'K}{A'C} \quad \text{sau} \quad \frac{KI}{CC'} = \frac{m}{m+n} \quad \text{sau}$$

$$KI = \frac{cm}{m+n}.$$

Introducem în (1) valorile obținute pentru KI și KB; obținem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dfrac{cm}{m+n}}{\dfrac{an}{m+n}} \quad \text{sau} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{cm}{an}.$$

5.23. Se consideră în spațiu patrulaterele strîmbe $ABCD$ și $A'B'C'D'$ astfel că:
$AB'^2 + BC'^2 + CD'^2 + DA'^2 = A'B^2 + B'C^2 + C'D^2 + D'A^2$.

Dacă planele perpendiculare din A, B, C, D, respectiv pe $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ sînt concurente, atunci și planele perpendiculare din A', B', C', D', respectiv AB, BC, CD, DA sînt de asemenea concurente.

Soluție. Fie P'_a, P'_b, P'_c, P'_d proiecțiile punctelor A, B, C, D pe $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ și P_a, P_b, P_c, P_d proiecțiile punctelor A', B', C', D' pe AB, BC, CD, DA. Avem:

$$P'_aA'^2 - P'_aB'^2 = AA'^2 - AB'^2 \text{ și analoagele,}$$

$$P_aA^2 - P_aB^2 = A'A^2 - A'B^2 \text{ și analoagele,}$$

$$P'_aA'^2 + P'_bB'^2 + P'_cC'^2 + P'_dD'^2 = P'_aB'^2 + P'_bC'^2 + P'_cD'^2 + P'_dA'^2.$$

5.24. Să se afle locul geometric al punctelor M din spațiu avînd proprietatea că proiecțiile lor pe laturile unui triunghi dat ABC se află pe o dreaptă.

Soluție. Fie M_1 proiecția lui M pe planul ABC. Proiecția lui M_1 pe BC coincide cu proiecția lui M pe aceeași dreaptă conform teoremei celor 3 perpendiculare.

La fel dacă proiectăm pe laturile AB și AC.

Proiecțiile punctului M pe laturile AB, BC, CA fiind coliniare și proiecțiile lui M_1 sînt coliniare și reciproc. Ținînd seama de *teorema lui Simson* rezultă că punctul M_1 se află pe cercul circumscris triunghiului ABC, iar locul geometric al lui M este cilindrul circular

drept care are ca bază cercul circumscris triunghiului ABC.

5.25. Să se afle locul geometric al punctelor cu proprietatea că raportul distanțelor la un punct dat și la un plan care trece prin acest punct este constant.

Soluție. Fie un plan P și un punct A din plan și M un punct al locului geometric cerut și M_1 un alt punct arbitrar al aceluiași loc. Notăm cu AO perpendiculara în A pe plan, iar cu N și N_1 proiecțiile punctelor M și M_1 pe plan.

Triunghiurile MAN și M_1AN_1 sînt asemenea.

$\sphericalangle MAN = \sphericalangle M_1AN_1 \Rightarrow \sphericalangle MAO = \sphericalangle M_1AO$ sau $\sphericalangle MAO = 180° - \sphericalangle M_1AO$ și reciproc. Rezultă că locul cerut este un con de rotație cu vîrful în A avînd ca axă dreapta AO și trecînd prin unul din punctele M.

5.26. Un acoperiș plan, înclinat față de planul orizontal are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$ cu laturile paralele AB și CD, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 90°$. Acoperișul este susținut de stîlpii verticali $AA_1 = 8$ m, $BB_1 < 10$ m, $CC_1 = 12$ m și DD_1 astfel încît patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este un trapez cu $A_1B_1 = 6$ m.

$B_1C_1 = 10$ m, $\sphericalangle A_1B_1C_1 = 120°$ și $\sphericalangle A_1D_1C_1 = 45°$.

a). Să se calculeze înălțimea stîlpului BB_1.

b). Să se calculeze înălțimea stîlpului DD_1.

(G.M.B., 13100, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Notăm $BB_1 = x$ și $DD_1 = y$. Prin A ducem paralela AA_2 la A_1B_1, $A_2 \in BB_1$; $BA_2 = |x - 8|$. Paralela din C la C_1B_1 întîlnește pe BB_1 într-un punct C_2 astfel că $BC_2 = |12 - x|$; $AC^2 = A_1C_1^2 + (12-8)^2 = A_1C_1^2 + 16 = AB^2 + BC^2 = (x-8)^2 + 6^2 + (12-x)^2 + 10^2 = 2x^2 - 40x + 344$, dar $A_1C_1^2 = 36 + 100 + 2 \cdot 6 \cdot 10 \cos 60° = 136 + 60 = 196$; $A_1C_1^2 + 16 = 212$, deci $2x^2 - 40x + 132 = 0$; $x^2 - 20x + 66 = 0$, $x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{34}$, reținem $x_1 = 10 - \sqrt{34} = 4{,}17$ m.

b). Să calculăm mai întîi pe D_1C_1. Ducem din A_1 și B_1 perpendicularele A_1M și B_1N, respectiv pe D_1C_1. Avem $A_1M = B_1N = 10 \sin 60° = 5\sqrt{3} = D_1M$.

$$D_1C_1 = D_1M = MN = NC_1 = 5\sqrt{3} + 6 +$$
$$+ 10 \cos 60° = 11 + 5\sqrt{3}.$$

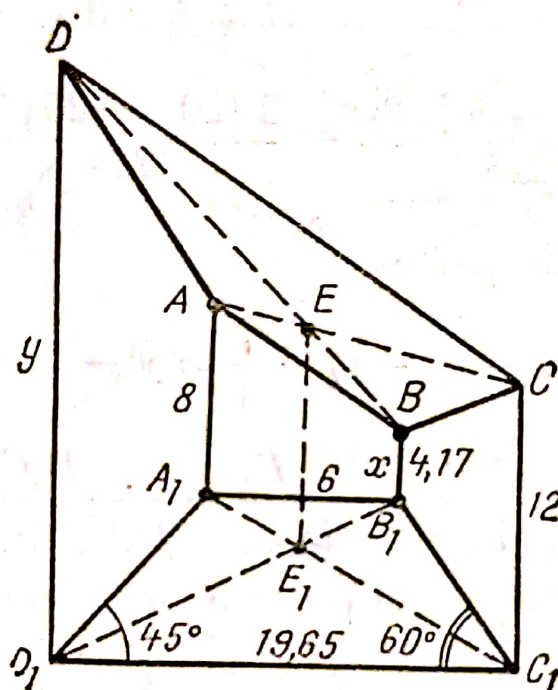


Fig. 5.26

Notăm $E = AC \cap BD$ și $E_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$, punctul E se proiectează pe planul orizontal în E_1.

Calculăm lungimea EE_1 în două moduri și apoi egalînd expresiile rezultă lungimea $DD_1 = y$.

Dacă ducem paralele la planul orizontal se formează triunghiuri asemenea din care deducem pe EE_1.

Considerînd planul vertical AA_1C_1C și paralela din A și E la A_1C_1 avem:

$$EE_1 = AA_1 + (CC_1 - AA_1)\frac{AE}{AC} = 8 + 4\frac{AE}{AC}.$$

Dar,

$$\frac{AE}{AC} = \frac{A_1E_1}{A_1C_1} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1 + A_1B_1} = \frac{6}{11 + 5\sqrt{3} + 6} =$$

$$= \frac{6}{17 + 5\sqrt{3}}$$

$$EE_1 = 8 + \frac{6}{17 + 5\sqrt{3}} =$$

$$= 8 + \frac{24(17 - 5\sqrt{3})}{214} = \frac{2\,120 - 120\sqrt{3}}{214} \approx 8{,}93 \text{ m}.$$

Pe de altă parte

$$EE_1 = y - (y - x)\frac{DE}{DB} = y - (y - 10 +$$

$$+ \sqrt{34})\frac{D_1E_1}{D_1'B_1'} = \frac{D_1E_1}{D_1B_1} = \frac{D_1C_1}{D_1C_1 + A_1B_1} =$$

$$= \frac{11 + 5\sqrt{3}}{17 + 5\sqrt{3}}.$$

$$EE_1 = 8{,}93 = y - (y - 4{,}17)\frac{11 + 5\sqrt{3}}{17 + 5\sqrt{3}} =$$

$$= y - (y - 4{,}17)\frac{19{,}65}{25{,}65} = \frac{6y}{25{,}65} + 3{,}19 \text{ sau } y = 24{,}53 \text{ m}.$$

5.27. Se dă în spațiu un patrulater strîmb $ABCD$ și se duc segmentele: DD' egal și paralel cu CB, în sensul CB, BB' egal și paralel cu AD în sensul AD. Să se demonstreze că dreapta care unește picioarele medianelor care pleacă din B și D în triunghiurile $BB'C$ și $DD'A$, împreună cu diagonala BD determină un plan.

(G.M., 15340, *Gh. D. Simionescu*).

Soluție. Fie M, N respectiv picioarele medianelor din B și C în triunghiurile $BB'C$, $DD'A$. Se observă că $BB'DA$ este paralelogram ($BB' \parallel AD$ și $BB' = AD$) din diagonalele BD și AB' se taie în O, mijlocul lui BD. În mod asemănător, $DD'BC$ este paralelogram, deci CD' trece prin O. Rezultă că AB' și CD' se întîlnesc în O și se taie în părți egale, adică $AD'B'C$ este paralelogram. MN unește mijloacele a două laturi

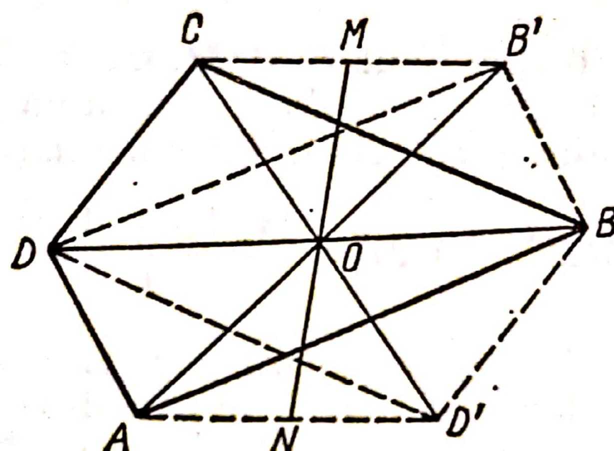


Fig. 5.27

opuse în aceste paralelograme, deci trece prin centrul său O, cu alte cuvinte MN întîlnește pe BD în O, deci ele determină un plan. Se mai deduce că $BM \parallel DN$ fiind laturile unui paralelogram.

5.28. Se dau șase puncte în spațiu A_1, A_2, A_3, ... A_6. Să se afle locul geometric al punctelor M care satisfac relațiile:

$$MA_1^2 + MA_2^2 = MA_3^2 + MA_4^2 = MA_5^2 + MA_6^2.$$

Caz particular: $A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6$.

(G.M.B., 5042, *Gh. D. Simionescu*).

Soluție. Fie M_1, M_2, M_3 mijloacele segmentelor A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6.

Avem:

$$MA_1^2 + MA_2^2 = 2MM_1^2 + \frac{A_1A_2^2}{2}.$$

Din enunț rezultă:

$$MM_1^2 - MM_2^2 = \frac{A_3A_4^2 - A_1A_2^2}{4} = \text{const.} \qquad (1)$$

Locul este un plan perpendicular pe M_1M_2 pentru punctele care satisfac relația. Însă avem:

$$MM_2^2 - MM_3^2 = \frac{A_5A_6^2 - A_3A_4^2}{4} = \text{const.} \qquad (2)$$

deci alt plan perpendicular pe M_2M_3.

Cele două plane se taie după o dreaptă (Δ) perpendiculară planului $(M_1M_2M_3)$. Ultima relație

$$MM_3^2 - MM_1^2 = \frac{A_1A_2^2 - A_5A_6^2}{4} \qquad (3)$$

ne spune că M se află într-un plan perpendicular pe M_3M_1. Acest plan însă trece prin (Δ), deoarece (3) este verificată de punctele de pe (Δ), ea deducîndu-se prin adunarea relațiilor (1) și (2).

În cazul particular cînd $A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6$ cele trei plane sînt planele mediatoare ale laturilor triunghiului $M_1M_2M_3$ și locul este perpendiculara pe planul $M_1M_2M_3$ dusă prin centrul cercului circumscris.

5.29. Un punct mobil M din spațiu se rotește în jurul dreptei (D) într-un plan perpendicular pe (D), descriind un cerc de rază r și de centru $O \in (D)$. Să se determine pozițiile punctului M astfel încît distanța dintre (D) și dreapta AM (A fiind un punct fix din spațiu) să fie maximă.

Discuție (prin definiție distanța dintre două drepte în spațiu este lungimea segmentului de pe perpendiculara comună cu extremitățile pe cele două drepte).

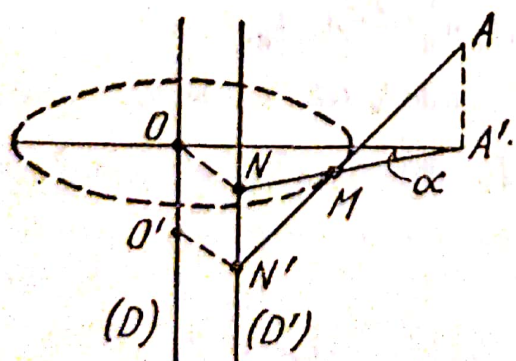


Fig. 5.29

Soluție. Vom distinge trei poziții diferite ale punctului A: 1°. proiecția

lui A pe planul cercului A', exterior acestui cerc; 2°. interior cercului și 3°. pe cerc.

Cazul 1°. Fie N proiecția lui O pe dreapta $A'M$. Deci $ONA'M$ și fiind în planul cercului, $ON \perp (D)$ și $ON \perp AA'$. Urmează că ON este perpendiculară pe orice dreaptă din planul format de $(AA', A'M)$ și deci și pe AM. Prin urmare, perpendiculara comună între (D) și AM este ON. Dacă în N ridicăm perpendiculara pe planul cercului, (D') fiind paralelă cu AA', va fi conținută în același plan cu AM și deci se întîlnesc într-un punct N'. Paralela prin N' la ON taie pe (D) în O'. Avem $O'N' = ON$ și perpendiculara comună, care se sprijină pe cele două drepte (D) și AM, este $O'N'$. Mărimea ei este $O'N' = ON = OA' \sin \alpha$, unde $\alpha = \sphericalangle OA'N$.

Ca $O'N'$ să fie maximă, trebuie ca $\sin \alpha$ să fie maxim, și fiind ascuțit trebuie ca α să fie maxim. Dar acest unghi este maxim, cînd $A'M$ este tangentă cercului. Atunci N coincide cu M și maximumul va fi raza cercului r. În acest caz avem două poziții pentru M și anume punctele de tangență ale tangentelor duse din A'.

2°. În acest caz, $ON = OA' \sin \alpha$ și maximumul are loc pentru $\alpha = 90°$ adică $A'M \perp OA'$ și deci punctele căutate sînt la intersecția cercului, cu perpendiculara dusă prin A' (în planul cercului) pe OA'. Maximumul este OA'.

3°. În acest caz, $ON = OA' \sin \alpha$ este maxim cînd $\alpha = 90°$, maximumul fiind raza cercului $OA' = r$, iar poziția lui M se obține la intersecția perpendicularei în A' pe OA' în planul cercului, adică tocmai punctul A' (căci această perpendiculară va fi tangentă la cerc).

5.30. Se consideră perpendiculara în A pe planul rombului $ABCD$ și M un punct oarecare pe această perpendiculară. Fie E, F, G, H mijloacele segmentelor MB, BC, CD, MD.

a). Să se arate că perpendiculara în M pe planul MBD întîlnește perpendiculara în C dusă pe planul rombului.

b). Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a diagonalelor patrulaterului $EFGH$, cînd M este mobil.

(G.M., 12287, Concurs elevi, 1972).

Soluție. a). Fie K un punct pe dreapta perpendiculară în M pe planul MBD iar P un punct pe dreapta perpendiculară în C pe planul $ABCD$. Avem $KM \perp P_{MBD}$, $MO \perp BD$ și conform teoremei celor trei perpendiculare avem $KO \perp BD$ deci $KB = KD$ și totodată $MB = MD$ și deci MK se află în planul mediator MAC al segmen-

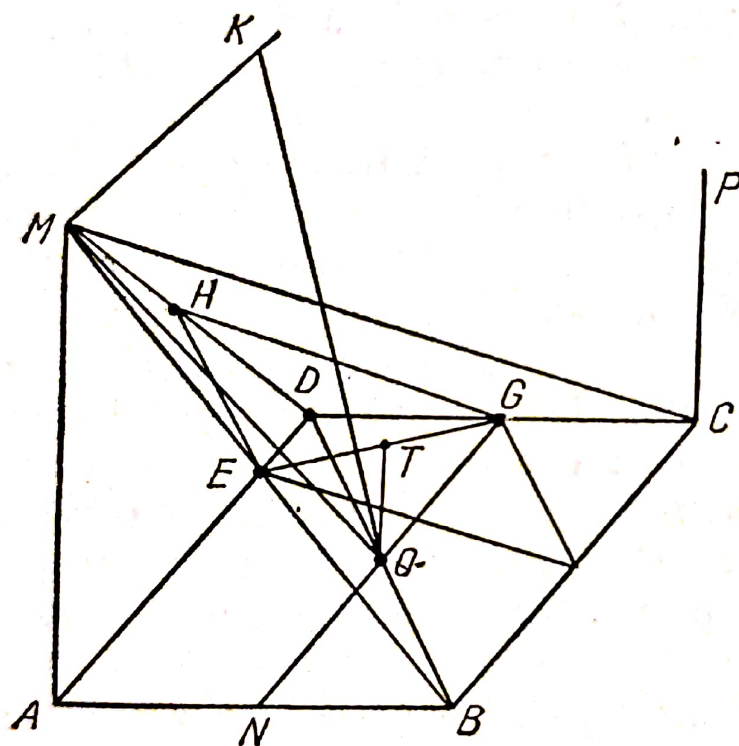


Fig. 5.30

tului BD. $\triangle PCB = \triangle PCD \Rightarrow PB = PD$, deci CP se află în planul mediator MAC al segmentului BD. Aflîndu-se în același plan MAC și nefiind paralele, dreptele MK și CP au un punct comun.

b). Patrulaterul $EFGH$ este paralelogram deoarece $EH \parallel BD \parallel GF$ și $EH = GF = \dfrac{BD}{2}$. Fie T intersecția diagonalelor și fie $NE \perp AB$. Evident, $AN = NB$ deoarece $ME = EB$. Deoarece $AN = NB$ și $DG =$

$= GC$ rezultă că $NG \parallel BC \parallel AD$ şi deci NG trece prin centrul O. În $\triangle GEN$ avem $GT = TE$ şi $GO = ON$, deci TO este linie mijlocie $TN \parallel EN$ dar $EN \perp P_{ABCD}$ deci şi $TO \perp P_{ABCD}$, adică locul lui T este dreapta perpendiculară în O pe planul $ABCD$.

5.31. Se dă un dreptunghi $ABCD$. De aceeaşi parte a planului $ABCD$ se duc perpendicularele AA', BB', CC', DD' pe planul $ABCD$ astfel ca $AA' = BB' = CC' = DD' = AI$, unde I este piciorul perpendicularei dusă din A pe BD. Să se arate că orice punct al segmentului $B'C$ este egal depărtat de dreptele BD şi $A'C'$.

(G.M.B., 10402, Concurs elevi)

Soluţia I. Fie EF o paralelă oarecare în planul dreptunghiului $BB'C'C$ dusă la BB'. Din E ducem $EH \perp A'C'$ şi $EG' \perp D'B'$. Din F ducem $FG \perp BD$. Rezultă că $EG' = FG$. Oricare ar fi punctul E pe $B'C'$ avem $EG' + EH = AI = AA'$, care se justifică fiindcă triunghiul $O'B'C'$ este isoscel $O'B' = O'C'$ şi E este un punct pe baza sa. $AI = AA'$ şi deci $EG' + EH = FG + EH = AA'$. Fie $N = EF \cap B'C$.

Triunghiurile $B'EG'$ şi $HC'E$ sînt egale deoarece $\sphericalangle G'B'E = \sphericalangle EC'H$ şi $\sphericalangle EG'B' = \sphericalangle EHC' = 90°$. Avem deci:

$$\frac{G'E}{EH} = \frac{B'E}{C'E}. \qquad (1)$$

Triunghiurile $B'NE$ şi NCF sînt egale deoarece: $\sphericalangle B'EN = \sphericalangle NCF = 90°$ şi $\sphericalangle B'NE = \sphericalangle CNF$ ca opuse la vîrf, deci

$$\frac{B'E}{FC} = \frac{NE}{NF}. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$\frac{G'E}{EH} = \frac{NE}{NF}; \Rightarrow \frac{G'E + EH}{EH} = \frac{NE + NF}{NF}; \Rightarrow \frac{AA'}{EH} = \frac{AA'}{NF} \Rightarrow EH = NF \text{ şi } G'E = NE \text{ sau } FG = NE.$$

Triunghiurile NEH și NFG sînt egale deoarece $\sphericalangle NEH = \sphericalangle NFG = 90°$; $EH = NF$; $FG = NE$, deci $NH = NG$.

Vom mai arăta că NH și NG sînt tocmai distanțele punctului N la dreptele $A'C'$ respectiv BD; adică $NH \perp A'C'$ și $NG \perp BD$, iar NE este perpendiculară pe planul $A'B'C'$, EH este perpendiculară pe dreapta acestui plan. Conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă $NH \perp A'C'$.

Observație. La fel se arată că NG și BD sînt perpendiculare și se obține proprietatea că orice punct al liniei frînte $AB'CD'A$ este egal depărtat de $A'C'$ și BD.

Soluția II-a. $N \in B'C$ și EF perpendiculară pe planul $ABCD$, deci și pe planul $A'B'C'D'$ dusă prin N. Punctul E aparține planului $A'B'C'D'$ iar F planului $ABCD$. Dacă EH și FG sînt perpendicularele din E și F pe $A'C'$ respectiv BD, atunci conform teoremei celor trei perpendiculare, NG și NH sînt distanțele punctului N la BD respectiv $B'D'$. Observînd că segmentele NF și BB' cît și distanțele de la F și B la AC sînt proporționale cu segmentele CF și BC. Mai ținem seama de faptul că distanța de la B la AC este egală cu BB' și rezultă că distanța de la F la AC adică EH, este egală cu NF. Analog se obține $GF = NE$. Din egalitatea triunghiurilor dreptunghice NFG și NFH rezultă $NG = NH$.

Soluția III-a. Notăm $\sphericalangle ACB = \varphi$, $BC = a$ și $CF = x$ și atunci avem:

$$FG = (a - x) \sin \varphi, \quad AB = a \operatorname{tg} \varphi, \quad BB' = CC' = \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = a \sin \varphi, \quad NF = x \sin \varphi, \quad HE = C'E \sin \varphi = x \sin \varphi$$ și deci:

$$EN = EF - NF = a \sin \varphi - x \sin \varphi = (a - x) \sin \varphi.$$

Avem: $NG^2 + FG^2 = x^2 \sin^2 \varphi + (a - x)^2 \sin^2 \varphi$, iar

$$NH^2 = HE^2 + NE^2 = x^2 \sin^2 \varphi + (a - x)^2 \sin^2 \varphi,$$

ceea ce ne arată că $NH = NG$.

5.32. Două plane secante P_1 și P_2 sînt intersectate de o dreaptă D respectiv în punctele A_1 și A_2. Să se arate cum se poate construi un punct M pe segmentul

A_1A_2 astfel ca suma distanțelor lui M la cele două plane să fie cea mai mică (minimă). În ce caz suma distanțelor de la M la cele 2 plane este constantă?

(G.M.B., 12796, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Notăm A_1' proiecția lui A_1 pe planul P_2 și A_2' proiecția lui A_2 pe planul P_1. Din asemănarea triunghiurilor avem:

$\frac{x}{A_1A_1'} = \frac{MA_2}{A_1A_2}$; $\frac{y}{A_2A_2'} = \frac{MA_1}{A_1A_2}$, x și y fiind distanțele lui M la P_2 respectiv P_1. Fie $A_2 = M = z$; $A_1A_1' = a$, $A_2A'_2 = b$.

$$x + y = \frac{1}{A_1A_2}[az + b(A_1A_2 - z)] =$$
$$= \frac{1}{A_1A_2}[(a - b)z + b \cdot A_1A_2].$$

Expresia $x + y$ își atinge minimumul cînd $(a - b)z$ este minimă. Deci, dacă $a > b \Rightarrow z = 0$ și $M = A_2$, iar dacă $a < b \Rightarrow z = AA_2$ și $M = A_1$.

Observație. Minimumul cerut este oricare ar fi poziția lui M pe A_1A_2 cînd

$$A_1A_1' = A_2A_2' \text{ adică } a' = b;\ x + y = \frac{a \cdot A_1A_2}{A_1A_2} = a.$$

5.33. Se dau dreptele d_1 și d_2 oarecare (neparalele și neconcurente) în spațiu și punctul M.

a). Să se afle locul geometric al punctului M astfel ca din M să nu se poată duce o dreaptă care să intersecteze dreptele d_1 și d_2.

b). Fie N un punct oarecare al dreptei d_1 și P un punct oarecare al dreptei d_2. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului NP.

(G.M.B., 9815, *I. Stănescu*).

Soluție. a). Punctul M și dreapta d_1 determină planul α. Planul α intersectează dreapta d_2 în punctul A. Dreapta MA intersectează ambele drepte date.

Pentru a fi în cadrul problemei, trebuie ca punctul A să nu existe și atunci nu putem duce dreapta MA. Trebuie deci ca α să fie paralel cu dreapta d_2. Planul α este locul geometric căutat. Dacă considerăm M și dreapta d_2 ele determină planul β.

Și în acest caz planul β trebuie să fie paralel cu dreapta d_1 și el face parte din locul geometric.

Dacă $M \in d_1$ nu mai este determinat α. Dacă $M \in d_2$ nu mai este determinat β. Locul geometric este mulțimea punctelor planelor paralele care conțin dreptele d_1 și d_2 fără dreptele d_1 și d_2.

b). $N \in \alpha$ și $P \in \beta$. Segmentul NP este situat la egală distanță de planele α și β. Locul geometric este planul paralel cu planele α și β situat între acestea și la egală distanță de ele.

Fie B un punct al locului geometric. Dreapta d_1 și B determină planul γ. Planul γ intersectează d_2 în punctul C. Dreapta BC intersectează dreapta d_2 în D. Segmentul CD are capetele pe cele două drepte și mijlocul punctului B este pe locul geometric.

5.34. Se dau dreptele paralele d_1 și d_2 și punctele exterioare lor A și B. Planele variabile P_1 și P_2 sînt paralele și conțin respectiv dreptele d_1 și d_2. Fie AN perpendiculară pe planul P_1, unde $N \in P_1$ și BM perpendiculară pe P_2, unde $M \in P_2$. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului MN.

Soluție. Dreptele d_1 și d_2 fiind paralele determină un plan α. Fie Q planul paralel cu planele P_1 și P_2 și situat la egală distanță de ele. Planul Q intersectează planul α după o dreaptă d. Rezultă că dreptele d, d_1 și d_2 sînt paralele echidistanțate și deci dreapta d este fixă. Punctul L mijlocul segmentului MN se află în planul Q. Fie E mijlocul segmentului AB. Trapezul $ANMB$ are segmentul EL ca linie mijlocie, deci EL este perpendiculară pe planele P_1, P_2 și Q. Punctul E fiind fix, rezultă că EL generează planul β, deoarece trece prin E și rămîne perpendicular pe dreapta fixă d.

Planul β intersectează dreapta d în F.

Deoarece $EL \perp LF$, segmentul fix EF se vede din L sub un unghi de $90°$. Locul punctului L este deci cercul de diametru EF situat în planul β.

5.35. Se consideră într-un plan π dreptele d_1 și d_2 paralele, necoincidente și punctele $A_1 \notin \pi$ și $A_2 \notin \pi$ așa fel încît $d(A_1, A_2) \cap \pi = A_0$. S-a notat prin $d(A_1, A_2)$ dreapta care conține punctele A_1 și A_2.

a). Să se arate că dacă α este un plan mobil care conține dreapta $d(A_1, A_2)$ și dacă $B_1 = d_1 \cap \alpha$ și $B_2 = d_2 \cap \alpha$, atunci dreapta $d_3(B_1, B_2)$ trece printr-un punct fix.

b). Mulțimea punctelor $P = d(A_1, B_1) \cap d(A_2, B_2)$ este o dreaptă paralelă cu planul π.

c). Să se rezolve problema dacă $d_1 \cap d_2 = B_0$ și să se arate că mijloacele segmentelor $[B_0, A_1]$, $[B_0, A_2]$, $[B_1, A_1]$ și $[B_1, A_2]$ sînt coplanare și formează un paralelogram.

(G.M.B., 9376, *C. Borș*).

Soluție. a). Rezultă imediat că $A_0 \in \pi \cap \alpha = d(B_1, B_2)$.

b). Punctul P se află în planele $\pi(d_1, A_1)$ și $\pi(d_2, A_2)$, adică în dreapta lor de intersecție. Aceste plane trecînd prin dreptele paralele d_1 și d_2 dreapta lor de intersecție este paralelă cu d_1 (și cu d_2) și deci și cu planul π.

c). În cazul general $d_1 \cap d_2 = B_0$, mulțimea punctelor P este o dreaptă care conține punctul B_0.

Punctele $B_0B_1A_1A_2$ formează un patrulater strîmb. Demonstrația rezultă imediat folosind proprietățile liniei mijlocii în triunghi.

5.36. Se dau trei drepte: (d_1); (d_2) și (d_3) oarecare în spațiu.

a). Să se arate că există o singură dreaptă (Δ) care se sprijină pe (d_1) și (d_2) și este paralelă cu (d_3).

b). Dacă punctele A și B sînt fixe pe dreapta (d_1) și planul mobil care conține dreapta (d_1) intersectează (d_2) și (d_3) în M respectiv N, să se afle locul geometric al intersecției dreptelor AM și BN.

c). Care este locul geometric al intersecției dreptelor AN și BM?

(G.M.B., 9375, *I. Stănescu*).

Soluție. a). Printr-un punct $C \in (d_1)$ ducem paralela (d_3') la (d_3); $((d_1); (d_3')) = P$.

Printr-un punct $E \in (d_2)$ ducem paralela (d_3') la (d_3)

$$((d''); (d_2)) = Q.$$

Din construcție rezultă că:

$(d_3) \parallel P$ și $(d_3) \parallel Q$. Atunci (d_3) este paralelă și cu muchia celor două plane pe care o notăm (D) și care întîlnește dreptele (d_1) și (d_2).

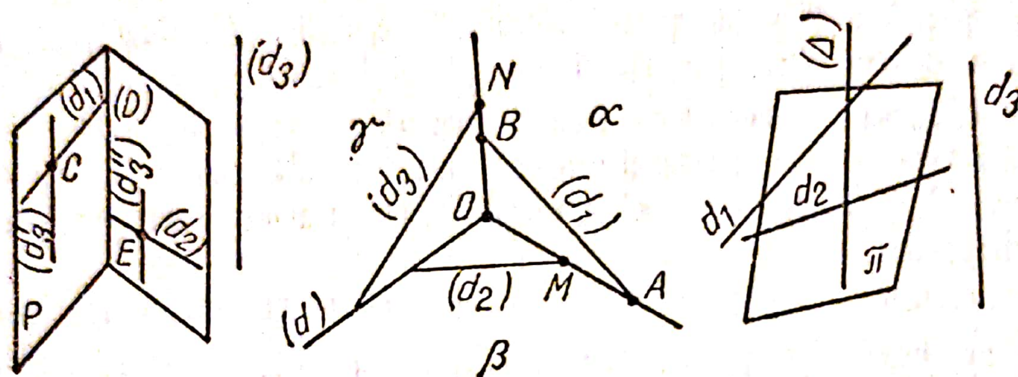


Fig. 5.36

Oricare ar fi poziția punctului C pe (d_1) planul P este unic. La fel și planul Q este unic. Atunci intersecția lor dreapta (D) este unică.

Punctele A, M, N, B aparțin planului α. Dreptele (AM) și (BN) sînt în planul α și se intersectează în O.

Dreapta (d_2) și punctul A determină planul β fix. Dreapta $(AM) \in \beta$.

Dreapta (d_3) și punctul B determină planul γ fix. Dreapta $(BN) \in \gamma$.

Intersecția dreptelor (BN) și AM aparține atît planului α cît și planului β. Deci locul punctului O este $\beta \cap \gamma = (d)$ o dreaptă.

c). $(AN) \in \alpha$; $(BM) \in \alpha \Rightarrow (AN) \cap (BN) = O'$.

$[(d_2); B] = \beta'$; $[(d_3); A] = \gamma' \Rightarrow$

$(BM) \in \beta'$ și $(AN) \in \gamma'$.

Intersecția dreptelor BN și AN se face pe dreapta de intersecție a planelor β' și γ'.

Locul este dreapta $(d') = \beta' \cap \gamma'$.

5.37. Se dau dreptele d_1 și d_2 oarecare în spațiu. O dreaptă d_3 intersectează pe d_1 în A și este perpendi-

culară pe ea. Se consideră un plan mobil P care se rotește în jurul dreptei d_3.

Să se afle locul geometric al intersecțiilor proiecțiilor dreptelor d_1 și d_2 pe planul P.

Discuție. Cazuri particulare.

(G.M.B., 13453, *I. Stănescu*).

Soluție. Notăm cu Q planul perpendicular în A pe dreapta d_3. Dreapta δ, proiecția lui d_1 pe planul P va fi intersecția planelor P și Q deoarece Q trece prin d_1 și este perpendicular pe D_3. Notăm cu B intersecția dreptei d_2 cu planul Q (dacă ea există).

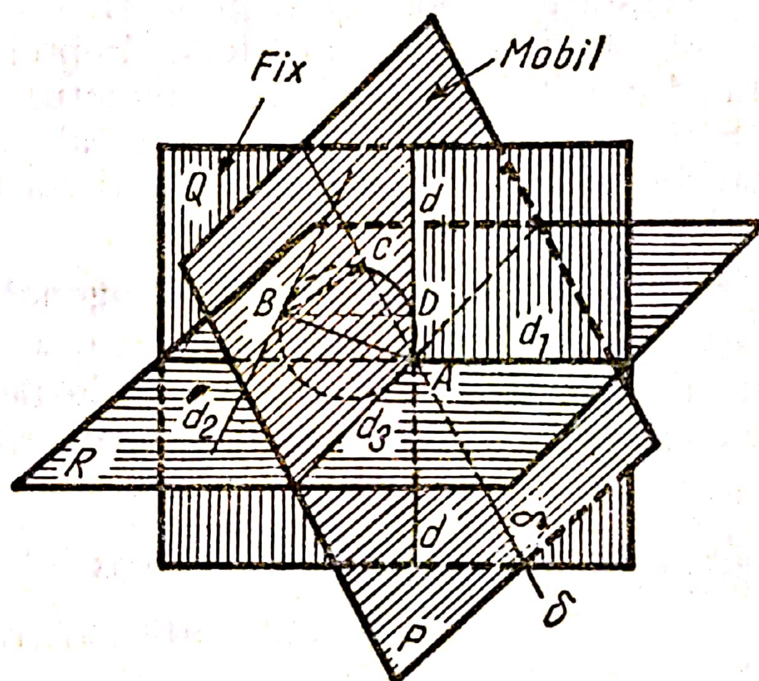


Fig. 5.37

Deoarece proiecția punctului B pe planul P este un punct notat C care aparține lui δ, (deoarece B este în planul Q, planele P și Q sînt perpendiculare și se taie după dreapta δ), rezultă că intersecția proiecțiilor lui d_1 și d_2 pe planul P este C, deoarece C aparține și proiecției lui d_1 și proiecției lui d_2.

În acest caz, locul C este cercul de diametru AB din planul Q.

Reciproc, orice punct de pe cerc (circumferință) diferit de D (proiecția lui B pe d) este un punct al locului cu observațiile din următoarea discuție:

— Dacă dreapta d_2 este paralelă cu planul Q punctul B nu există. În acest caz, proiecția lui d_2 pe planul P este o dreaptă paralelă cu δ și cele două proiecții nu se intersectează.

— Dacă însă d_2 trece prin A și este paralelă cu planul Q, rezultă că d_2 este conținută în planul Q, iar proiecția lui d_2 pe planul Q este tocmai dreapta δ, afară de cazul cînd d_2 este perpendiculară pe planul P, cînd proiecția lui d_2 pe P se reduce la punctul A. Dreapta δ rotindu-se odată cu planul Q în jurul lui A, perpendicular pe d_3 generează planul Q. În acest caz, locul intersecției celor două proiecții este planul Q din care s-a scos mulțimea punctelor dreptei perpendiculare în A pe d_2 și s-a adăugat punctul A.

Deci locul geometric cerut poate fi: a). un cerc; b). un plan din care s-a scos o dreaptă și s-a adăugat un punct al dreptei scoase; c). nu există.

5.38. Unghiul a se proiectează ortogonal pe un plan, după unghiul b. Fie c unghiul diedru al planelor care conțin unghiurile a și b iar d, e unghiurile pe care le formează cu planul unghiului b, laturile unghiului a. Să se arate că:

$$\sin a \cdot \cos c = \sin b \cdot \cos d \cdot \cos e$$

(G.M.B., 9433, *N. Negoescu*).

Soluție. Fără a particulariza problema, putem presupune că prin vîrful O al unghiului $AOB = a$ am dus un plan (P) paralel cu planul pe care trebuie să proiectăm unghiul a. Pe laturile unghiului $AOB = a$ luăm 2 puncte: A, B egal depărtate de vîrful O al unghiului: $AO = OB = l$. Fie A' și B' proiecțiile punctelor A, respectiv B pe planul (P) și $OM \perp AB$, $OM' \perp A'B'$. Avem:

$$\sphericalangle A'OB' = b, \quad \sphericalangle MOM' = c, \quad \sphericalangle AOA' = d,$$
$$\sphericalangle BOB' = e.$$

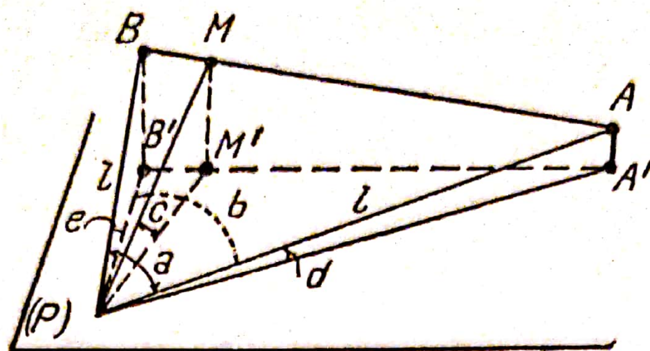


Fig. 5.38

Notăm S_{OAE} și $S_{OA'B'}$ respectiv ariile triunghiurilor OAB și $OA'B'$:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \sin (AOB) = \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \sin a \text{ și}$$

$$S_{OA'B'} = \frac{1}{2} \cdot OA' \cdot OB' \cdot \sin (A'OB') = \frac{1}{2} (l \cos d)$$

$$(l \cdot \cos e) \sin b = \frac{1}{2} l^2 \sin b \cos d \cos e.$$

Înlocuind valorile aflate pentru S_{OAB} și $S_{OA'B'}$ în egalitatea $S_{OA'B'} = S_{OAB} \cdot \cos c$ obținem egalitatea cerută.

5.39. Fie O vîrful unui triedru tridreptunghic și A, B, C trei puncte pe muchiile lui, astfel încît $AC = 2OB$ și $BC = 2OA$.

a). M și N fiind proiecțiile lui O pe AC și BC respectiv, să se arate că MN este perpendicular pe OC.

b). Să se determine cosinusul unghiului MON.

(G.M.F.B., 6024, 1963, *I. Apolozan*).

Soluție. a). Notăm $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ și din enunț avem $AC^2 = 4b^2$ și $BC^2 = 4a^2$ sau $OA^2 + OC^2 = 4b^2$ și $OB^2 + OC^2 = 4a^2$ deci $a^2 + c^2 = 4b^2$ și $b^2 + c^2 = 4a^2$ de unde rezultă $a = b$ și $c = a\sqrt{3}$. De asemenea, $AC = BC = 2a$ și $AB = a\sqrt{2}$. Deoarece $\triangle OAC = \triangle OBC$ rezultă că $OM = ON$. Din egalitatea triunghiurilor OMC și ONC

rezultă $CM = CN$, adică $MN \parallel AB$. Însă $OC \perp \text{pl}(OAB)$ deci și pe AB. Rezultă $OC \perp MN$.

b). Triunghiul OAC fiind dreptunghic în O avem:

$$ON = OM = \frac{OA \cdot OC}{AC} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2a} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}. \qquad (1)$$

De asemenea, teorema catetei ne dă:

$$MC = \frac{OC^2}{AC} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}.$$

Din asemănarea triunghiurilor CMN și CAB avem

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA} \text{ de unde } MN = \frac{AB \cdot CM}{CA}.$$

sau

$$MN = \frac{\frac{3}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2}}{2a} = \frac{3 \cdot \sqrt{2a}}{4}. \qquad (2)$$

Împărțind relațiile (1) și (2):

$$\left(\frac{MN}{OM}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Teorema cosinusului în triunghiul MON ne dă:

$$\cos \sphericalangle MON = \frac{2OM^2 - MN^2}{2OM^2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{MN}{OM}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}.$$

5.40. Fie Δ_1, Δ_2 două drepte oarecare în spațiu și P_1, P_2 planele paralele duse prin Δ_1, respectiv Δ_2. Fie A_1, B_1 și A_2, B_2 puncte din P_1, respectiv P_2 astfel ca distanțele lor la Δ_1, Δ_2 să fie egale cu distanța d dintre Δ_1 și Δ_2.

Să se demonstreze că dreptele A_1A_2, A_1B_2, B_1A_2, B_1B_2 au punctele lor egal depărtate de Δ_1, Δ_2.

(G.M., 14547, *I. Gh. Zamfirescu*).

Soluție. Determinarea punctelor A_1B_1, A_2B_2.

Fie I_1I_2 perpendiculara comună dreptelor Δ_1, Δ_2 și Δ_2', Δ_1' paralele la Δ_2 prin I_1 și la Δ_1 prin I_2.

Se duc în P_1 paralele Δ_{1a}, Δ_{1b} cu Δ_1, la distanța d de Δ_1. Ele taie pe Δ_2' în A_1, respectiv B_1. Proiecția C, a lui A_1 pe P_2 se află pe Δ_2 și $A_1C = d$, deci A_1 este egal depărtat de Δ_1 și Δ_2 cu distanța d.

Analog pentru B_1 în P_1.

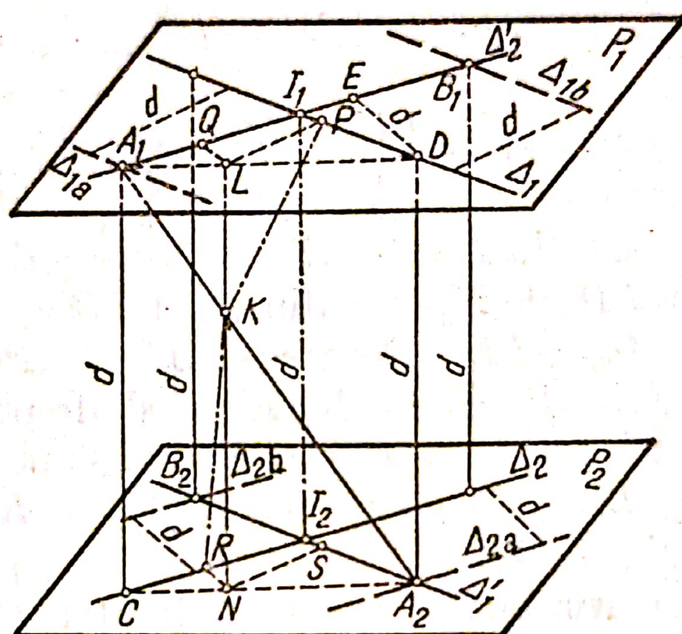


Fig. 550

De asemenea, A_2, B_2 sînt intersecțiile cu Δ_1' ale dreptelor Δ_{2a} și Δ_{2b} din P_2, paralele cu Δ_2 la distanța d. Proiecția D a lui A_2 pe P_1 se află pe Δ_1 și $A_2D = d$, deci A_2 este egal depărtat de Δ_1 și Δ_2 cu distanța d.

Triunghiurile A_1I_1D și A_2I_2C sînt egale și isoscele.

Deoarece $I_1I_2 = \parallel A_1C = \parallel A_2D \Rightarrow \triangle A_1I_1D = \triangle A_2I_2C$. Deoarece înălțimile din A_1, D și A_2, C ale triunghiurilor A_1I_1D și A_2I_2C sînt egale cu d, rezultă că triunghiurile sînt și isoscele.

Dreapta A_1A_2 are punctele sale egal depărtate de Δ_1, Δ_2.

Fie K un punct pe A_1A_2. Paralela prin K la I_1I_2 taie pe A_1D în L și pe CA_2 în N. Fie P și Q proiecțiile

lui L pe DI_1, respectiv I_1A_1 și R, S proiecțiile lui N pe CI_2, respectiv I_2A_2.

$\triangle A_1KL \sim \triangle A_2KN \Rightarrow \frac{LK}{KN} = \frac{A_1L}{NA_2} = \frac{A_1L}{LD}$ (căci $NA_2 = LD) \Rightarrow \frac{LK}{LK + KN} = \frac{A_1L}{A_1L + LD} \Rightarrow \frac{LK}{d} = $
$= \frac{A_1L}{A_1D}$; $\triangle A_1LQ \sim \triangle A_1DE$, $(DE \perp \Delta_2') \Rightarrow \frac{A_1L}{A_1D} =$
$= \frac{LQ}{d}$, $(DE = d) \Rightarrow \frac{LK}{d} = \frac{LQ}{d} \Rightarrow KL = LQ$. Dar în $\triangle A_1I_1D$ isoscel, $LQ + LP = DE = d \Rightarrow LK + LP = d \Rightarrow LP = KN$ iar din $\triangle A_1LQ = \triangle CNR \Rightarrow$ $\Rightarrow RN = LQ = LK$. Deoarece $LK \perp LP$ și $KN \perp$ $\perp RN \Rightarrow \triangle KLP = \triangle NRK$ fiind dreptunghice și avînd catetele egale $\Rightarrow KP = KR$ și cum $KP \perp \Delta_1$, $(KL \perp P_1$, $LP \perp \Delta_1)$ iar $KR \perp \Delta_2 \Rightarrow K$ egal depărtat de Δ_1 și Δ_2.

Demonstrația analoagă pentru dreptele A_1B_2, B_1A_2 și B_1B_2.

5.41. Fie A, B, C, D patru puncte fixe în spațiu, iar (P_1) și (P_2) două plane paralele ce trec respectiv prin A și B. Se notează cu M și N proiecțiile punctelor C și D respectiv pe (P_1) și (P_2). Se cere locul geometric al mijlocului P al segmentului MN.

(G.M.F.B., 1215, *Mihail Popescu*).

Soluție. Se notează cu E și F mijloacele segmentelor AB și CD. Se observă că segmentul PF este perpendicular iar segmentul PE este paralel cu planele (P_1) și (P_2). De aici se deduce că segmentul EF se vede din P sub un unghi drept, deci se găsește pe sfera de diametru EF.

Observație. a). Centrul O al sferei loc geometric coincide cu centrul de greutate G al tetraedrului $ABCD$.

b). În cazul mai general, cînd P se găsește pe MN astfel încît $\frac{MP}{PN} = k$, locul lui P este sfera de diametru EF', E' și F' fiind două puncte situate respectiv pe AB și CD, astfel încît:

$$\frac{AE'}{E'B} = \frac{CF'}{F'D} = k.$$

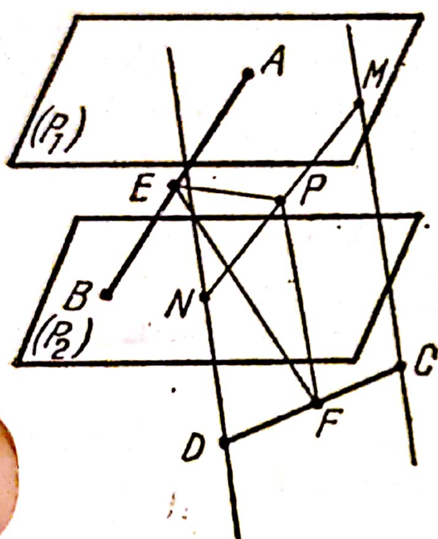


Fig. 5.41

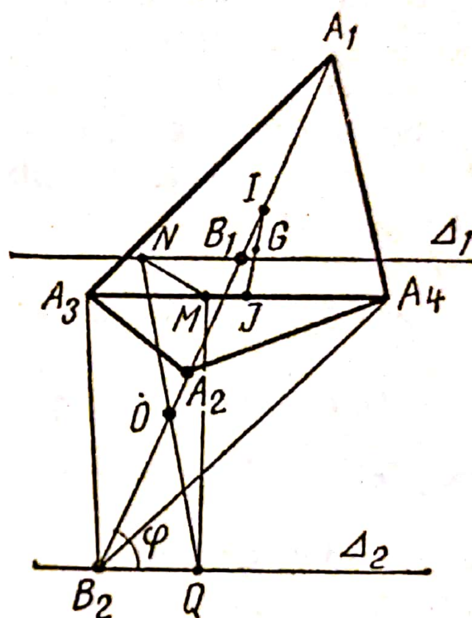


Fig. 5.42

5.42. Se consideră tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$. Vîrfurile A_1 și A_2 sînt fixe, punctul A_3 și A_4 se mișcă în spațiu astfel încît raportul ariilor $A_1A_3A_4$ și $A_2A_3A_4$ păstrează o valoare constantă, iar unghiul dreptelor A_1A_2 și A_3A_4 rămîne constant și egal cu φ.

a). Să se demonstreze că dreapta A_3A_4 rămîne tangentă unei sfere fixe.

b). Să se găsească locul geometric al centrului de greutate G al tetraedrului considerat, cînd în plus dreapta A_3A_4 rămîne paralelă cu ea însăși.

(G.M.F.B., 1332, *Mihail Popescu*).

Soluție. Se face notația:

$$\frac{S(A_1A_3A_4)}{S(A_2A_3A_4)} = k$$

și se consideră planele bisectoare (P_1) și (P_2) ale unghiurilor diedre formate de fețele $A_1A_3A_4$ și $A_2A_3A_4$.

Fie B_1 și B_2 punctele în care muchia A_1A_2 înțeapă aceste plane.

Planele (P_1) și (P_2) sînt perpendiculare.

Cum $\frac{B_1A_1}{B_1A_2} = \frac{B_2A_1}{B_2A_2} = k$, rezultă că punctele B_1 și B_2 sînt fixe. Fie O mijlocul segmentului B_1B_2, Δ_1 și Δ_2 două drepte paralele cu dreapta A_3A_4, trecînd respectiv prin punctele B_1 și B_2, iar (P) un plan ce trece prin O și este perpendicular pe dreapta A_3A_4.

Se notează cu M, N, Q punctele în care dreptele A_3A_4, Δ_1, Δ_2 înțeapă planul (P). Se observă că triunghiul MNQ este dreptunghic $(ON = OQ = OM)$ și că OM este perpendiculară pe A_3A_4.

Din triunghiul dreptunghic OB_1N rezultă:

$$ON = OB_1 \sin\varphi = \frac{B_1B_2 \cdot \sin\varphi}{2} = \text{const.}$$

deci și

$$OM = \frac{B_1B_2 \cdot \sin\varphi}{2} = \text{const.}$$

Se stabilește afirmația enunțului: Dreapta A_3A_4 rămîne tangentă sferei fixe de centru O și de rază

$$R = \frac{B_1B_2 \cdot \sin\varphi}{2}.$$

b). Fie I și J mijloacele segmentelor A_1A_2 și A_3A_4. Centrul de greutate G al tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ se găsește în mijlocul segmentului IJ. În condițiile punctului b), dreapta A_3A_4 generează o suprafață cilindrică circulară (C), a cărei axă de simetrie (D) trece prin punctul O. Aceeași suprafață o generează și punctul J. Rezultă că punctul G va descrie o suprafață cilindrică circulară (C') omotetică cu (C), avînd ca centru de omotetie punctul I, iar raportul de omotetie egal cu $1/2$. Axa de simetrie (D') a suprafeței (C') trece prin mijlocul segmentului OI.

Observație. Dreptele (D) și (D') sînt paralele cu direcția fixă pe care o păstrează dreapta A_3A_4.

POLIEDRE. CORPURI ROTUNDE

Poliedru este un corp solid mărginit de suprafețe plane. Poliedrul convex este poliedrul care se află de aceeași parte a oricăreia din fețele sale, adică planul care conține oricare din fețele poliedrului nu traversează poliedrul. Fețele unui poliedru convex sînt poligoane convexe. O dreaptă nu poate tăia suprafața unui poliedru convex în mai mult de două puncte, dreapta nefiind cuprinsă în niciunul din planele fețelor poliedrului.

Poliedrul regulat este poliedrul cu toate fețele poligoane regulate egale.

Suprafață prismatică se numește figura determinată de porțiuni de plane paralele cu o aceeași dreaptă, aceste plane fiind intersectate între ele după drepte paralele.

Teoremă. Secțiunile unei suprafețe prismatice prin plane paralele între ele, dar nu și cu muchiile, sînt poligoane egale.

Prismă se numește un poliedru cuprins între o suprafață prismatică și două plane paralele între ele, însă nu cu muchiile suprafeței prismatice. Secțiunile formate de aceste două plane paralele se numesc bazele prismei. Fețele laterale ale unei prisme sînt paralelograme, iar distanța între baze se numește înălțimea prismei.

Prisma dreaptă are muchiile laterale perpendiculare pe planele bazelor, iar dacă și bazele sînt poligoane regulate, prisma se zice *prismă regulată*.

Nu există decît cinci tipuri de poliedre regulate.

Prisma cu bazele paralelograme se numește *paralelipiped*.

Paralelipipedul este dreptunghic dacă muchiile laterale sînt perpendiculare pe baze.

Într-un paralelipiped dreptunghic, pătratul oricărei diagonale este egal cu suma pătratelor celor trei dimensiuni ale sale.

Piramida este corpul ce se obține tăind un unghi poliedru cu un plan care-i întîlnește toate muchiile unghiului poliedru, iar secțiunea formată de acest plan se numește baza piramidei. Celelalte fețe sînt fețele laterale și au ca punct comun vîrful piramidei. Distanța de la vîrful piramidei la bază este *înălțimea piramidei*. Piramida este *regulată* dacă baza este un poligon regulat iar perpendiculara din vîrful piramidei pe bază cade în centrul poligonului de bază.

Fețele laterale ale unei piramide regulate sînt triunghiuri isoscele egale, iar înălțimea triunghiului isoscel dusă din vîrful piramidei este apotema piramidei. Tetraedrul este piramida cu baza un triunghi iar tetraedrul se zice regulat cînd are toate muchiile egale.

Trunchi de piramidă este porțiunea ce se obține dintr-o piramidă făcînd o secțiune în această piramidă, paralelă cu baza și este cuprinsă între bază și secțiunea făcută. Secțiunea făcută este baza mică iar baza piramidei inițiale este baza mare.

Teoremă. Un trunchi de piramidă este echivalent cu suma a trei piramide, avînd ca înălțime comună înălțimea trunchiului și ca baze respective baza mare, baza mică și media proporțională între aceste două baze.

Trunchi de prismă este poliedrul mărginit de o suprafață prismatică și două fețe plane numite și bazele trunchiului, planele acestor două fețe nefiind paralele între ele ca în cazul prismei.

Teoremă. Un trunchi de prismă triunghiulară este echivalent cu suma a trei piramide avînd ca bază comună una dintre bazele trunchiului și ca vîrfuri respective cele trei vîrfuri ale celeilalte baze.

Corolar. Un trunchi de prismă triunghiulară are ca volum produsul dintre secțiunea sa dreaptă prin media aritmetică a muchiilor laterale.

Formule:

Aria laterală a prismei = perimetrul bazei × înălțimea prismei.

Volumul prismei = aria bazei × înălțimea prismei.

Aria laterală a piramidei = semiperimetrul bazei × × apotema piramidei.

Volumul piramidei = o treime din produsul ariei bazei cu înălțimea.

Volumul trunchiului de piramidă $V = \frac{I}{3}(B + b + \sqrt{Bb})$, unde I este înălțimea trunchiului, B aria bazei mari și b aria bazei mici.

Suprafață cilindrică este suprafața generată de o dreaptă, numită generatoare, care se mișcă rămînînd paralelă cu o dreaptă fixă. Planul este un caz particular al suprafeței cilindrice și anume aceea pe care o obținem dacă generatoarea se mișcă pe o dreaptă ca directoare.

Definiție. O dreaptă este *tangentă la o suprafață* într-un punct A al acestei suprafețe, dacă ea este tangentă în A la o curbă dusă pe suprafață.

Teoremă. Toate tangentele care pot fi duse la o suprafață cilindrică într-un punct al acesteia sînt în același plan și se numește planul tangent la cilindru, dus în punctul considerat.

Cilindru se numește porțiunea dintr-o suprafață cilindrică limitată de două secțiuni paralele între ele numite bazele cilindrului. Cilindrul este drept dacă generatoarele sînt perpendiculare pe cele două baze, iar distanța între baze se numește înălțimea cilindrului.

Dacă bazele unui cilindru drept sînt cercuri, cilindrul este de rotație.

Suprafața conică este suprafața generată de o dreaptă numită generatoare care se mișcă, trecînd mereu prin același punct fix numit vîrful conului.

Planul este deci o suprafață conică obținută cînd generatoarea alunecă pe o dreaptă fixă care nu trece prin vîrful suprafeței conice.

Teoremă. Tangentele care se pot duce la o suprafață conică într-un punct diferit de vîrf sînt toate în

același plan, numit planul tangent la con în punctul considerat.

Prin *con* înțelegem corpul mărginit de o suprafață conică, vîrf și o secțiune plană, baza conului, iar distanța de la vîrful conului la bază este înălțimea conului.

Trunchiul de con este corpul mărginit de o suprafață conică și două secțiuni plane numite baze, iar distanța dintre baze este înălțimea trunchiului de con.

Suprafață de rotație este suprafața generată de o curbă C care se mișcă rotindu-se în jurul unei axe fixe, un punct de pe generatoare descriind un cerc numit cerc paralel care se află într-un plan perpendicular pe axă și are centrul pe axă.

Secțiunea unei suprafețe de rotație printr-un semiplan P care conține și este mărginit de axă este o curbă numită *curbă meridiană*.

Dacă un cerc se rotește în jurul unui diametru al său generează o *sferă*.

Dacă un cerc se rotește în jurul unei axe din același plan cu cercul pe care nu-l intersectează, suprafața obținută se numește *tor*.

Sfera este locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fix O numit centrul sferei; distanța de la un punct M al suprafeței la centru se numește rază.

Planul perpendicular în M pe OM se numește *plan tangent*.

Dintr-un punct exterior unei sfere se pot duce o infinitate de tangente la o sferă și care formează un con de rotație circumscris sferei.

Intersecția unui plan secant cu o sferă este un cerc. Cînd planul secant trece prin centrul sferei el intersectează sfera după un cerc mare.

Patru puncte din spațiu care sînt vîrfurile unui tetraedru determină o sferă care se zice sfera circumscrisă tetraedrului.

Printr-o dreaptă în întregime exterioară unei sfere, putem duce două plane tangente la această sferă.

Puterea unui punct în raport cu o sferă.

Teoremă. Dacă, printr-un punct dat în spațiu, ducem diferite drepte care întîlnesc sfera, produsul

segmentelor cuprinse între punctul dat și cele două puncte de intersecție ale fiecărei secante cu suprafața sferei este egal pentru toate secantele.

Corolar. Dacă printr-un punct din afara unei sfere ducem diferite plane care intersectează după cercuri sfera dată, punctul dat are, în raport cu toate aceste cercuri, aceeași putere, anume puterea acestui punct în raport cu sfera.

Planul radical a două sfere.

Teoremă. Locul geometric al punctelor care au aceeași putere în raport cu două sfere este un plan perpendicular pe linia centrelor sferelor și se numește planul radical al celor două sfere.

Teoremă. Planele radicale a trei sfere, luate două cîte două se taie după aceeași dreaptă, cu excepția cazului în care cele trei centre ale sferelor sînt coliniare sau cele trei plane radicale sînt paralele sau confundate.

Dacă cele trei centre sînt coliniare, atunci cele trei plane sînt toate perpendiculare pe această dreaptă.

Teoremă. Cele șase plane radicale a patru sfere, luate două cîte două (sau cele patru axe radicale ale acestor patru sfere luate trei cîte trei), sînt concurente într-un punct numit *centrul radical* al celor patru sfere, cu excepția cazului cînd cele patru centre ale sferelor se află în același plan, planele radicale fiind în acest caz paralele cu o aceeași dreaptă.

Aria și volumul sferei

Teoremă. Aria generată de un segment de dreaptă care se rotește în jurul unei axe situate în același plan cu el și care nu-l taie are ca măsură proiecția segmentului pe axă, înmulțită cu lungimea cercului avînd centrul pe axă și tangent la segment în mijlocul său.

Zonă sferică se numește porțiunea de suprafață sferică cuprinsă între două plane paralele.

Cercurile situate în cele două plane și care mărginesc deci zona, se numesc bazele ei, iar distanța între baze este înălțimea zonei.

Calotă sferică se numește una din porțiunile din suprafața sferică obținută prin intersecția ei cu un plan; evident putem considera calotă sferică drept o zonă în care unul din plane este tangent la sferă.



Aria zonei (calotei) este egală cu produsul dintre înălțimea ei și lungimea unui cerc mare al sferei.

Aria sferei de rază $R = 4\pi R^2$.

Sector sferic se numește figura generată de un sector circular care se rotește în jurul unui diametru care nu-l traversează.

Volumul sectorului sferic este egal cu aria zonei care-l mărginește înmulțită cu o treime din raza sferei sau cu $\frac{2}{3}\pi R^2 h$ unde h este înălțimea zonei ce mărginește sectorul sferic.

Volumul sferei de rază $R = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$, unde $D = 2R$.

Volumul inelului (mărgelei) sferic

Inel sferic este solidul generat prin rotirea unui segment de cerc mare în jurul unui diametru care nu-l traversează și are volumul egal cu a șasea parte din volumul cilindrului a cărui bază este coarda segmentului, iar înălțimea — proiecția acestei coarde pe axa de rotație.

Segment sferic se numește porțiunea din corpul sferei cuprinsă între două plane paralele. Acest volum este mărginit în general de o zonă și de două cercuri ale căror plane sînt paralele, numite și bazele segmentului.

Volumul segmentului sferic este echivalent cu semisuma celor doi cilindri care au ca înălțime înălțimea segmentului, iar ca baze respectiv bazele acestui segment la care se adună volumul sferei avînd ca diametru înălțimea segmentului.

Prima teoremă a lui Guldin

Dacă o linie plană de lungime L se rotește în jurul unei drepte din plan care nu o traversează generează o suprafață de rotație a cărei arie este $S = 2\pi L y$, unde y este distanța de la centrul de greutate al liniei care se rotește la axa de rotație.

A doua teoremă a lui Guldin

Volumul generat de o suprafață plană de arie A și care se rotește în jurul unei axe din plan care nu traversează suprafața care se rotește este $V = 2\pi A y$, unde y este distanța de la centrul de greutate al suprafeței plane care se rotește la axa de rotație.

PROBLEME

6.1. O prismă dreaptă are baza un paralelogram cu laturile 3 și $2\sqrt{6}$ iar diagonala mare este de $\sqrt{41}$. Prin vîrful unghiului mare al bazei se duce o secțiune care face forma unui pătrat. Să se calculeze latura acestui pătrat.

Soluție. Notăm latura acestui pătrat cu x. Atunci avem: $MB = \sqrt{x^2 - 24}$ (din triunghiul dreptunghic AMB) și $PD = \sqrt{x^2 - 9}$ (din triunghiul dreptunghic APD).

Atunci $PQ = \sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 24}$.

Cum triunghiul MPQ este dreptunghic avem:

$$(\sqrt{x^2-9} - \sqrt{x^2 - 24})^2 + 41 = 2x^2.$$

($MP = x\sqrt{2}$ fiind diagonala patratului de latură x), sau:

$$8-2\sqrt{(x^2-9)(x^2-24)}=0$$

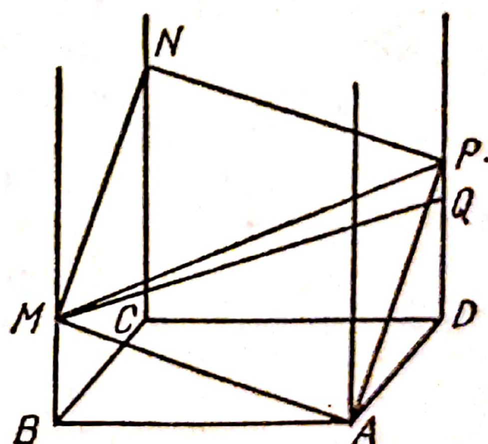


Fig. 6.1

ce dă:

$$x^4 - 33x^2 + 200 = 0$$

de unde:

$$x^2 = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 800}}{2} = \frac{33 \pm 17}{2},$$

cu soluția acceptabilă $x = 5$.

6.2. Într-un cub $ABCDEFGH$, P este mijlocul laturii AB și Q punctul de intersecție dintre BG și CF.

a). Să se demonstreze că AG este paralelă cu planul CFP.

b). Să se demonstreze că HQ este perpendiculară pe planul CFP.

(G.M.B., 8817, 1968).

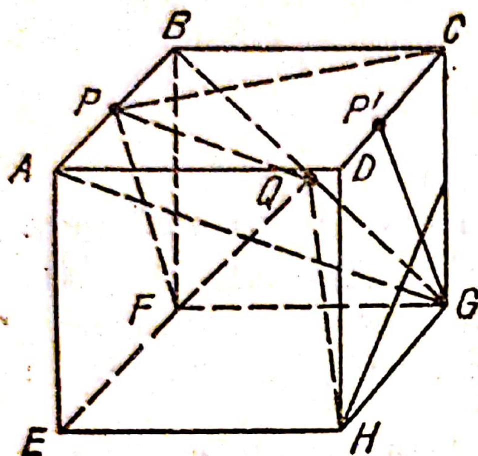


Fig. 6.2

Soluție. a). PQ este linie mijlocie în triunghiul ABG, deci $PQ \parallel AG$, cum $PQ \in$ pl. (CFP) rezultă că AG este paralelă cu acest plan.

b). HQ este perpendiculară pe FC conform teoremei celor 3 perpendiculare. Rămîne să arătăm că $HQ \perp FP$. Fie GP' și HQ' proiecțiile lui FP și a lui HQ respectiv pe planul $HGCD$. Deoarece $GP' \perp HQ'$ și $FP \parallel$ pl. $(HGCD)$ rezultă că $FP \perp HQ$.

6.3. Se dă un plan P și un punct O situat exterior planului. Fie A piciorul perpendicularei duse din O pe plan, iar B și C alte două puncte în acest plan. Fie un punct D situat pe dreapta OA și E și F proiecțiile lui D pe OB și OC.

a). Ce condiții trebuie să îndeplinească oblicele OB și OC pentru ca să avem $DE = DF$?

b). Să se arate că pentru ca triunghiul DEF să fie echilateral trebuie să avem

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BC}.$$

c). Să se arate că dacă oblicele OB și OC sînt oarecare, patrulaterele $ABED$, $ACFD$ și $BCEF$ sînt inscriptibile.

Soluție. a). Se ține seama că $\triangle DEO = \triangle ACO$ și $\triangle DFO = \triangle ABO$ oblicele OB și OC trebuie să fie egal depărtate de A, deci $AB = AC$.

b). $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DEB = 90°$; $\sphericalangle DEB = \sphericalangle DAB = 90°$; $\sphericalangle DFC = \sphericalangle DAC = 90°$. Patrulaterele $ABED$ și $ACFD$ sînt evident inscriptibile. Punctele B, O, E, F sînt în același plan. Cercurile $ABED$ și $ACFD$ au coarda comună AD și deci se află pe o aceeași sferă, deci patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil.

6.4. Fie un cub cu baza $ABCD$, iar VA muchia cubului perpendiculară pe bază. Punctul A se proiectează pe VB, VC, VD, respectiv în A_1, A_2, A_3. Să se arate că:

a). Dreapta CV este perpendiculară pe planul $A_1A_2A_3$.

b). Unghiurile AA_1A_2 și AA_3A_2 sînt drepte, iar patrulaterul $AA_1A_2A_3$ este inscriptibil.

(G.M.B., 9065, 1968, *D. Manolache*).

Soluție. a). Dreapta BC este perpendiculară pe planul VAB, deci este perpendiculară și pe $AA_1 \in$ planului VAB. Rezultă că $AA_1 \perp BC$ și cum $AA_1 \perp VB$ avem că $AA_1 \perp$ pl. (VBC). Deci $AA_1 \perp CV$ și cum CV este perpendiculară pe AA_1 și AA_2 rezultă că CV este perpendiculară pe pl. (AA_1A_2) adică pe dreapta A_1A_2. În mod analog se arată că CV pe A_2A_3 deci $CV \perp$ pl $(A_1A_2A_3)$.

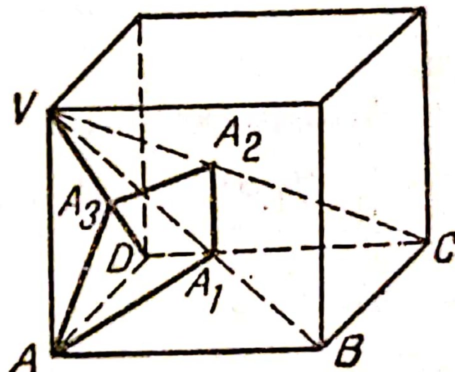


Fig. 6.4

b). Deoarece $CV \perp$ pl (AA_1A_2) și $CV \perp$ pl (AA_2A_3) rezultă că punctele A, A_1, A_2, A_3 sînt coplanare. Însă $AA_1 \perp$ pl (VBC) și A_1A_2 planului (VBC) rezultă că $AA_1 \perp A_1A_2$, deci $\sphericalangle AA_1A_2 = 90°$. În mod analog rezultă că $AA_3 \perp A_3A_2$, adică $\sphericalangle AA_3A_2 = 90°$. Punctele A, A_1, A_2, A_3 sînt vîrfurile unui patrulater plan și $\sphericalangle AA_1A_2 + \sphericalangle AA_3A_2 = 180°$. Rezultă că patrulaterul $AA_1A_2A_3$ este inscriptibil.

6.5. O prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are baza dreptunghiul de laturi $AB = a$, $AD = 2a$ și înălțimea prismei $AA' = 3a$. Fie M mijlocul lui BB' și N un punct pe DD', astfel că $2DN = ND'$. Se cere:

a). Să se calculeze lungimea CP unde P este intersecția planului AMN cu muchia CC'.

b). Să se arate că patrulaterul $AMPN$ este paralelogram.

c). Volumul piramidei $ABMND$.

Soluție. a). Triunghiurile $MM'P$ și ADN sînt egale, deci $M'P = DN = a\sqrt{5}$. Rezultă

$$CP = CM' + M'P = \frac{3a}{2} + a\sqrt{5} = \frac{a(3+2\sqrt{5})}{2}.$$

b). Fie $MM' \parallel BC$, deci $M' \in CC'$, $MP = \parallel AN$, $NP = \parallel AM$.

c). Înălțimea din A cade pe BD și o notăm cu h.

$$h = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Aria trapezului $BMND$ este

$$S = \frac{(BN + ND)BD}{2} = \frac{5a \cdot a\sqrt{5}}{4} = \frac{5a^2\sqrt{5}}{4}.$$

$$V = \frac{Sh}{3} = \frac{5a^3}{6}.$$

6.6. Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, $ABCD$ și $A'B'C'D'$ fiind două fețe opuse. Se cunosc lungimile muchiilor acestui paralelipiped: $AB = a$, $BC = b$, $BB' = c$, M fiind mijlocul muchiei $A'B'$. Se cere:

a). distanța de la vîrful C' la dreapta BM; b) distanța de la vîrful B' la planul BMC'; c) locul geometric al proiecției punctului C' pe dreapta BM cînd punctul M descrie muchia $A'B'$.

Soluție. a). După teorema celor trei perpendiculare, $B'I$ este perpendiculară pe BM. Rezultă: $C'I^2 = C'B'^2 + B'I^2$. De unde

$$C'I = \sqrt{\frac{a^2b^2 + 4b^2c^2 + a^2c^2}{a^2 + 4c^2}}.$$

b). Lungimea $B'I$ se deduce din triunghiul $IB'C'$ sau din volumul piramidei $B'BMC'$. Se găsește $B'I = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + 4b^2c^2 + a^2c^2}}$.

c). Din I segmentul BB' se vede sub un unghi drept. Locul este un arc din centrul de diametru BB'.

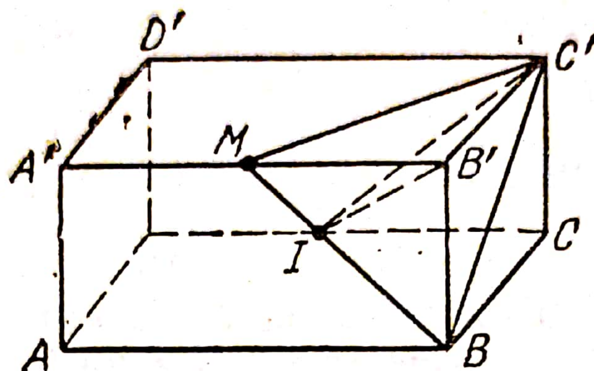


Fig. 6.6

6.7. O încăpere are forma unui paralelipiped dreptunghic cu baza un dreptunghi $ABCD$ cu laturile $AB = 12$ m și $BC = 6$ m. Muchiile laterale sînt AA', BB', CC', iar diagonala $AC' = 14$ metri.

a). Să se afle volumul încăperii.

b). Notînd cu O centrul bazei $ABCD$ să se calculeze OC'.

c). Să se calculeze distanța de la O la diagonala AC'.

(G.M., 4385, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). $AC^2 = AB^2 = 12^2 + 6^2 = 180$.

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 180 + CC'^2 = 14^2 = 196,$$

deci $CC' = 4$ m.

Volumul este $V = 12 \times 6 \times 4 = 288$ m³.

b) $OC'^2 = 4^2 + OC^2 = 61$; $OC' = \sqrt{61}$.

c). În triunghiul AOC' cunoaștem $AC' = 14$, $AO = \frac{\sqrt{180}}{2} = 3\sqrt{5}$. $OC' = \sqrt{61}$. Din triunghiul dreptunghic ACC' avem

$$\sin(CAC') = \sin(OAC') = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

Ducem perpendiculara OE pe AC' avem $OE = AO \sin(OAC') = 3\sqrt{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6\sqrt{5}}{7}$.

6.8. Se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a.

1). Să se calculeze distanțele de la punctele A, C și B' la diagonala BD'.

2). Să se arate că aceste 3 segmente care reprezintă distanțele cerute sînt concurente într-un punct T.

3). Arătați că $\frac{BT}{TD'} = \frac{1}{2}$.

4). Să se afle unghiul dintre AB' și AC.

(Concurs elevi, 1975).

Soluție. 1). Distanța de la A la BD'. Triunghiul ABD' este dreptunghic în A, iar $(AD')^2 = AA'^2 + A'D'^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, $BD^2 = AB^2 + AD'^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$.

Deci $AD' = a\sqrt{2}$, $BD' = a\sqrt{3}$, iar $AB \cdot AD' = BD' \cdot x$ unde x este distanța de la A la BD adică $a \cdot a\sqrt{2} = a\sqrt{3} \cdot x \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Triunghiurile ABD', BCD' și $BB'D'$ sînt toate dreptunghice și egale, iar distanța de la vîrful unghiului drept la ipotenuza comună BD' este aceeași egală cu $x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

2). Distanța de la vîrful ascuțit comun al celor 3 triunghiuri dreptunghice ABD', $BC'D$ și $BB'D'$ la piciorul perpendicularei pe ipotenuză este aceeași, deci cele 3 segmente sînt concurente în același punct T, unde $T \in B'D'$ iar $AT = CT = B'T$.

3). BT se obține din teorema catetei $AB^2 = BT \cdot BD' \Rightarrow a^2 = BT \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow BT = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$TD' = a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{BT}{TD'} = \frac{1}{2}$;

4). Triunghiul $AB'C$ este echilateral, $\sphericalangle B'AC = 60°$.

6.9. Fie M şi N mijloacele muchiilor VA şi BC ale unui tetraedru regulat. Să se arate că înălţimea din A şi dreapta MN sînt drepte concurente, iar MN este perpendiculara comună muchiilor VA şi BC.

Soluţie. Fie VN înălţimea din V. Dreptele AN şi BC sînt perpendiculare. Dreptele MN şi VN se află în planul VNA.

Triunghiurile ANV şi BMC sînt isoscele. Rezultă $MN \perp VA$ şi $MN \perp BC$.

6.10. Pe faţa $ABCD$ a unui cub cu muchia a se aşază un alt cub, care are vîrfurile unei feţe în mijloacele laturilor feţei $ABCD$. Deasupra acestuia se aşază în acelaşi mod un alt cub şi se continuă mereu operaţia. Să se afle înălţimea coloanei de cuburi formată, volumul coloanei, suprafaţa ei totală.

Soluţie. Muchiile cuburilor sînt: $l_1 = a$, $l_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $l_3 = \frac{a}{2}$, $l_4 = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \ldots$

a). Înălţimea coloanei de cuburi este:

$$h = a + \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{4} + \ldots = \frac{2a}{2-\sqrt{2}} = a(2+\sqrt{2}).$$

b). Volumul coloanei este:

$$V = a^3 + \frac{a^3}{4} + \frac{a^3}{16} + \frac{a^3}{64} + \ldots = \frac{4a^3}{3}.$$

c). Pentru aflarea suprafeţei totale S a coloanei se observă că la toate cuburile, patru din feţele lor rămîn neacoperite, în afară de primul cub, care are şi baza sa liberă. La primul cub, din faţa pe care stă cubul al doilea, rămîne neacoperită:

$$a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

La cubul al doilea, partea neacoperită este $\frac{a^2}{4}$. La al treilea cub: $\frac{a^2}{8}$ etc. Deci, suma tuturor acestor părți neacoperite este:

$$S_1 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \ldots = a^2.$$

Rezultă că suprafața totală a coloanei este $S = a^2 + 4\left(a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \ldots\right) + a^2 = 10a^2$.

6.11. a) Să se arate că dacă într-un paralelipiped dreptunghic diagonala d este cel mult egală cu unitatea, atunci aria totală S a acestui paralelipiped este cel mult egală cu două unități pătratice.

b). Cînd aria poate fi minimă? Dar egală cu 2?

(G.M.B., 4995, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Laturile paralelipipedului fiind a, b, c și diagonala d avem

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 \leqslant 1. \quad \text{Aria} \quad S = 2(ab + bc + ca) \leqslant \leqslant 2(a^2 + b^2 + c^2) \leqslant 2.$$

b). Cînd $b = c = 0, \Rightarrow a \leqslant 1$, $S = 0$ (minimum), iar dacă $S = 2$ atunci $ab + bc + ca = 1$. Dar $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca = 1$, dar $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 1$ rezultă că $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca = 1 \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $(3a^2 = 1)$.

6.12. Poligoanele regulate $A_1A_2 \ldots A_{4n}$, $B_1B_2 \ldots B_{4n}$ sînt bazele unei prisme drepte. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_{4n}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{4n}$ sînt distanțele de la vîrfurile $A_1, A_2, \ldots, A_{4n}$, $B_1, B_2, \ldots, B_{4n}$ la un plan iar d distanța de la centrul prismei la același plan, atunci

$$\sum_{i=1}^{4n} (a_i + b_i) = 8nd.$$

(G.M., 15313, *M. Postolache*).

Soluție. Fie $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{4n}, B'_1, B'_2 \ldots, B'_{4n}$ picioarele perpendicularelor coborîte din vîrfurile $A_1, A_2, \ldots, A_{4n}, B_1, B_2, \ldots, B_{4n}$ pe planul π.

În trapezele dreptunghice

$$A_1A'_1B_{2n+1}B'_{2+1},\ A_2A'_2B_{2n+2}B'_{2n+2},\ \ldots,\ A_nA'_nB_{3n}B'_{3n},$$
$$A_{n+1}A'_{n+1}B_{3n+1}B'_{3n+1},\ \ldots,\ A_{2n}A'_{2n}B_{4n}B'_{4n},$$
$$A_{2n+1}A'_{2n+1}B_1B'_1,\ \ldots,\ A_{3n}A'_{3n}B_nB'_n,$$
$$A_{3n+1}A'_{3n+1}B_{n+1}B'_{n+1},\ \ldots,\ A_{4n}A'_{4n}B_{2n}B'_{2n},$$

d este linie mijlocie.

Aplicînd proprietatea liniei mijlocii într-un trapez avem:

$$2d = a_1 + b_{2n+1} = a_2 + b_{2n+2} = \ldots = a_n + b_{3n} =$$
$$= a_{n+1} + b_{3n+1} = \ldots = a_{2n} + b_{4n} = a_{2n+1} + b_1 = \ldots =$$
$$= a_{3n} + b_n = a_{3n+1} + b_{n+1} = \ldots = a_{4n} + b_{2n}.$$

Din cele 4 egalități avem:

$$2 \cdot 4n \cdot d = a_1 + a_2 + \ldots + a_{4n} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{4n},$$

de unde

$8nd = \sum_{i=1}^{4n} a_i + \sum_{i=1}^{4n} b_i$, egalitate ce se mai poate scrie și

$$\sum_{i=1}^{4n} (a_i + b_i) = 8nd.$$

6.13. Se consideră în spațiu două paralelograme $ABCD$ și $A'B'C'D'$ așezate oricum. Să se demonstreze că: a). mijloacele segmentelor AA', BB', CC', DD' formează un paralelogram $MNPQ$; b). condiția ca $MNPQ$ să fie dreptunghi este ca paralelogramele construite cu perechile de vectori $A'B'$, AB și $A'D'$, AD (cu vîrful comun A') să aibă diagonalele ce pleacă din A' perpendiculare.

Soluție vectorială. a). Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor AA', BB'. CC', DD'. Deoarece $A'B'C'D'$

este paralelogram avem, evident, egalitatea vectorială $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$. Însă, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}$ și $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC'}$.

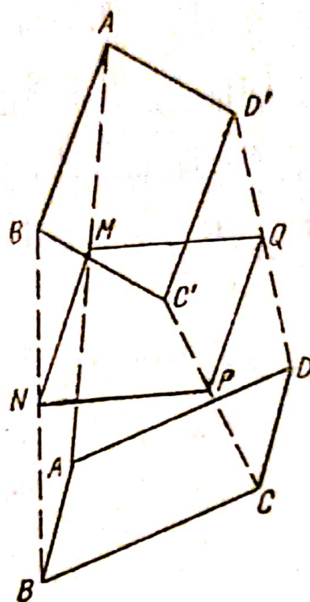


Fig. 6.13

Egalînd cele două expresii și ținînd seama că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ obținem:

$\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{CC'}$ și deci: $\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} =$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{D'D} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}. \qquad (1)$$

Dar: $\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{MA}$; $\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BN}$ etc.

astfel că relația se scrie: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{CP}$.

Adunînd cu relația $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ obținem:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CP}$ sau $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ care arată că laturile MN și QP sînt egale și paralele, deci figura $MNPQ$ este paralelogram.

Proprietatea fiind valabilă pentru orice așezare a paralelogramelor date în spațiu, se păstrează și în cazul cînd cele două paralelograme sînt în același plan.

b). Condiția ca $MNPQ$ să fie dreptunghi este $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$. Însă:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AB});$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DD'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AD}).$$

Lăsînd factorul 1/4 la o parte, condiția de perpendicularitate devine:

$$(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AD}) = 0.$$

Fiecare paranteză reprezintă vectorul dirijat după diagonala ce pleacă din A' a paralelogramului respectiv și deoarece produsul scalar e nul cei doi vectori sînt perpendiculari, deci diagonalele paralelogramelor sînt perpendiculare.

6.14. O prismă dreaptă are ca bază un triunghi ABC cu laturile $AB = 6$ m, $BC = 10$ m, $AC = 14$ m, muchiile laterale fiind AA', BB', CC', DD'.

Un plan care trece prin latura AC întîlnește muchia BB' într-un punct M astfel că $\sphericalangle AMC = 90°$.

a). Să se calculeze tangenta unghiului diedru format de planul secțiunii AMC cu planul orizontal.

b). Să se calculeze raza r a sferei înscrise în piramida $ABCM$.

(G.M., 13158, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$ sau

$$196 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cos B \Rightarrow \cos B = -\frac{60}{120} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sphericalangle B = 120°.$$

Notăm $BB' = x$ şi deoarece unghiul $AMC = 90°$ avem:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 \text{ sau } 196 = (6 + x)^2 + (10 + x)^2 = \\ = 2x^2 + 32x + 136.$$

Rezultă $x^2 + 16x - 30 = 0$, $x_{1,2} = -8 \pm \sqrt{94}$, convine numai

$$x = -8 + \sqrt{94} = -8 + 9{,}8 = 1{,}8 \text{ m}.$$

Aria triunghiului ABC este $\sqrt{15 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 1} = \sqrt{75 \cdot 9} = 15\sqrt{3}$,

iar înălţimea BB_2 dusă din B este $\frac{30\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{7}$.

Fie α unghiul diedru căutat.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{BB_2} = \frac{1 \cdot 8 \cdot 7}{15 \cdot \sqrt{3}} = \frac{12{,}6 \cdot \sqrt{3}}{45} = \\ = \frac{12{,}6 \cdot 1{,}73}{45} = 0{,}483.$$

b). Raza sferei înscrise este raportul dintre $\frac{3V}{S}$, unde V este volumul piramidei, iar S este aria totală a piramidei.

$$V = \frac{15\sqrt{3} \cdot 15\sqrt{3}}{3 \cdot 7} = \frac{225}{7} \text{ m}^3.$$

6.15. Un paralelipiped dreptunghic are înălţimea egală cu b şi baza $ABCD$ respectiv $A'B'C'D'$ pătrate de latură a. Pe semidreptele BB' şi DD' se iau segmentele BM respectiv DN de lungime x. Să se găsească forma secţiunii definită de planul AMN în paralelipiped în funcţie de x.

Soluţie. 1. Dacă $x = 0$, M şi N coincid cu B respectiv D deci secţiunea coincide cu pătratul $ABCD$.

2. Dacă $0 < x \leqslant \frac{b}{2}$, planul intersectează fețele lateral paralele două cîte două, după cîte două drepte respectiv paralele. Astfel (fig. 6.15 a) $AN \parallel MP$ și $AM \parallel NP$ (P fiind intersecția planului de secțiune cu

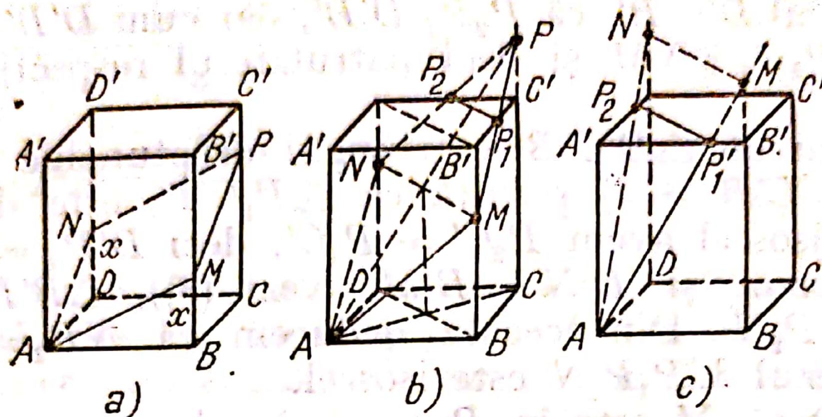


Fig. 6.15 a, b, c

muchia CC'). Deci secțiunea $AMPN$ este un paralelogram. Deoarece triunghiurile ABM și ADN sînt egale, căci $AB = AD = a$, $BM = DN = x$ și sînt dreptunghice, rezultă că $AM = AN$, adică paralelogramul $AMPN$ este romb.

3. Dacă M (fig. 6.15 b) se găsește între mijlocul muchiei BB' și B', $M \neq B'$, secțiunea este un pentagon format din triunghiul AMN și patrulaterul MP_1P_2N (P_1 și P_2 sînt intersecțiile planului cu $B'C'$ respectiv $D'C'$). S-a demonstrat la punctul 2 că AMN este isoscel. Vom demonstra că patrulaterul MP_1P_2N este trapez isoscel. Fie P intersecția planului de secțiune cu muchia CC' (cu prelungirea ei). Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $B'P_1M$ și $C'PP_1$ obținem:

$$\frac{B'M}{C'P} = \frac{B'P_1}{C'P_1}, \tag{1}$$

iar din asemănarea triunghiurilor dreptunghice,

$$\frac{D'N}{C'P} = \frac{D'P_2}{C'P_2}. \tag{2}$$

Dar

$$D'N = B'M = b - x \qquad (3)$$

și din cele două relații obținem $\frac{B'P_1}{C'P_1} = \frac{D'P_2}{C'P_2}$ ceea ce ne confirmă, (reciproca teoremei lui Tales) în triunghiul $D'C'B'$, că P_2P_1 $D'B'$, dar cum $D'B' \parallel NM$ avem $P_2P_1 \parallel NM$ și deci patrulaterul respectiv este trapez.

Deoarece $\triangle D'C'B'$ e triunghi dreptunghic isoscel $(D'C' = C'B' = a)$ rezultă că $\triangle P_2C'P_1$ este de asemenea isoscel avem $P_2C' = P_1C'$, deci $D'P_2 = B'P_1$. Cum avem și $D'N = B'M$ (vezi (3)), $\triangle B'P_1M = \triangle D'P_2N$. Din aceasta deducem că $NP_2 = MP_1$ și trapezul MP_1P_2N este isoscel.

4. Dacă M este în B sau pe prelungirea muchiei BB' secțiunea este un triunghi isoscel $AP_1'P_2'$ (fig. 6.15 c). În adevăr, $P_1'P_2' \parallel B'D'$, deci $A'P_1' = A'P_2'$, iar din egalitatea triunghiurilor dreptunghice $AA'P_1'$ și $AA'P_2$ rezultă că $AP_1' = AP_2'$.

5. Este posibil ca M să fie la infinit pe semidreapta BB' și atunci secțiunea degenerează în AA'.

6.16. Suma pătratelor distanțelor oricărui punct din spațiu la două vîrfuri opuse ale unui paralelipiped dreptunghic este egală cu suma pătratelor distanțelor aceluiași punct față de oricare alte două vîrfuri opuse ale aceluiași paralelipiped. Care este locul geometric al punctelor pentru care suma de mai sus este egală cu suma pătratelor dimensiunilor paralelipipedului?

Soluție. Fie AC', BD', CA' și DB' diagonalele paralelipipedului care sînt egale și concurente în punctul O. Fie P, un punct oarecare din spațiu. În triunghiul PAC', PO este mediană, deci:

$$AP^2 + C'P^2 = 2PO^2 + \frac{AC'^2}{2}.$$

În triunghiul PDB', avem, analog:

$$DP^2 + B'P^2 = 2PO^2 + \frac{DB'^2}{2}.$$

La fel şi în celelalte două triunghiuri PCA' şi $PD'B$. Dar cum $AC' = DB' = BD' = A'C$, rezultă $AP^2 + C'P^2 = DP'^2 + B'P^2 = \dots$

Acum, dacă $2PO^2 + \frac{AC'^2}{2} = L^2 + l^2 + I^2$, unde L, l şi I sînt dimensiunile paralelipipedului, şi cum $\frac{AC'^2}{2} = \frac{L^2 + l^2 + I^2}{2}$, rezultă

$$PO^2 = \frac{L^2 + l^2 + I^2}{4} = \frac{AC'^2}{4} = \left(\frac{AC'^2}{2}\right).$$

Deci locul este sfera circumscrisă paralelipipedului.

6.17. Fie un paralelipiped oblic la care cele trei muchii ce pleacă dintr-un vîrf fac două cîte două unghiuri de 60°. Ştiind că lungimea muchiilor sînt a, b, c, să se afle volumul acestui paralelipiped.

Soluţie. Aria bazei este $S = ab \sin 60° = \frac{ab\sqrt{3}}{2}$.

Fie $ABCD$ baza unde $\sphericalangle BAD = 60°$; $\sphericalangle A'AB = 60°$; $\sphericalangle A'AD = 60°$. Notăm $A'H$ înălţimea paralelipipedului şi ducem $HM \perp AB$, rezultă $A'M \perp AB$, $A'H \perp MH$. Dacă $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, avem:

$$AM = c \cdot \cos 60° = \frac{c}{2}; \quad AH = \frac{AM}{\cos 30°} = \frac{c\sqrt{3}}{3};$$

$$A'H^2 = c^2 - AH^2 = c^2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2c^2}{3};$$

$$V = S \cdot A'H = \frac{ab\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{abc\sqrt{2}}{2}.$$

6.18. Toate feţele unui paralelipiped sînt nişte romburi egale. Unul din unghiurile diedre ascuţite este egal cu 2φ, iar latura paralelipipedului este egală cu a. Să se afle volumul paralelipipedului.

Soluţie. Din D' şi A coborîm perpendicularele AM, $D'M$ pe muchia $A'B'$ a paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$. Ducem apoi înălţimea AN a paralelipipedului.

Conform enunțului avem $\sphericalangle AMD' = 2\varphi$. Notînd $\sphericalangle AA'B' = \sphericalangle AA'D' = \alpha$, avem $AM = a \sin \alpha$, $AN = a \sin \alpha \sin 2\varphi$, aria $A'B'C'D' = a^2 \sin \alpha$.

Deci vol. $ABCDA'B'C'D' = a^3 \sin^2 \alpha \sin 2\varphi$.

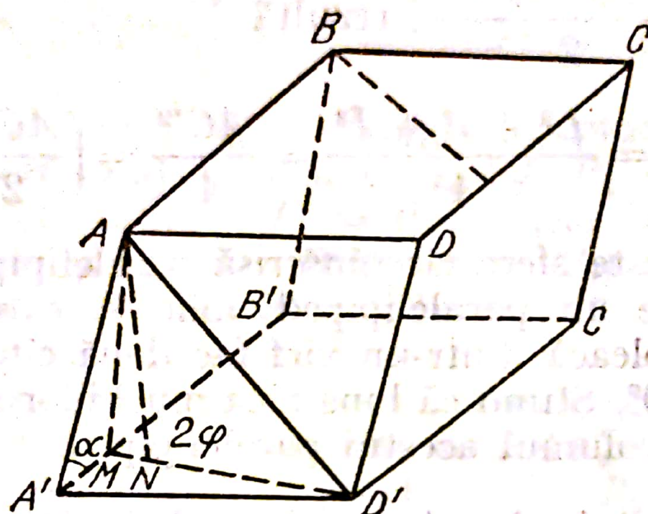


Fig. 6.18

Rămîne să determinăm $\sin \alpha$ în funcție de valorile date.
În triunghiul AMD' avem

$$AD' = 2AM \sin \varphi = 2a \sin \alpha \sin \varphi,$$

iar triunghiul $AA'D'$; $AD' = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$.

Prin urmare $2a \sin \alpha \sin \varphi = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$, de unde

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \varphi,$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{4 \operatorname{cosec}^2 \varphi - \operatorname{cosec}^4 \varphi}{2}.$$ Cu aceasta

$$\text{vol. } ABCDA'B'C'D' = \frac{4 \operatorname{cosec} \varphi - \operatorname{cosec}^3 \varphi}{2} \cos \varphi \cdot a^3.$$

6.19. O piramidă regulată $VABCD$ are ca bază un pătrat cu latura a iar muchiile laterale sînt egale cu diagonala pătratului de la bază. Printr-un punct M situat la mijlocul muchiei AV se duce un plan perpendicular pe muchia CV.

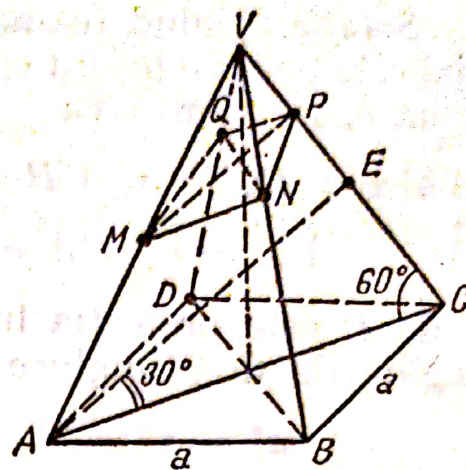


Fig. 6.19

a). Să se afle aria secțiunii făcută de acest plan în piramidă.

b). Care este unghiul făcut de planul secțiunii cu baza piramidei.

Soluție. Fie P punctul de intersecție al muchiei CV cu planul dus prin M perpendicular pe CV și fie $AE \perp CV$.

a). $MP = \frac{AE}{2} = \frac{VO}{2} = \frac{h}{2}$, unde O este centrul bazei piramidei.

Fie Q și N intersecțiile planului dus prin M respectiv cu VD și VB.

$NQ = \frac{BD}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{\sqrt{3}}$. Aria $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN \cdot NQ) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{h^2\sqrt{3}}{18} \text{ unde } h =$$

$$= a\sqrt{2}\sin 60° = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ deci } S =$$

$$= \frac{a^2 \cdot 2 \cdot 3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

6.20. Să se arate că într-un tetraedru echifacial $VABC$, pătratul înălțimii este de două ori puterea ortocentrului unei fețe față de cercul ei circumscris.

Soluție. Ținînd seama că într-un tetraedru echifacial cele patru fețe sînt egale și muchiile opuse două cîte două egale vom avea

$$VA = BC = a;\ VB = CA = b;\ VC = AB = c,$$

$$VP = h;\ PA = x,\ PB = y,\ PC = z,$$

unde P este proiecția lui V pe planul ABC. Din triunghiurile dreptunghice VPA, VPB, VPC deducem

$$a^2 - x^2 = b^2 - y^2 = c^2 - z^2 = h^2. \quad (1)$$

Fie S aria unei fețe. În acest caz vom avea

$$\frac{1}{4}\sum\sqrt{2(x^2y^2 + c^2x^2 + c^2y^2) - (x^4 + y^4 + c^4)} = S. \quad (2)$$

Eliminînd valorile lui x^2, y^2, z^2 din (1) și (2) obținem

$$h^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)\,(b^2 + c^2 - a^2)\,(c^2 + a^2 - b^2)}{8S^2},$$

$$h^2 = 16\, R^2 \cos A \cos B \cos C, \quad (3)$$

unde R este raza cercului circumscris unei fețe, iar A, B, C unghiurile acelei fețe. Puterea ortocentrului H al feței ABC față de cercul ei circumscris este dată de relația $P = HA \cdot HM$. Dar $HA = 2R \cos A$ și $HM = 4R \cos B \cos C$. Punctul M se află la intersecția înălțimii HA cu cercul circumscris. Deci,

$$P = 8R^2 \cdot \cos A \cos B \cos C. \quad (4)$$

Comparînd relațiile (3) și (4) obținem $h^2 = 2P$, ceea ce trebuia arătat.

6.21. Fie un tetraedru $VABC$ căruia îi desfacem fețele laterale și le așezăm prin rotație pe planul ABC formînd triunghiurile BCV_a, ACV_b, ABV_c.

Să se arate că perpendicularele duse din V_a, V_b, V_c respectiv pe BC, AC, AB sînt concurente.

Folosind aceeași metodă să se arate că înălțimile unui triunghi sînt concurente.

(R.M.F., 2401, 1952, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. În tetraedrul $VABC$, ducem înălțimea VV' și înălțimile VA', VB', VC' celor trei fețe laterale. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $V'A'$, $V'B'$, $V'C'$, sînt perpendiculare respectiv pe BC, CA și AB. Planele $VV'A'$, $VV'B'$, $VV'C'$ sînt perpendiculare pe planul ABC.

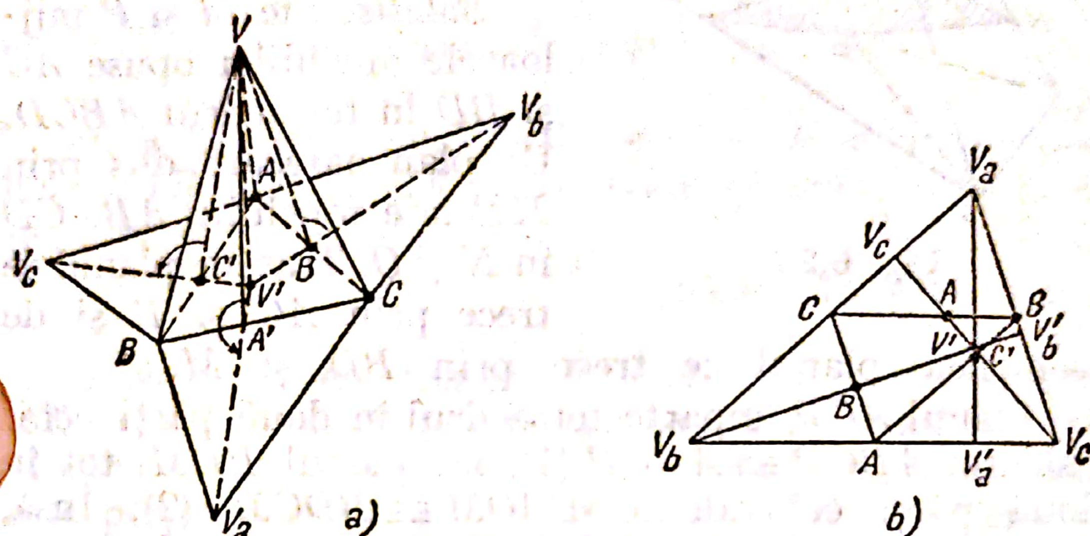


Fig. 6.21 *a*, *b*

Desfăcînd prin rotire fețele laterale și așezîndu-le în planul bazei ABC dreapta V_aA' rămîne perpendiculară pe BC, deci V_a, A', V' sînt în linie dreaptă. La fel $V_bB'V'$ și $V_cC'V'$ sînt în linie dreaptă, deci concurente în V'.

Arătăm că înălțimile unui triunghi oarecare sînt concurente, analog ca mai sus, considerînd un tetraedru cu toate fețele egale (echifacial), căruia desfăcîndu-i fețele laterale pe planul bazei ABC obținem un triunghi $V_aV_bV_c$ unde ABC sînt mijloacele laturilor. Dreptele $V_aA'V'$, $V_bB'V'$ și $V_cC'V'$ sînt înălțimile triunghiului $V_aV_bV_c$ și care prelungite sînt și înălțimile triunghiului ABC. De asemenea, din orice triunghi ascuțitunghic ABC putem forma un tetraedru cu toate fețele egale cu triunghiul median triunghiului ABC prin îndoirea celor trei triunghiuri dinspre vîrfuri, respectiv în jurul dreptelor ce unesc mijloacele laturilor triunghiului ABC, din care fac parte.

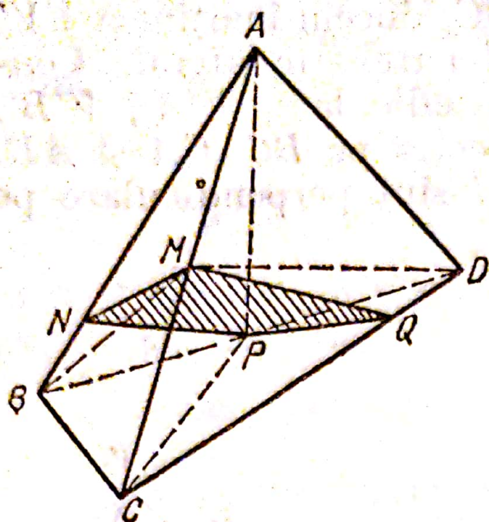


Fig. 6.22

6.22. Să se demonstreze că orice plan care trece prin mijloacele a două muchii opuse ale unui tetraedru oarecare îl împart în două părți echivalente.

Soluție. Fie M și P mijloacele muchiilor opuse AC și BD în tetraedrul $ABCD$. Un plan oarecare dus prin MP taie muchiile AB, CD în N și Q. Trasăm planul ce trece prin AC și P și de asemenea planul ce trece prin BD și M.

Planul ACP împarte tetraedrul în două părți echivalente $ABCP \equiv ADCP$ (1), iar planul BDM tot în două părți echivalente $BAOM \equiv BDCM$ (2). Însă, ținînd seama de planul $MNPQ$ (1) și (2) devin

$$AMNP + BMNP + CBMP = CMPQ + DMPQ + \\ + ADMP. \qquad (1')$$

$$BMNP + AMNP + ADMP = DMPQ + CMPQ + \\ + CBMP. \qquad (2')$$

Adunînd și scăzînd (1′) și (2′) obținem

$$AMNP+BMNP=CMPQ+DMPQ; \; CBMP=ADMP$$

și cum $AMNP = CMPQ$; $BMNP = DMPQ$, rezultă că

$$AMNP+ADMP+DMPQ=CMPQ+BCMP+ADMP$$

sau

$$ADMNPQ = BCMNPQ.$$

6.23. Fie A, B, C punctele de intersecție ale unui plan π cu muchiile triedrului tridreptunghic de vîrf O. Să se demonstreze:

a). Că punctul O se proiectează pe planul π în ortocentrul H al triunghiului ABC și că aria triunghiului OAB este media geometrică a ariilor triunghiurilor ABC și HAB.

b). Că între segmentele OH, OA, OB, OC avem relația

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

c). α, β, γ fiind unghiurile pe care OH le face cu planele OAB, OBC, OCA să se arate că $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$.

(G.M.F.B., 4137, 1960).

Soluție. Ducem înălțimile AM, BN, CP ale feței ABC și fie H punctul de concurență al acestor înălțimi. Muchia OA este perpendiculară pe planul OBC deci este perpendiculară pe BC. Deoarece BC este perpendiculară pe AM și pe OA rezultă că BC este perpendiculară pe planul OAM. Invers, planul OAM este perpendicular pe BC deci și pe planul ABC. La fel, planele OBN și OCP sînt perpendiculare pe planul ABC; cele trei plane OAM, OBN și OCP avînd comună dreapta OH și fiind perpendiculară pe planul ABC rezultă că OH este perpendiculară pe planul ABC adică H este proiecția lui O pe planul ABC.

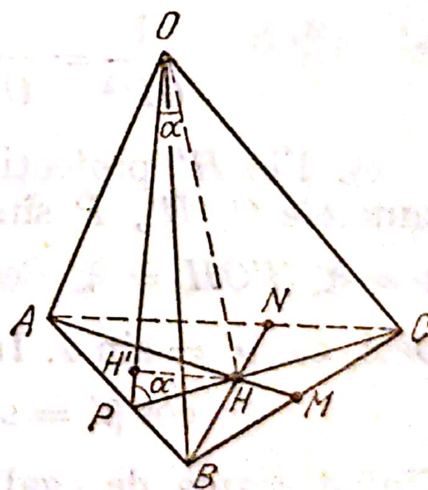


Fig. 6.23

Avem

$S_{HAB} = S_{OAB} \cdot \cos \sphericalangle OPH$,

și $S_{OAB} = S_{ABC} \cdot \cos \sphericalangle OPH$,

de unde rezultă că $S^2_{OAB} = S_{HAB} \cdot S_{ABC}$.

b). Notăm cu α', β', γ' unghiurile formate de planele OAB, OBC și OCA respectiv cu planul ABC. Avem

$$S_{OAB} \cdot \cos \alpha' + S_{OBC} \cdot \cos \beta' + S_{OCA} \cdot \cos \gamma' = S_{ABC}.$$

Însă

$$S_{OAB} = S_{ABC} \cdot \cos \alpha'; \quad S_{OBC} = S_{ABC} \cdot \cos \beta'; \quad S_{OCA} = S_{ABC} \cdot \cos \gamma'.$$

De unde rezultă că

$$S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OCA} = S^2_{ABC} \tag{1}$$

și

$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1. \tag{2}$$

Din egalitatea (1) obținem

$$S^2_{ABC} = \frac{1}{4}(OB^2 \cdot OC^2 + OC^2 \cdot OA^2 + OA^2 \cdot OB^2).$$

De asemenea

$$V^2_{OABC} = \frac{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2}{36} = \frac{OH^2 \cdot S^2_{ABC}}{9},$$

sau

$$\frac{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2}{36} = \frac{OH^2(OB^2 \cdot OC^2 + OC^2 \cdot OA^2 + OA^2 \cdot OB^2)}{36},$$

de unde rezultă

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

c). Fie H' proiecția lui H pe fața OAB. Deoarece punctele O, H', P sînt coliniare rezultă că

$$\alpha = \sphericalangle H'OH = \sphericalangle POH = 90° - \sphericalangle OPH = 90° - \alpha'.$$

Deci, $\cos \alpha' = \sin \alpha$. În mod analog obținem:

$$\cos \beta' = \sin \beta; \quad \cos \gamma' = \sin \gamma.$$

Ținînd seama de egalitatea (2) obținem:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1.$$

6.24. Lungimea unei muchii laterale a unei piramide regulate exagonale este m, iar raportul între aria bazei și aria laterală a piramidei este egal cu $\cos \theta$. Să se afle volumul piramidei.

Soluție. Notăm cu a o latură a bazei și cu h înălțimea piramidei. Apotema exagonului de bază este $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Înălțimea unei fețe laterale dusă din vîrful piramidei este $\frac{a\sqrt{3}}{2\cos\theta}$, înălțimea piramidei este $h = \frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta}{2}$.

Avem $m^2 = \frac{3a^2 \cdot \operatorname{tg}^2\theta}{4} + a^2$ de unde $a = \frac{2m}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2\theta + 4}}$;

$h = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \operatorname{tg}\theta}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2\theta + 4}}$; $V = \frac{6 \cdot m^3 \cdot \operatorname{tg}\theta}{\sqrt{(3\operatorname{tg}^2\theta + 4)^3}}$.

6.25. Se consideră piramida regulată $VABC$ avînd $AB = BC = CA = a$ și $VA = VB = VC = b$, $(b > a)$. Se notează cu P proiecția vîrfului A pe muchia VB. Să se calculeze:

1°). Aria triunghiului PAC.

2°). Volumul tetraedrului $PAVC$.

Soluție. 1°. Triunghiurile isoscele VAB și VBC sînt egale. De aceea $CP \perp BV$; $CP = AP$. Rezultă că muchia VB este perpendiculară pe planul APC. Fie VH înălțimea triunghiului VAB. Găsim $VH = \sqrt{VA^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Scriind aria triunghiului VAB în două moduri diferite deducem

$$AF = \frac{AB \cdot VH}{VB} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Fie PQ înălțimea triunghiului isoscel PAC. Obținem

$$PQ = \sqrt{AP^2 - AQ^2} = \frac{a}{2b}\sqrt{3b - a^2},$$

și deci

$$\text{Aria } \triangle PAC = \frac{1}{2} AC \cdot PQ = \frac{a^2}{4b}\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

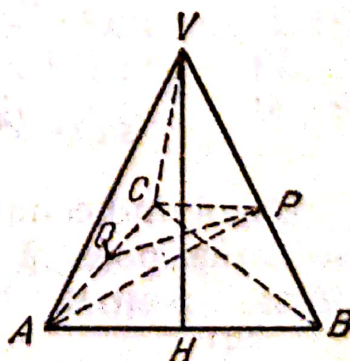


Fig. 6.25

2) Deoarece $VB \perp (APC)$, segmentul VP este înălțime în piramida $PAVC$. Găsim

$$PV = \sqrt{AV^2 - AP^2} = \frac{2b^2 - a^2}{2b} \text{ și deci}$$

$$\text{Vol } (PAVC) = \frac{1}{24} \frac{a^2(2b^2 - a^2)}{b^2} \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

6.26. Volumul unei piramide patrulatere este de 1280 cm³, iar aria totală de 800 cm². Să se afle latura bazei și înălțimea piramidei.

Soluție. Însemnînd lungimea laturii bazei cu x și a înălțimii piramidei cu y, pe baza datelor problemei, se ajunge inițial la sistemul de ecuații:

$$\frac{x^2y}{3} = 1280; \quad \frac{4x\sqrt{y^2 + \frac{x^2}{4}}}{2} + x^2 = 800,$$

și apoi sistemul echivalent:

$$x^2y = 3840; \quad x\sqrt{4y^2 + x^2} + x^2 = 800.$$

În prima etapă, se transformă ecuația a 2-a într-o ecuație rațională:

$$4x^2y^2 + x^4 = 640\,000 - 1\,600x^2 + x^4;$$
$$x^2y^2 = 160\,000 - 400x^2.$$

Se elimină apoi necunoscuta y între această ecuație și prima ecuație, după care se obține:

$$x^2 \cdot \frac{3840^2}{x^4} = 160\,000 - 400x^2;$$

$$\text{sau} \quad x^4 - 400x^2 + 36\,864 = 0.$$

Rezolvînd ecuația bipătrată, reținem soluțiile pentru problema noastră $x_1 = 12$ cm, $x_2 = 16$ cm, iar apoi aflăm, pentru înălțime, valorile corespunzătoare $y_1 = \frac{80}{3}$ cm, $y_2 = 15$ cm.

Se găsesc deci două piramide: una cu latura bazei de 16 cm și înălțimea de 15 cm, iar alta cu latura bazei de 12 cm și înălțimea de $26\frac{2}{3}$ cm.

6.27. Într-o piramidă triunghiulară $ABCD$, muchia CD este perpendiculară pe planul ABC. Se cunoaște: $AB = CD = 4$ m, $AC = 3$ m, $BC = 5$ m.

a). Să se arate că $AD = BC$.

b). Să se calculeze aria totală a piramidei.

c). Să se calculeze volumul piramidei.

(G.M.B., 14859, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Avem $\sphericalangle BAC = 90°$ deoarece $AB^2 + AC^2 = BC^2$ adică $3^2 + 4^2 = 5^2$. $DC \perp$ planul ABC deci $DC \perp AC \Rightarrow AD^2 = AC^2 + CD^2 = 9 + 16 = 25$.

Rezultă $AD = 5 \Rightarrow AD = BC$.

b). Aria $ABC = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ m²; aria $DBC = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ m²; aria $ACD = 6$ m².

Triunghiul BCD și triunghiul ABD sînt egale avînd laturile egale deci aria $ABD = 10$ m². Aria totală este $6 + 10 - 10 + 6 = 32$ m².

c). Volumul este $\frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 4 = 8$ m³.

6.28. Se dă un tetraedru $ABCD$ a cărui bază ABC este un triunghi dreptunghic în C, catetele BC și CA fiind egale respectiv cu a și b. Fața DAB este perpendiculară pe bază, iar fețele DBC și DCA sînt înclinate față de bază cu unghiuri egale respectiv cu unghiurile din A și B ale bazei. Fie E proiecția lui D pe AB iar F și G proiecțiile punctului E respectiv pe BC și AC. Să se arate că:

a). $GD = AE$ și $DF = EB$.

b). Triunghiurile ADC, DCB și ADB sînt echivalente. Să se calculeze în funcție de a și b volumul acestui tetraedru și aria lui laterală.

(G.M.F.B., 3396, 1958, *E. Vișa*).

Soluție. a) Este evident că $\sphericalangle A = \sphericalangle DFE$ și $\sphericalangle B = \sphericalangle DGE$. Notăm $AE = x$ și $EB = y$. Triunghiurile BEF și BAC sînt asemenea, de unde rezultă

$$\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{EF}{b} \text{ adică } EF = \frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

În mod analog, $GE = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Deoarece $DE = EF \cdot \operatorname{tg} A = \dfrac{by}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$ și $DE = GE \cdot \operatorname{tg} B = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \dfrac{b}{a} = \dfrac{bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Rezultă sistemul de ecuații

$$ay = bx,$$

$$x + y = \sqrt{a^2+b^2},$$

care rezolvat ne dă

$$x = \frac{a \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{a+b}; \quad y = \frac{b \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Din triunghiul DGE rezultă

$$GD = \frac{DE}{\sin B} = \frac{DE \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{b}.$$

În mod analog

$$DF = \frac{DE}{\sin B} = \frac{DE \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Dar

$$DE = \frac{bx}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{a+b} = \frac{ab}{a+b}.$$

Deci

$$DF = \frac{b \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{a+b}; \quad DF = \frac{a \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Rezultă

$$DG = AE \text{ și } EB = DF.$$

b). $S_{ADB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{ab}{a + b};$

$$S_{DAC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DG = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b};$$

$$S_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b}.$$

Deci triunghiurile ADB, DAC și DBC sînt echivalente avînd aceeași arie

$$A_{\text{laterală}} = 3\,S_{ADB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b};$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \frac{DE}{3} = \frac{1}{6}\,ab \cdot \frac{ab}{a + b} = \frac{a^2b^2}{6(a + b)}.$$

6.29. Fie tetraedrul $SABC$ astfel că $SA = SB = SC = AB = AC = a$.

a). Să se demonstreze că înălțimea SO (perpendiculara din vîrful S pe baza ABC), perpendiculara comună a muchiilor SA și BC și perpendiculara din A pe fața SBC sînt concurente.

b). Să se determine volumul tetraedrului în funcție de a și unghiul ω al fețelor SAB și SAC.

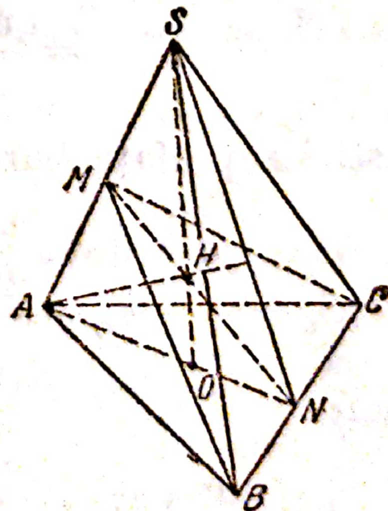


Fig. 6.29

Soluție. a). Muchiile $SA = SB = SC$ fiind egale înseamnă că piciorul înălțimii SO este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Triunghiurile SAB și SAC fiind echilaterale cu aceeași latură a sînt egale. Deci, dacă notăm cu M mijlocul muchiei SA, urmează că $BM = MC$ și $BM \perp SA$, $CM \perp SA$, iar $\sphericalangle BMC = \omega$.

AO taie pe BC în N și evident $AN \perp BC$ și N este la mij-

locul lui BC, căci $AB = AC$. Unind S cu N, $SN \perp BC$. Triunghiul BMC fiind isoscel MN este perpendiculară pe BC și totodată perpendiculară pe SA fiindcă SA este perpendiculară pe planul BMC. Așa că MN este perpendiculara comună a muchiilor SA și BC. Ca să arătăm că SO și MN sînt concurente, trebuie să arătăm că se află în același plan SAN. Fie H punctul lor de intersecție. El este ortocentrul triunghiului SAN și deci $AH \perp SN$. După o reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare $AH \perp SBC$.

b). Pentru calculul volumului va trebui să aflăm aria bazei ABC care e un triunghi isoscel cu baza BC și $AB=AC=a$. Baza BC o calculăm din triunghiul isoscel BMC cu unghiul din vîrf ω.

Avem: $NC = MC \cdot \sin \frac{\omega}{2}$ și $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ înălțimea triunghiului echilateral de latură a.

Deci:

$$BC = a\sqrt{3} \sin \frac{\omega}{2}.$$

Înălțimea $AN = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4} \sin^2 \frac{\omega}{2}} =$

$$= \frac{a}{2} \sqrt{4 - 3 \sin^2 \frac{\omega}{2}}.$$

Astfel suprafața bazei este:

$$S_b = \frac{a\sqrt{3} \sin \frac{\omega}{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{4 - 3 \sin^2 \frac{\omega}{2}};$$

sau:

$$S_b = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \sin \frac{\omega}{2} \sqrt{4 - 3 \sin^2 \frac{\omega}{2}}.$$

Înălţimea SO o calculăm din triunghiul dreptunghic SOA, unde $SA = a$ iar OA este raza cercului circumscris triunghiului isoscel ABC. Aceasta se află uşor ştiind că

$$a^2 = 2OA \cdot AN.$$

$$OA = \frac{a^2}{2AN} = \frac{a^2}{a\sqrt{4-3\sin^2\frac{\omega}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{4-3\sin^2\frac{\omega}{2}}}.$$

Deci

$$SO = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4-3\sin^2\frac{\omega}{2}}} = a\sqrt{\frac{5-3\sin^2\frac{\omega}{2}}{4-3\sin^2\frac{\omega}{2}}}.$$

Prin urmare:

$$V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}\cdot\sin\frac{\omega}{2}\sqrt{5-3\sin^2\frac{\omega}{2}}.$$

6.30. Într-un tetraedru regulat cu muchia egală cu a, notăm $h =$ înălţimea, $d =$ distanţa dintre două muchii neconcurente.

a). Să se determine aria secţiunii tetraedrului cu planul determinat de o înălţime şi o muchie concurentă cu aceasta.

b). Să se arate că $3h = 2d\sqrt{3}$.

(G.M.B., E:4535, *Gh. Bostan*)

Soluţie. a). Fie tetraedrul regulat $VABC$ cu $VA = VB = VC = AB = BC = CA = a$.

Notăm cu D mijlocul muchiei BC. Mediana VD a triunghiului echilateral VBC este şi înălţime, deci VD este apotema tetraedrului şi avem $VD = AD$.

Aria secţiunii cerute este egală cu aria triunghiului VAD.

$$BD = DC = \frac{a}{2};\quad VD^2 = VB^2 - BD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4};$$

$$VD = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Înălțimea triunghiului isoscel VDA este distanța $d = DE$.

$$d^2 = DE^2 = VD^2 - VE^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4};$$

$$d = DE = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$A = \frac{VA \cdot d}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}.$$

b). Aria $(VAD) = \frac{AD \cdot h}{2}$; $\frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}h}{2}$ sau

$$\frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{3} \cdot h}{4},$$

de unde

$$h = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{3}d}{3}.$$

6.31. Baza unei piramide este trapezul $ABCD$ cu unghiurile din A și D drepte, iar piciorul înălțimii piramidei este mijlocul laturii BC. Dacă V este vîrful piramidei să se arate că:

a). Muchiile VA și VD sînt egale.

b). Să se afle volumul piramidei știind că înălțimea trapezului este de 6 cm, linia mijlocie a trapezului este de 4 cm, iar muchia VA este de 13 cm.

Soluție. a). Fie F mijlocul lui AD și E mijlocul lui BC.

Dreapta EF, fiind paralelă cu AB, este perpendiculară pe AD. VE este perpendiculară pe planul $ABCD$; rezultă că $VE \perp EF$ (EF fiind în planul $ABCD$) și la fel $VE \perp BC$ și $VE \perp AD$.

Conform teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $VF \perp AD$. Atunci VF în triunghiul VAD este și mediană și înălțime, deci triunghiul VAD este isoscel: $VA = VD$.

b). $AD = 6$ cm, $EF = 4$ cm, $VA = 13$ cm.

Volumul piramidei este $V = \dfrac{A_{bazei} \cdot VE}{3}$.

$$A_{bazei} = \frac{(AB + CD)AD}{2} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AD \text{ dar}$$

$$\frac{AB + CD}{2} = EF, \text{ deci}$$

$$V = \frac{EF \cdot AD \cdot VE}{3} = \frac{4 \cdot 6 \cdot VE}{3} = 8 \cdot VE.$$

Din triunghiul dreptunghic VEF avem $VE^2 + VF^2 = EF^2$.

Din triunghiul dreptunghic VAF rezultă $VF^2 = VA^2 - AF^2$.

$$VE^2 = VA^2 - AF^2 - EF^2 = 13^2 - 3^2 - 4^2 = 169 - 9 - 16 = 144.$$

$$VE = 12 \text{ cm, de unde } V = 8 \cdot 12 = 96 \text{ cm}^3.$$

6.32. Pe muchiile unui triedru dreptunghic ABC se ia $VA = a$, $VB = b$, $VC = c$. Să se arate că înălțimea h a piramidei $VABC$ este dată de relația:

$$h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

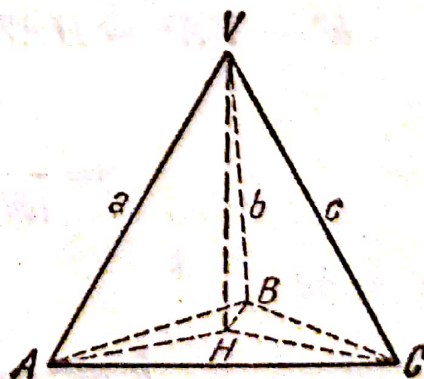


Fig. 6.32

Soluție. Avem:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$BC = \sqrt{b^2 + c^2},$$
$$CA = \sqrt{c^2 + a^2}.$$

Punctul H joacă rol de ortocentru în triunghiul ABC. În acest caz avem:

$$HA = AB\frac{\cos A}{\sin C} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{\cos A}{\sin C};$$

$$\cos A = \frac{AB^2+CA^2-BC^2}{2AB\cdot CA} = \frac{a^2+b^2+c^2+a^2-b^2-c^2}{2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+a^2)}} =$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+a^2)}},$$

$$\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1-\left(\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{c^4}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} = \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}.$$

Prin urmare:

$$HA = \sqrt{a^2+b^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{a^2\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+a^2)}\cdot\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2}} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

Înălțimea h a acestei piramide va fi:

$$h^2 = VA^2 - HA^2 = a^2 - \frac{a^2(b^2+c^2)}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} =$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

de unde

$$h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

6.33. Considerăm o piramidă exagonală regulată și notăm cu α unghiul diedru a două fețe opuse cu β unghiul diedru a două fețe alăturate și cu γ unghiul de la bază a unei fețe laterale. Să se demonstreze relația:

$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}=4\cos^2\gamma.$$

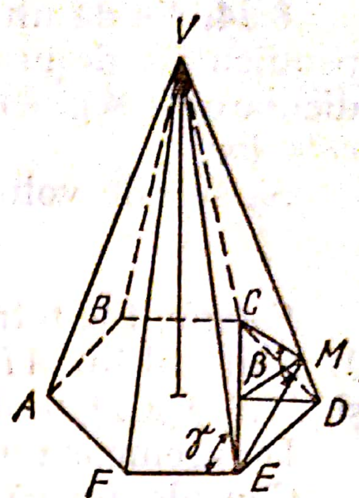


Fig. 6.33

Soluție. Avem: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a_6}{A}$; a_6 fiind apotema exagonului (a bazei) iar A_6 apotema piramidei. Dacă l e latura bazei, se observă că:

$$a_6=\frac{l\sqrt{3}}{2};\quad A_6=\frac{l\,\mathrm{tg}\,\gamma}{2}.$$

Prin urmare:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\mathrm{tg}\,\gamma};\quad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{3}{\mathrm{tg}^2\gamma}.$$

Unghiul β făcut de două fețe alăturate este unghiul format de perpendicularele CM și ME pe VD.

Avem evident:

$$\sin\frac{B}{2}=\frac{\frac{CE}{2}}{ME}=\frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l\sin\gamma}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin\gamma}.$$

Prin urmare:

$$\sin^2\frac{B}{2}=\frac{1-\cos\beta}{2}=\frac{3}{4\sin^2\gamma}.$$

Deci:

$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}=4\cos^2\gamma.$$

6.34. Se dă un tetraedru cu două muchii opuse perpendiculare de lungime a respectiv b și ambele perpendiculare pe segmentul de lungime c care unește mijloacele lor.

Să se afle volumul piramidei.

(Concurs elevi, 1975).

Soluție. Fie tetraedrul $ABCD$ unde $AB = a$, $CD = b$, M mijlocul lui AB, N mijlocul lui CD, iar $MN \perp AB$ și $MN \perp CD$ unde $MN = c$.

De asemenea avem $AB \perp CD$.

Considerăm că tetraedrul dat este format de două piramide cu baza comună triunghiul ABN și ca vîrfuri respectiv C și D. Aceste două piramide sînt egale. Aria $ABN = \frac{AB \cdot MN}{2} = \frac{ac}{2}$, iar MC și DN sînt înălțimile celor două piramide egale cu $\frac{b}{2}$.

$$v_1 = v_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{ac}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{abc}{12} \Rightarrow v = v_2 = \frac{abc}{6}.$$

6.35. Într-un plan π se dă un triunghi ABC dreptunghic în A. Pe perpendicularele din B și C pe acest plan luăm punctele mobile B', respectiv C'. Fie unghiul $C'AB' = \alpha$; unghiul $B'AB = \beta$; unghiul $C'AC = \gamma$, iar lungimile $BB' = b$ și $CC' = c$. Se cere:

a). Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $AB'C'$.

b). Să se demonstreze că $\alpha \leqslant 90°$. În ce caz avem egalitate?

c). Să se arate că $\frac{V}{b+c}$ este constant, unde V este volumul corpului $ABCC'B'$.

d). Notînd cu φ unghiul diedru format de planul triunghiului $AB'C'$ cu planul P, să se arate că avem relația:

$$\sin\alpha \cos\varphi = \cos\beta \cos\gamma.$$

Soluție. a). Mijlocul lui $B'C'$ se proiectează pe mijlocul lui BC'. Locul lui G' centrul de greutate al tri-

unghiului $AB'C'$ este perpendiculara în centrul de greutate al triunghiului ABC pe plan.

b). $B'C'^2 = BC^2 + (b - c)^2$; $AB'^2 = AB^2 + b^2$; $AC'^2 = AC^2 + c^2$;

$$\cos \alpha = \frac{2bc}{2\sqrt{(AB^2 + b^2)(AC^2 + c^2)}} \geqslant 0, \text{ deci } \alpha \leqslant 90°.$$

Egalitate dacă $b = 0$ sau $c = 0$.

c). $V = \frac{1}{3}(b + c)S_{ABC}$, deci $\frac{V}{b + c} = \text{constant}$.

d). Avem:

$$\cos \varphi = \frac{2S_{ABC}}{2S_{AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC' \sin \alpha} = \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha}$$

deoarece

$$AB = AB' \cos \beta, \quad AC = AC' \cos \gamma.$$

6.36. Pe baza ABC a unei piramide $SABC$ se ia un punct M prin care se duc dreptele paralele muchiilor SA, SB, SC pînă la intersecția lor cu fețele SBC, SCA, SAB respectiv în punctele P, Q, R.

Notînd $SA=a$, $DB=b$, $SC=c$, $MP=x$, $MQ=y$, $MR=z$ să se arate că

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

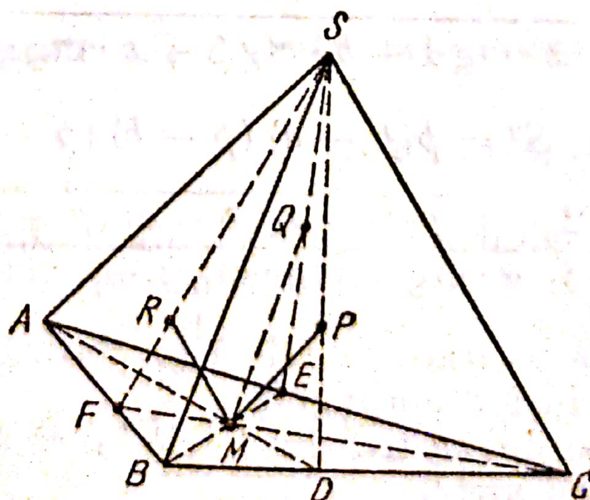


Fig. 6.36

Soluție. Dreptele AM, BM, CM taie laturile opuse respectiv în D, E, F. Din asemănarea triunghiurilor ADS, BES și CFS, obținem:

$$\frac{MP}{SA}=\frac{MD}{AD};\ \frac{MQ}{SB}=\frac{ME}{BE} \text{ și } \frac{MR}{SC}=\frac{MF}{CF}.$$

Adunînd aceste trei relații și ținînd seamă că

$$\frac{MD}{AD}+\frac{ME}{BE}+\frac{MF}{CF}=1,$$

$$\Rightarrow \frac{MP}{SA}+\frac{MQ}{SB}+\frac{MR}{SC}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

6.37. Să se calculeze volumul unui tetraedru $VABC$ cunoscînd laturile triunghiului ABC și unghiurile α, β, γ făcute de planele VBC, VAC și VAB cu planul ABC.

Soluție. Avem: $V=\frac{1}{3}S\cdot h$, unde S este aria triunghiului ABC și h înălțimea tetraedrului.

$S=\frac{1}{2}(a\cdot OA'+b\cdot OB'+c\cdot OC')$ unde $OA'=h\cdot\text{ctg}\,\alpha$, $OB'=h\cdot\text{ctg}\,\beta$ și $OC'=h\cdot\text{ctg}\,\gamma$. Prin urmare, $2S=$
$=h(a\cdot\text{ctg}\,\alpha+b\cdot\text{ctg}\,\beta+c\cdot\text{ctg}\,\gamma)$,

deci:

$$h=\frac{2S}{a\cdot\text{ctg}\,\alpha+b\cdot\text{ctg}\,\beta+c\cdot\text{ctg}\,\gamma}.$$

Știind că $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$, rezultă

$$V=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a\cdot\text{ctg}\,\alpha+b\cdot\text{ctg}\,\beta+c\cdot\text{ctg}\,\gamma}.$$

6.38. a) Să se arate că există un tetraedru cu toate fețele triunghiuri dreptunghice.

b). Este posibil ca trei din fețele lui să aibe unghiul drept în același vîrf?

(Concurs, anul II, licee, 1975).

Soluție. a). Presupunem că baza tetraedrului este triunghiul ABC astfel că $a^2=b^2+c^2$. Desfăcînd (desfășurînd) fețele laterale ale tetraedrului în jurul laturilor triunghiului de la baza ABC în planul bazei obținem triunghiurile BCD_1, ABD_3, ACD_2, unde $D_1D_2D_3$ sînt vîrfurile triunghiurilor ce se uneau în vîrful D al tetraedrului. Dacă $CD_1=b$ atunci și $CD_2=b$ și considerînd $\sphericalangle DCA=90°$ rezultă $AD_3^2=AD_2^2=b_2+c^2=a^2$. Considerînd $\sphericalangle DAB=90°$ rezultă $D_3B^2=a^2+b^2$, dar și $D_3B^2=a^2+b^2$ deci $BD_1=BD_3=BD$. Deci s-a arătat că unghiurile drepte sînt BAC, ACD, BCD și BAD.

b). Dacă am presupune că unghiurile din vîrful A, adică BAC, CAD și BAD egale cu 90° și notînd $AB=x$, $AC=y$, $AD=z$ atunci $BC^2=x^2+y^2$; $DC^2=y^2+z^2$ și $BD^2=x^2+z^2$. De aici rezultă că triunghiul BCD nu mai poate fi dreptunghic, deoarece, de exemplu

$$BC^2+DC^2=x^2+2y^2+z^2\neq BD^2=x^2+y^2 \text{ fiindcă } y\neq 0.$$

6.39. Un tetraedru $ABCD$ are toate fețele triunghiuri ascuțitunghice egale. Fie H piciorul înălțimii coborîtă din D pe fața ABC.

a). Să se arate că suma unghiurilor formate de muchiile care pleacă din același vîrf, este 180°.

b). Fețele laterale DAB, DBC, DCA se rotesc în jurul laturilor AB, BC, CA, respectiv, în exteriorul triunghiului ABC pînă ajung în același plan cu el. Fie D_1, D_2, D_3 punctele unde ajunge D din aceste rotații.

Să se arate că H este ortocentrul triunghiului $D_1D_2D_3$.

(G.M., 5115, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Toate fețele fiind triunghiuri egale, din fiecare vîrf al tetraedrului pleacă 3 muchii care fac între ele două cîte două, respectiv, cele trei unghiuri ale unei fețe, astfel: $\sphericalangle ADB=\sphericalangle ACB$; $\sphericalangle BDC=\sphericalangle BAC$; $\sphericalangle ADC=\sphericalangle ABC$ și deci suma unghiurilor care pleacă din oricare din vîrfurile tetraedrului este $A+B+C=180°$; în alt mod, tetraedrul nu ar avea toate fețele egale.

b). Desfășurînd fețele laterale ca în enunț, obținem triunghiul $D_1D_2D_3$ iar $AD_1 = AD_3 = BC = a$; $BD_1 = BD_3 = AC = b$; $CD_2 = CD_3 = AC = c$, aria $D_1D_2D_3 = 4$ aria ABC, triunghiul ABC este triunghiul median (care unește mijloacele laturilor) al triunghiului $D_1D_2D_3$. Construiți figura. Înălțimile triunghiului $D_1D_2D_3$ sînt perpendiculare respectiv pe AB, BC și CD și se întîlnesc într-un punct H (ortocentru) care conform teoremei celor trei perpendiculare este și piciorul înălțimii tetraedrului ABC. De exemplu: $E = D_1H \cap AB$. Avem $DH \perp HE$, $DE \perp BA$ (rotirea fiind în jurul lui AB), iar punctele C, F, D_1 sînt în linie dreaptă ($D_1F \perp AB$).

Observație. $DH^2 = h^2 = D_1E^2 - EH^2$, iar dacă $F = D_2H \cap BC$ și $G = D_3H \cap AC$; avem $D_1E^2 - EH^2 = D_2F^2 - FH^2 = D_3G^2 - GH^2$. (1). Relația (1) se mai păstrează și dacă înlocuim pe D_1, D_2, D_3 cu punctul D deoarece $D_1E = DF$, etc. De asemenea în relația (1) putem înlocui pe D_1, D_2, D_3 cu un punct M oarecare situat pe perpendiculara dusă din H pe planul ABC.

6.40. Acoperișul unei vile are forma unei piramide cu baza un romb. Înălțimea piramidei cade în centrul bazei.

Măsurîndu-se muchiile cele lungi corespunzătoare diagonalei mari se găsește $VB = VD = 7$ m, iar pentru celelalte $VA = VC = 5$ m. Latura rombului de bază este de 8 m.

Să se afle înălțimea piramidei și suprafața laterală a ei.

(G.M.B., E: 4536, *I. Teodorescu*, Galați).

Soluție. Dacă baza piramidei este rombul $ABCD$ și O, centrul lui, iar OV înălțimea, notăm $OV = h$, $OB = OD = x$, $OA = OC = y$. Din triunghiurile dreptunghice AOB, VOB, VOA avem relațiile

$$x^2 + y^2 = 8^2, \quad x^2 + h^2 = 7^2, \quad y^2 + h^2 = 5^2. \qquad (1)$$

Pentru determinarea necunoscutelor x, y, h, adunăm mai întîi aceste ecuații și avem $2x^2 + 2y^2 + 2h^2 = 138 \Rightarrow x^2 + y^2 + h^2 = 69$.

Din această egalitate scădem succesiv relațiile (1) și găsim

$h^2 = 5,\ x^2 = 44,\ y^2 = 20$. Rezultă $h = \sqrt{5},\ x = 2\sqrt{11},$

$$y = 2\sqrt{5}.$$

Ducem în planul bazei, $OE \perp AB$, și rezultă $VE \perp AB$.

Avem: aria $AOB = \frac{1}{2} x \cdot y = 2\sqrt{55}$ și de aci

$$OE = \frac{2 \text{ aria } AOB}{AB} = \frac{4\sqrt{45}}{8} = \frac{\sqrt{45}}{2}.$$

Acum putem determina înălțimea VE din triunghiul VOE

$$VE^2 = h^2 + OE^2 = \frac{75}{4} \Rightarrow VE = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Se găsește apoi suprafața laterală a piramidei

$$S = 4\frac{AB \cdot VE}{2} = 40 \cdot \sqrt{3} \text{ m}^2.$$

6.41. Un tetraedru are toate înălțimile egale și una dintre ele cade în ortocentrul feței opuse. Să se arate că tetraedrul este regulat.

Soluție. Notațiile sînt cele din figură, H ortocentru feței BCD unde cade înălțimea din A.

Toate înălțimile piramidei fiind egale, rezultă că toate fețele ei au aceeași arie. Deci înălțimea din A a feței ABC este egală cu înălțimea din D a feței DBC și din teorema celor trei perpendiculare se întîlnesc în același punct A' pe muchia BC.

Triunghiurile $AA'C$ și $DA'C$ sînt egale avînd catete egale, la fel și $AA'B$ cu $DA'B$. Deci

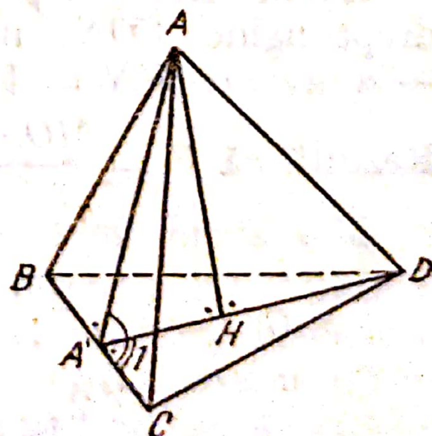


Fig. 6.41

$\triangle ABC = \triangle DBC$. Deci $AC = CD$, $AB = BD$. Ducînd BB' perpendiculară pe BD obținem alte muchii egale. Dar egalitățile astfel obținute ale muchiilor nefiind disjuncte două cîte două, obținem egalitatea tuturor muchiilor. Deci tetraedrul este regulat.

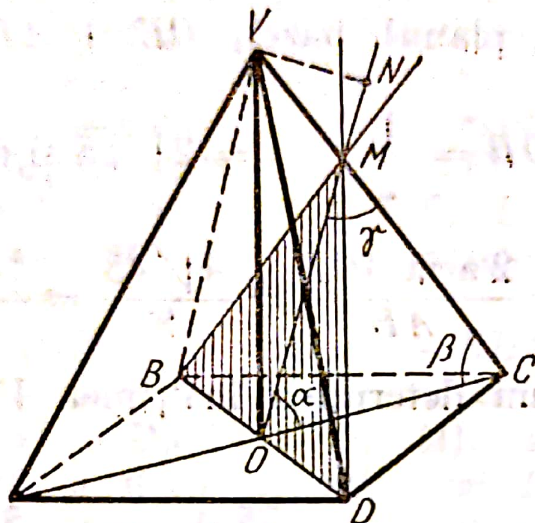


Fig. 6.42

6.42. Într-o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei a și înălțimea h, se face o secțiune ce trece printr-o diagonală a bazei și face cu planul bazei unghiul α. Să se afle volumul piramidei ce are ca bază secțiunea făcută și ca vîrf, vîrful piramidei date ($\alpha < 90°$).

Soluție. V = volumul piramidei $VMBD =$

$$= \frac{\text{aria } MDB \times VN}{3} = \frac{MO \times BD \times VN}{6}.$$

Avem $BD = a\sqrt{2}$. Mai departe, din triunghiul dreptunghic VON, unde $VO = h$; $\sphericalangle VOM = 90° - \alpha$ avem: $VN = VO \cdot \sin(90° - \alpha)$.

Rezultă că $V = \dfrac{MO \cdot a\sqrt{2} \cdot h \cdot \cos\alpha}{6}$.

Mai avem de calculat pe MO.

$$OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad VO = h; \quad VO = OC \cdot \operatorname{tg}\beta;$$

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\beta; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{2h}{a\sqrt{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{a}.$$

sau:

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{h\sqrt{2}}{a}; \quad \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{h\sqrt{2}}{a}; \text{ sau}$$

$$\frac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta} = \frac{2h^2}{a^2}, \text{ deci}$$

$$\sin^2\beta \cdot a^2 = 2h^2 - \sin^2\beta \cdot 2h^2; \quad \sin\beta = \frac{h\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+2h^2}}$$

$$\text{deci } \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{a}{\sqrt{a^2+2h^2}}.$$

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul MOC avem:

$$\frac{MO}{\sin\beta} = \frac{OC}{\sin\gamma} \text{ sau}$$

$$\frac{MO}{\sin\beta} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin[180^\circ - (\alpha+\beta)]};$$

de unde:

$$MO = \frac{\sin\beta \cdot a\sqrt{2}}{2\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\beta \cdot a\sqrt{2}}{2(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)}.$$

Înlocuim și obținem

$$MO = \frac{ah}{a\sin\alpha + h\sqrt{2}\cos\alpha}.$$

De asemenea obținem

$$V = \frac{a^2h^2\sqrt{2}\cos\alpha}{12(a\sin\alpha + h\sqrt{2}\cos\alpha)}.$$

6.43. Se dă piramida pătrată regulată $VABCD$ și se face o secțiune prin latura bazei AB și mijloacele M și N ale muchiilor VD și VC. Latura bazei acestei piramide este a, înălțimea este h. Să se determine volumul piramidei $VABMN$.

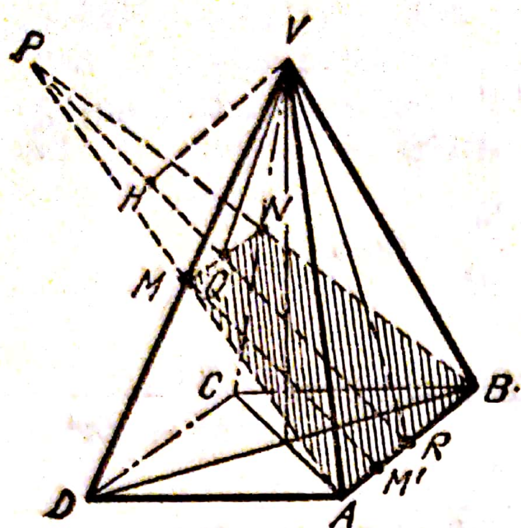


Fig. 6.43

Soluție. Pentru a afla volumul piramidei $VMNBA$ este necesar să cunoaștem aria $MNAB$ și înălțimea NH.

$$S_{MNAB} = \frac{(MN + AB)MM'}{2} = \frac{\frac{a}{2} + a \cdot MM'}{2} = \frac{3a \cdot MM'}{4}.$$

Avem

$$DO = \frac{DB}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} \text{ și}$$

$$VD^2 = VO^2 + DO^2 = h^2 + \frac{2a^2}{4} = h^2 + \frac{a^2}{2}.$$

MA fiind mediană în triunghiul VDA, avem:

$$MA^2 = \frac{VA^2 + DA^2}{2} - \frac{2VD^2}{8} =$$

$$= \frac{(DA^2 + VA^2)4 - 2VA^2}{8} = \frac{2DA^2 + VA^2}{4} =$$

$$\frac{2a^2 + h^2 + \frac{a^2}{2}}{4} = \frac{5a^2 + 2h^2}{8}.$$

Mai departe:

$$M'A = \frac{a - \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4},$$

deci

$$MM'^2 = MA^2 - M'A^2 = \frac{5a^2 + 2h^2}{8} - \frac{a^2}{16} =$$

$$= \frac{10a^2 + 4h^2 - a^2}{16} = \frac{9a^2 + 4h^2}{16}.$$

$$MM' = \frac{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}{4}.$$

Rezultă că

$$S_{MNAB} = \frac{3a\sqrt{9a^2 + 4h^2}}{16}.$$

Mai avem de calculat pe VH. Din triunghiurile dreptunghice VQH și VRH avem:

$VH^2 = QV^2 - HQ^2$ și $VH^2 = VR^2 - (QR + HQ)^2$,

deci

$$QV^2 - HQ^2 = VR^2 - (QR^2 + HQ^2 + 2QR \cdot HQ),$$
$$QV^2 - HQ^2 = VR^2 - QR^2 - HQ^2 - 2QR \cdot HQ.$$
$$QV^2 = VR^2 - QR^2 - QR^2 - 2QR \cdot HQ,$$

însă $VQ = \frac{VR}{2}$, deci:

$$\frac{VR^2}{4} - VR^2 + QR^2 = -2QR \cdot HQ.$$

$$2QR \cdot HQ = VR^2 - \frac{VR^2}{4} - QR^2.$$

$$HQ = \frac{\frac{4VR^2 - VR^2}{4} - QR^2}{2QR} = \frac{3VR^2 - 4QR^2}{8QR} =$$

$$= \frac{3VR^2 - 4QR^2}{8MM'} = \frac{4VR^2 - 4M'M^2}{8MM'}.$$

Avem:

$$VR^2 = VO^2 + OR^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4h^2 + a^2}{4}$$

deci

$$HQ = \frac{\dfrac{12b^2 + 3a^2}{4} - 4\,\dfrac{9a^2 + 4h^2}{16}}{2\sqrt{9a^2 + 4h^2}} =$$

$$= \frac{12h^2 + 3a^2 - 9a^2 - 4h^2}{8\sqrt{9a^2 + 4h^2}} = \frac{8h^2 - 6a^2}{8\sqrt{9a^2 + 4h^2}} =$$

$$= \frac{4h^2 - 3a^2}{4\sqrt{9a^2 + 4h^2}}.$$

Deci

$$VH^2 = VQ^2 - HQ^2 = \frac{VR^2}{4} - HQ^2 = \frac{4h^2 + a^2}{16} -$$

$$- HQ^2 = \frac{4h^2 + a^2}{16} - \frac{(4h^2 - 3a^2)^2}{16(9a^2 + 4h^2)} = \frac{a^2h^2}{9a^2 + 4h^2};$$

$$VH = \frac{ah}{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}.$$

Rezultă

$$V = \frac{S_{ABMN} \cdot VH}{3} = \frac{\dfrac{3a\sqrt{9a^2 + 4h^2}}{16} \cdot \dfrac{ah}{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}}{3} =$$

$$= \frac{\dfrac{3a^2h}{16}}{3} = \frac{a^2h}{16}.$$

6.44. O piramidă $VABC$ are $AB = AC = VA = VB = VC = a$, iar $1 + 3\cos(BAC) = 0$. Să se afle aria și volumul piramidei în funcție de a.

(G.M.B., 11480, *C. Ionescu-Țiu*).

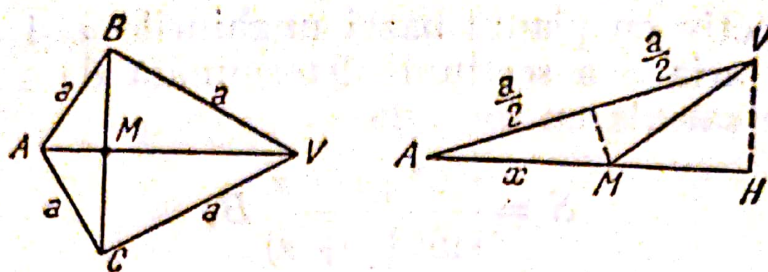


Fig. 6.44

Soluție. Deoarece $\cos BAC = -\frac{1}{3}$ rezultă $\sphericalangle BAC > 90°$; $\sin(BAC) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos A = a^2 + a^2 + \frac{2a^2}{3} = \frac{8a^2}{3}$, deci $BC = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$.

Fie M mijlocul lui BC. Facem o secțiune cu planul AMV.

$$x = AM = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = VM < a.$$ Fie VH înălțimea piramidei, $\cos(VAM) = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

de unde $\sphericalangle VAM = 30°$; $VH = a \sin 30° = \frac{a}{2}$;

$$\text{aria }(ABC) = \frac{a^2 \sin A}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3};$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}.$$

6.45. Într-o piramidă regulată cu baza un pătrat se face o secțiune cu un plan ce trece printr-o latură a bazei. Planul de secțiune și planul unei fețe laterale

fac respectiv cu planul bazei unghiurile α și φ. Să se arate că aria S a secțiunii determinată de acest plan se poate calcula cu formula

$$S = \frac{\sin^2 \varphi \cos \alpha}{\sin^2 (\varphi + \alpha)} B,$$

unde B este aria bazei.

(R.M.F., 673, *Gh. Bazacov*)

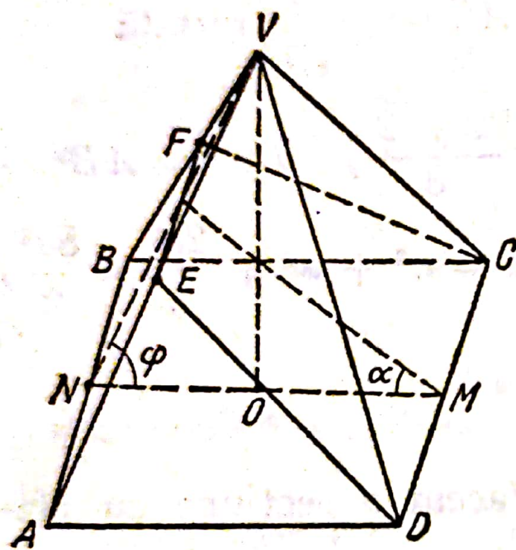


Fig. 6.45

Soluție. Fie E, F punctele în care muchiile VA, VB ale piramidei patrulatere regulate $VABCD$ înțeapă planul de secțiune dus prin latura CD. Patrulaterul $EFCD$ este un trapez isoscel.

Fie M, N, P mijloacele segmentelor CD, AB, EF.

În triunghiul MNP avem:

$$MP \sin(\varphi + \alpha) = MN \sin \varphi,$$

$$PN = MN \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Triunghiurile asemenea VEF și VAB, ne dau

$$\frac{EF}{AB} = \frac{VB}{VN}, \quad \text{de unde}$$

$$EF = AB \frac{\dfrac{NO}{\cos \varphi} - \dfrac{MN \sin \alpha}{\sin(\varphi + \alpha)}}{\dfrac{NO}{\cos \varphi}} =$$

$$= AB\left(1 - \frac{2 \sin \alpha \cos \varphi}{\sin(\varphi + \alpha)}\right).$$

Prin urmare

$$S = \frac{1}{2}(EF + CD) \cdot MP = AB \cdot MN \frac{\cos\alpha \sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi+\alpha)} =$$

$$= B \cdot \frac{\cos\alpha \sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi+\alpha)}.$$

6.46. Prin vîrfurile tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ ducem patru drepte care taie respectiv fețe opuse în A_1', A_2', A_3', A_4'. Printr-un punct M din interiorul tetraedrului ducem paralele la dreptele A_1A', A_2A_2', A_3A_3', A_4A_4' și notăm intersecțiile lor cu fețele $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$, cu M_1, M, M_3, M_4. Notăm $A_iA_i' = a_i$ și $MM_i = t_i$ și presupunem că $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \leqslant a_3 \leqslant a_4$. Să se arate că

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{t_i}{a_i} = 1 \text{ și } a_1 \leqslant \sum_{i=1}^{4} t_i \leqslant a_4.$$

Soluție. Fie A_i'' proiecțiile punctelor A_i pe fețele opuse și N_i proiecțiile lui M pe cele patru fețe. Notăm V volumul tetraedrului determinat de punctul M și fiecare din cele patru fețe. Avem

$$\frac{V_1}{V} = \frac{M_1N_1}{A_1A_1}.$$

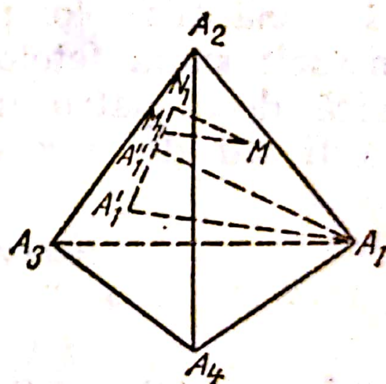


Fig. 6.46

Din asemănarea triunghiurilor $A_1A_1'A_1''$ și MM_1N_1 rezultă

$$\frac{M_1N_1}{A_1A_1''} = \frac{MM_1}{A_1A_1'}, \quad \text{deci } \frac{V_1}{V} = \frac{MM_1}{A_1A_1'} = \frac{t_1}{a_1}.$$

În general avem $\frac{t_i}{a_i} = \frac{V_i}{V}$ deci $\sum_{i=1}^{4} \frac{t_i}{a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{4} V_i}{V} = 1$,

deoarece $V = \sum_{i=1}^{4} V_i$.

Pentru a demonstra relația a doua, observăm că

$$\frac{t_i}{a_4} \leqslant \frac{t_i}{a_i} \leqslant \frac{t_i}{a_1}$$

deci

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} t_i}{a_4} \leqslant \sum_{i=1}^{4} \frac{t_i}{a_1} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{4} t_i}{a_1}, \text{ sau } \frac{\sum_{i=1}^{4} t_i}{a_4} \leqslant 1 \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{4} t_i}{a_1}$$

de unde $a_1 \leqslant \sum_{i=1}^{4} t_i \leqslant a_4$.

6.47. Suma muchiilor laterale ale unei piramide regulate este egală cu perimetrul bazei. Să se găsească valoarea unghiurilor diedre formate de două fețe laterale ale piramidei.

Soluție. Din enunț rezultă că fețele laterale ale piramidei sînt triunghiuri echilaterale egale. De aci rezultă că numărul fețelor piramidei va fi cel mult egal cu 5, întrucît suma fețelor unui poliedru convex este mai mică decît patru unghiuri drepte. Unghiul cerut α va fi dat de (vezi figura) ($AM \perp BV$; $MC \perp BV$)

$$\cos\alpha = \frac{2MC^2 - AC^2}{2MC^2}.$$

Însă, $AC = 2R\sin\frac{2\pi}{n}$, $MC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot$ $\cdot 2R\sin\frac{\pi}{n} = \sqrt{3}R\sin\frac{\pi}{n}$; R fiind raza cercului circumscris poligonului de bază iar n numărul fețelor.

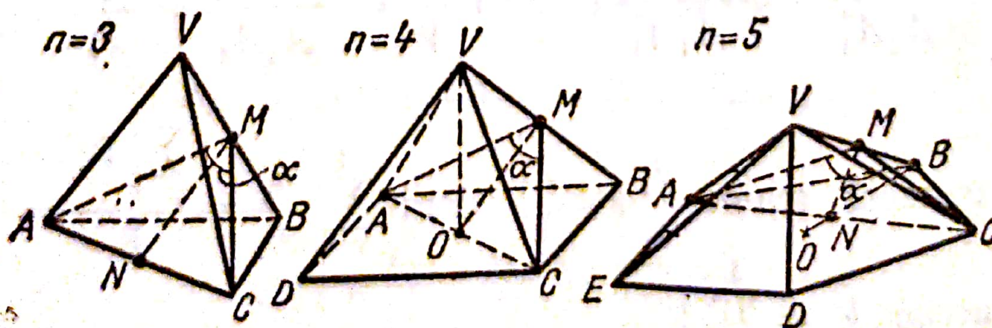


Fig. 6.47

Rezultă:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{8\cos^2\frac{\pi}{n}}{3}$$

pentru $n = 3$; $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; $\alpha = 70°31'43'',6$;

pentru $n = 4$; $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$; $\alpha = 109°28'16'',4$;

pentru $n = 5$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\alpha = 138°11'22'',75$.

6.48. Un tetraedru regulat de latură l este înscris într-o sferă. Să se calculeze mărimea unghiului diedru al tetraedrului, aria sferei circumscrise și volumul sferei înscrise în acest tetraedru, în funcție de l.

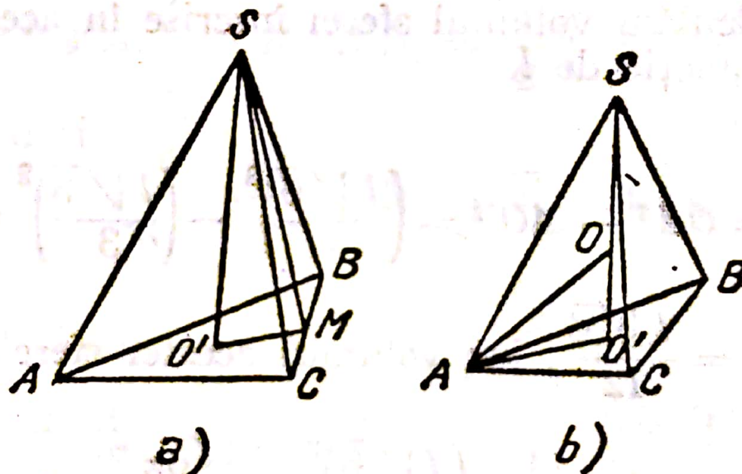


Fig. 6.48 a, b

Soluție. Fie SO' înălțimea tetraedrului și evident, ea cade în centrul triunghiului ABC; ducem $O'M \perp BC$, în acest caz și $SM \perp BC$. Din triunghiul echilateral ABC avem: $O'M = r = \frac{l\sqrt{3}}{6}$, iar din triunghiul echilateral SBC avem: $SM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

În triunghiul dreptunghic $SO'M$ avem:

$$\cos\alpha = \frac{O'M}{MS} = \frac{1}{3} \text{ de unde } \alpha = 70°31'43''.$$

Să calculăm aria sferei circumscrise tetraedrului. Pe fig. a) observăm, că din triunghiul dreptunghic $SO'M$ avem:

$$SO' = \sqrt{SM^2 - MO^2} = \frac{l\sqrt{6}}{3}.$$

Evident, centrul O al sferei circumscris se va afla pe înălţimea SO'. Din triunghiul dreptunghic AOO' avem: $AO^2 = OO'^2 + AO'^2$ sau $R^2 = (SO' - R)^2 + AO^2$ care dă: $R = \frac{l\sqrt{6}}{4}$ şi deci aria sferei va fi

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{l\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{3}{2}\pi l^2,$$

ceea ce trebuia aflat.

Să calculăm volumul sferei înscrise în acest tetraedru în funcţie de l.

Avem:

$$OO'^2 = OA^2 - AO'^2 = \left(\frac{l\sqrt{6}}{4}\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{l^2}{24},$$

deci $OO' = \frac{l\sqrt{6}}{12}$, iar volumul acestei sfere este:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{l\sqrt{6}}{12}\right)^2 = \frac{\sqrt{6}\pi l^3}{216}.$$

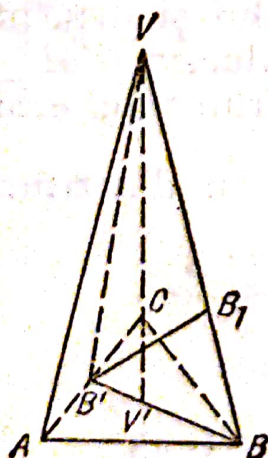


Fig. 6.49

6.49. Să se determine distanţa d între două muchii opuse într-o piramidă triunghiulară regulată în funcţie de lungimea b a muchiei laterale şi lungimea a a muchiei de bază. Să se determine poziţia punctelor extreme ale segmentului de lungime d pe cele două muchii opuse ale piramidei.

Soluţie. Fie piramida $VABC$;

$$AB = BC = CA = a;$$
$$VA = VB = VC = b,$$

BB' înălțimea în triunghiul echilateral ABC.

$$BB' = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB'}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2};$$

$$BB' = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$V'B$ = raza cercului circumscris bazei.

$$V'B = \frac{AB\sqrt{3}}{3}; \quad V'B = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$VV' = \sqrt{VB^2 - V'B^2} = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}}.$$

$$\text{Aria } VBB' = \frac{1}{2} BB' \cdot VV' = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}};$$

$$\text{Aria } VBB' = \frac{1}{2} \cdot VB \cdot B'B_1 = \frac{1}{2} b \cdot d = \frac{bd}{2}.$$

Avem deci

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}} = \frac{1}{2} bd$$

de unde rezultă $d = \dfrac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}$.

Triunghiul ABC fiind echilateral iar BB' înălțime avem $AB' = B'C = \dfrac{a}{2}$.

Din triunghiul dreptunghic $BB'B$, avem

$$BB_1 = \sqrt{B'B^2 - B'B_1^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2(3b^2 - a^2)}{4b^2}} = \sqrt{\frac{3a^2b^2 - 3a^2b^2 + a^4}{4b^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^4}{4b^2}} = \frac{a^2}{2b},$$

iar $VB_1 = VB - BB_1 = b - \frac{a^2}{2b} = \frac{2b^2 - a^2}{2b}$.

Segmentele determinate pe VB sînt deci

$$\frac{a^2}{2b} \quad \text{și} \quad \frac{2b^2 - a^2}{2b}.$$

6.50. Un trunchi de piramidă are ca bază două romburi cu laturile de 6 cm și 8 cm și cîte un unghi de 120°. Înălțimea trunchiului de piramidă este egală cu triplul diagonalei mari a bazei mici. Dreapta care trece prin punctele de intersecție a diagonalelor bazelor trunchiului de piramidă este perpendiculară pe bazele trunchiului.

a). Să se calculeze înălțimea piramidei din care provine trunchiul de piramidă.

b). Să se afle aria laterală a trunchiului de piramidă.

Soluție. Fie $ABCD$ și $A'B'C'D'$ bazele trunchiului de piramidă, V vîrful piramidei, O și O' punctele de intersecție a diagonalelor celor două baze și $\sphericalangle ABC = 120°$.

Rezultă că $\sphericalangle A'B'C' = 120°$, iar $\sphericalangle C'B'O' = \sphericalangle O'B'A' = 60°$ și deci $\sphericalangle B'A'O' = 30°$. Cateta care se opune unui unghi de 30° este jumătate din ipotenuză; deci

$$O'B' = \frac{A'B'}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}.$$

Din triunghiul dreptunghic $O'C'B'$ avem:

$$O'C'^2 = B'C'^2 - O'B'^2 = 36 - 9 = 27;$$
$$O'C' = 3\sqrt{3}.$$

Prin urmare $A'C' = 6\sqrt{3}$ cm și $B'D' = 6$ cm. Înălțimea trunchiului de piramidă este deci $OO' = 18\sqrt{3}$ cm.

Triunghiurile $VO'A'$ și VOA sînt asemenea avînd $O'A' \parallel OA$, pentru că $A'C' \parallel AC$ ca intersecții a două

plane paralele ($ABCD$ și $A'B'C'D'$) tăiate de al treilea plan (VOA).

Avem deci

$$\frac{VO'}{VO}=\frac{O'A'}{OA}=\frac{2O'A'}{2OA}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{A'B'}{AB},$$

pentru că cele două romburi sînt asemenea.
Deci:

$$\frac{VO'}{VO}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

De aici avem $\frac{VO'}{VO-VO'}=\frac{3}{4-3}=3$, sau $\frac{VO'}{O'O}=3$,
sau $VO'=3\cdot OO'=3\cdot 18\sqrt{3}=54\sqrt{3}$ cm.
$VO=VO'+O'O=54\sqrt{3}+18\sqrt{3}=72\sqrt{3}$ cm.
Deci înălțimea piramidei din care a provenit trunchiul de piramidă este de $72\sqrt{3}$ cm.

b). Prin VO se duce un plan perpendicular pe BC care taie pe BC în E și pe $B'C'$ în E'. În triunghiurile dreptunghice BOC și $B'O'C'$, OE și $O'E'$ sînt respectiv înălțimile corespunzătoare ipotenuzelor, deci

$$O'E'=\frac{O'B'\cdot O'C'}{B'C'}=\frac{3\cdot 3\sqrt{3}}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Cum cele două romburi sînt asemenea, rezultă că

$$\frac{OE}{O'E'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};\ OE=\frac{4}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$$

Fie F proiecția lui E' pe planul bazei mari. Înălțimea trapezului $BCC'B'$ este $E'E$, pentru că BC este perpendiculară pe planul VOE, deci și pe $E'E$ din acest plan.

Din triunghiul dreptunghic $E'EF$ avem:

$$E'E^2=FE'^2+EF^2=O'O^2+(OE-O'E')^2=$$
$$=3\cdot 18^2+\left(2\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=3\cdot 324+\frac{3}{4}=\frac{3781}{4};$$

$$E'E=\frac{\sqrt{3781}}{2}.$$

Fețele laterale ale piramidei sînt egale pentru că au laturile respectiv egale și unghiurile respectiv egale. Din triunghiurile isoscele VAC și VBD avem

$$AA' = CC', \; BB' = DD',$$

iar din faptul că bazele sînt romburi avem

$$AB = BC = CD = AD \text{ și } A'B' = B'C' = C'D' = A'D'.$$

Din egalitatea triunghiurilor VAB și VBC rezultă că $\sphericalangle VAB = \sphericalangle VCB$, și $\sphericalangle VBA = \sphericalangle VBC$.

De aici rezultă și egalitatea următoarelor unghiuri: $\sphericalangle AA'M' = \sphericalangle CC'B'$ și $\sphericalangle BB'A' = \sphericalangle BB'C'$. La fel se arată egalitatea respectivă a unghiurilor și pentru celelalte fețe laterale ale piramidei. Deci aria laterală a trunchiului de piramidă este de patru ori aria uneia dintre fețele laterale:

$$A_l = 4 \cdot \text{aria } (BCC'B') = 4 \cdot \frac{(BC + B'C')E'E}{2} =$$

$$= 2(BC + B'C')E'E = 2(8 + 6) \cdot \frac{\sqrt{3781}}{2} =$$

$$= 14\sqrt{3781} \text{ cm}^2.$$

6.51. Fie $ABCDEF$ o piramidă regulată avînd ca bază un hexagon regulat $ABCDEF$ cu latura egală cu a. Lungimea perpendicularei VO coborîtă pe planul bazei (înălțimea piramidei) este de asemenea egală cu a. Fie M un punct oarecare pe muchia laterală VC. Planul determinat de muchia AB și punctul M intersectează muchiile VD, VE și VF respectiv în N, P și Q. Să se arate că:

a). Dreptele AN, BP și VO sînt concurente.

b). Patrulaterele $ABMQ$ și $MNPQ$ sînt trapeze isoscele.

c). Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor AM și BP, cînd M descrie muchia VC.

Soluție. a). Se observă ușor că punctul în care se întîlnesc dreptele AN, BP și VO este punctul comun al planelor ABM, BVE și AVD; cu alte cuvinte cele

trei drepte sînt muchiile triedrului format de cele trei plane amintite.

b). Să notăm planul ABM prin: (ABM). Avem $AB \parallel (VFC)$ și $AV \parallel (VED)$. Rezultă că: $MQ = (ABM) \cap (VFC)$ și $PN = (ABM) \cap (VED)$ sînt paralele cu AB. Piramida $VABCDEF$ fiind regulată se arată ușor că $\triangle AVQ = \triangle BVM$, ($VA = VB$, $VM = VQ$ deoarece $MQ \parallel FC$ și $\sphericalangle AVQ = \sphericalangle AVM$) și $\triangle QVP = \triangle MVN$. Deci $AQ = BM$ și $QP = MN$.

c). Fie $L = AM \cap BP$. Locul geometric este segmentul VT de pe dreapta $VT = (AVC) \cap (BVE)$; $T \in (ABCDEF)$.

6.52. Se consideră piramida triunghiulară $IABC$ și sfera variabilă care conține punctele A, B și C.

Sfera intersectează a doua oară muchiile IA, IB, IC respectiv în punctele M, N și P.

Să se afle locurile geometrice ale punctelor L_1, L_2 și L_3 care satisfac relațiile:

$$\frac{L_1M}{L_1N} = \frac{IB}{IA}; \quad \frac{L_2N}{L_2P} = \frac{IC}{IB} \quad \text{și} \quad \frac{L_3P}{L_3M} = \frac{IA}{IC}.$$

(G.M.B., 11977, *I. Stănescu*).

Soluție. Planul determinat de punctele I, A și B intersectează sfera după un cerc.

Patrulaterul $ABNM$ este înscris în acest cerc și atunci MN este antiparalelă cu AB față de unghiul AIB. Atunci MN își păstrează direcția și avem permanent $\triangle IAB \sim \triangle IMN$. Rezultă că $\frac{IB}{IA} = \frac{IM}{IN}$, sau ținînd seama de ipoteză avem $\frac{IM}{IN} = \frac{L_1M}{L_1N}$. Punctul L_1 este situat pe bisectoarea unghiului AIB.

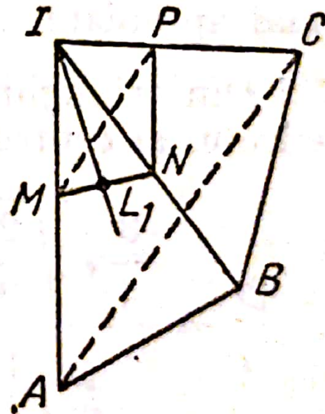


Fig. 6.52

Asemănător demonstrăm că L_2 respectiv L_3 descriu bisectoarele unghiurilor BIC și AIC.

Deci locurile geometrice sînt bisectoarele fețelor laterale care trec prin vîrful I.

Cercetînd problema reciproc, constatăm că din locul găsit trebuie exclus punctul I pentru care L_1M, L_1N, L_2N, L_2P și L_3P, L_3M se anulează.

6.53. Într-un tetraedru regulat se consideră patru sfere egale, tangente între ele și tangente la fețele tetraedrului. Se cere: a). raza sferelor, notînd cu l muchia tetraedrului; b). raportul între volumul tetraedrului și volumul celor patru sfere.

Indicație. a). Înălțimea tetraedrului este $h = l\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Centrul tetraedrului regulat este la $\frac{3}{4}$ din înălțime, începînd de la vîrf. Centrele celor patru sfere sînt vîrfurile unui tetraedru regulat, cu muchiile $2r$ și înălțimea $2r\sqrt{\frac{2}{3}}$ unde r este raza sferei.

Avem $x + 2r\sqrt{\frac{2}{3}} + r = l\sqrt{\frac{2}{3}}$, unde x este distanța de la un vîrf al tetraedrului la centrul sferei celei mai apropiate.

Din triunghiul format de două vîrfuri ale tetraedrului și centrul său, obținem:

$$\frac{2r}{l} = \frac{\frac{3}{4}l\sqrt{\frac{2}{3}} - x}{\frac{3}{4}l\sqrt{\frac{2}{3}}}. \text{ De unde } r = \frac{l}{10}(\sqrt{6} - 1).$$

b). Raportul cerut este $h = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{6}+1)^3}{4}$.

6.54. Un cerc de rază r se rotește în jurul unei axe din același plan, centrul cercului descriind un cerc de rază $R > r$. Suprafața acestui corp de rotație numit tor, constituie canalul unui lagăr în care sînt așezate

n bile una după alta, bilele vecine fiind tangente între ele și tangente canalului. Să se exprime raza unei bile în funcție de R și n. Care este raza ρ a cercului pe care se află punctele de contact dintre bile?

(G.M.B., 6186, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. O bilă tangentă la suprafața interioară a torului are punctele de tangență pe un cerc mare al ei. Planul cercului descris de centrul cercului dat, pe care să-l numim plan ecuatorial, taie torul după două cercuri concentrice ecuatoriale, iar bilele după cercuri mari. Să considerăm bilele de centru O_1 și O_2 și fie T punctul lor de tangență. Planul tangent comun acestor bile este tăiat de planul ecuatorial după o tangentă care fiind perpendiculară pe mijlocul laturii O_1O_2 a triunghiului isoscel OO_1O_2 trece și prin vîrful O. Raza unei bile este egală chiar cu raza cercului dat r. Unghiul O_1OO_2 este egal cu $\frac{2\pi}{n}$, iar unghiul $O_1OT = \frac{\pi}{n}$. Din triunghiul dreptunghic OO_1T rezultă:

$$r = O_1T = R \sin\,(O_1OT_1) = R \sin \frac{\pi}{n}.$$

Raza cercului de contact dintre bile este OT. Din același triunghi dreptunghic OO_1T avem: $\rho = OT = \cos\frac{\pi}{n}$.

6.55. a). Fie $VABC$ un tetraedru și A', B', C' trei puncte situate respectiv pe muchiile VA, VB, VC. Să se arate că:

$$\frac{\text{volum } VA'B'C'}{\text{volum } VABC} = \frac{VA' \cdot VB' \cdot VC'}{VA \cdot VB \cdot VC}.$$

b). Fie $VABCD$ o piramidă cu baza un paralelogram și A', B', C', D' intersecțiile segmentelor VA, VB, VC, VD cu un plan.

Notăm $\frac{VA'}{VA} = K_a$, $\frac{VB'}{VB} = K_b$, $\frac{VB'}{VC} = K_c$, $\frac{VD'}{VD} = K_d$.

Să se calculeze volumul $VA'B'C'D'$ în funcție de volumul piramidei $VABCD$ și K_a, K_b, K_c, K_d.

c). Să se deducă relația

$$\frac{1}{K_a}+\frac{1}{K_c}=\frac{1}{K_b}+\frac{1}{K_d}.$$

(G.M.B., 14328, *Laurențiu Panaitopol*).

Soluție. a). $\frac{\text{aria } VB'C'}{\text{aria } VBC}=$

$$=\frac{\frac{1}{2}VB'\cdot VC'\cdot \sin(BVC)}{\frac{1}{2}VB\cdot VC\cdot \sin(VBC)}=\frac{VB'\cdot VC'}{VB\cdot VC}.$$

Fie A_1 și A_1' proiecțiile lui A și A' pe planul VBC (V, A_1', A sînt coliniare). Din asemănarea triunghiurilor VAA_1 și $VA'A_1'$ rezultă

$$\frac{A'A_1'}{AA_1}=\frac{VA'}{VA};$$

$$\frac{\text{volum } VA'B'C'}{\text{volum } VABC}=\frac{\frac{1}{3}\text{aria } VB'C'\cdot A'A_1}{\frac{1}{3}\text{aria } VBC\cdot AA_1}=$$

$$=\frac{VB'\cdot VC'\cdot VA'}{VB\cdot VC\cdot VA}.$$

b). Notînd V volumul piramidei $VABCD$ rezultă că volum $VABD=$ volum $VBCD=\frac{V}{2}$, deoarece aria $ABD=$ aria $CBD=\frac{1}{2}$ aria $ABCD$.

Din rezultatul obținut la punctul a) avem:

$$\frac{\text{volum } VA'B'D'}{\text{volum } VABD} = K_aK_bK_d; \quad \frac{\text{volum } VC'B'D'}{\text{volum } VCBD} =$$

$$= K_cK_bK_d \text{ deci volum } VA'B'D' = \frac{V}{2} \cdot K_aK_bK_d;$$

$$\text{volum } VC'B'D' = \frac{V}{2} K_cK_bK_d$$

deci volum $VA'B'C'D' = \frac{V}{2} K_bK_d(K_a + K_c)$.

Dacă vom calcula volumul piramidei $VA'B'C'D'$ ca sumă a volumelor piramidelor $VA'C'B'$ și $VA'C'D'$ vom obține:

volum $VA'B'C'D' = \frac{V}{2} K_aK_c(K_b + K_d)$. Așadar

$K_bK_d(K_a + K_c) = K_aK_c(K_b + K_d)$ de unde

$$\frac{1}{K_a} + \frac{1}{K_c} = \frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_d}.$$

6.56. Se dă tetraedrul $ABCD$ și în interiorul lui un punct I. Dreptele AI, BI, CI, DI taie fețele opuse în punctele A', B', C', D'.

Fie punctele A_1, B_1, C_1, D_1 situate respectiv pe IA', IB', IC', ID', astfel ca:

$$\frac{IA_1}{A_1A'} = \frac{IB_1}{B_1B'} = \frac{IC_1}{C_1C'} = \frac{ID_1}{D_1D'} = k.$$

Să se arate că:

$$\frac{AA_1}{A_1A} + \frac{BB_1}{B_1B'} + \frac{CC_1}{C_1C'} + \frac{DD_1}{D_1D'} \geqslant 4(4k + 3).$$

Soluție. Fie V volumul tetraedrului $ABCD$, V_a, V_b, V_c, V_d respectiv volumele tetraedrelor $IBCD$, $IACD$, $IABD$, $IABC$; h înălțimea din A a lui $ABCD$ și h_1 înălțimea din I a lui $IBCD$.

Avem:

$$\frac{AA_1}{A_1A'} = \frac{AI + \frac{k}{k+1}\cdot IA}{\frac{1}{k+1}\cdot IA'} = \frac{(k+1)\cdot AI + k\cdot IA}{IA'} =$$

$$= \frac{(k+1)\cdot AA' - IA'}{IA'} = \frac{(k+1)\cdot AA'}{IA'} - 1;$$

dar

$$\frac{AA'}{IA'} = \frac{h}{h_1} = \frac{V}{V_a}, \text{ deci:}$$

$$\frac{AA_1}{A_1A'} = \frac{(k+1)\,V}{V} - 1; \text{ rezultă că}$$

$$\sum \frac{AA_1}{A_1A'} = (k+1)\cdot V \cdot \left(\frac{1}{V_a} + \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c} + \frac{1}{V_d}\right) - 4 =$$

$$= (k+1)\cdot(V_a + V_b + V_c + V_d)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{V_a} + \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c} + \frac{1}{V_d}\right) - 4 \geqslant 16(k+1) - 4 =$$

$$= 4(4k+3); \text{ deci:}$$

$$\frac{AA_1}{A_1A'} + \frac{BB_1}{B_1B'} + \frac{CC_1}{C_1C'} + \frac{DD_1}{D_1D'} \geqslant 4(4k+3).$$

6.57. Fie $ABCD$ secțiunea axială făcută de un plan într-un cilindru circular drept de rază R și înălțime h. Prin considerații de volume să se exprime aria secțiunii făcute în cilindru, de un plan care trece prin BD și care este perpendicular pe planul primei secțiuni $ABCD$.

(R.M.F., 649, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Din motive de simetrie, a doua secțiune împarte cilindrul în două părți egale.

Din aceleași motive, o secțiune paralelă cu secțiunea ce trece prin BD, dusă prin centrul O al bazei cilindrului, determină două copite cilindrice $GDEOF$ și $HCEOF$, de asemenea egale (și deci echivalente).

Rezultă că cilindrul oblic $DBHEGF$ este echivalent cu corpul $BDECF$; OI fiind perpendiculara din O pe BD dusă în planul BCD, putem scrie:

$$\text{vol. } DBHEFG = S \cdot OI =$$

$$= \text{vol. } BDECF = \frac{1}{2} \text{ vol. } ABCEDF,$$

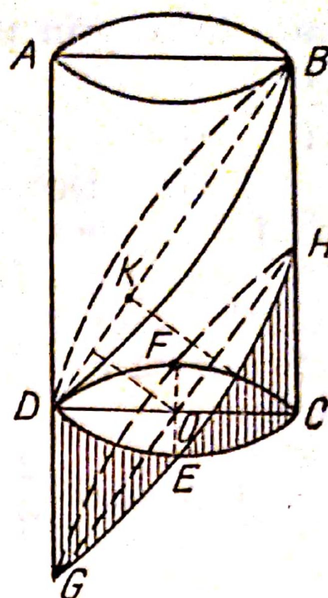


Fig. 6.57

unde S este aria cerută.

Ducînd perpendiculara CK pe BD avem

$$\text{vol. } DBHEGF = S \cdot \frac{CK}{2} = \frac{\pi R^2 h}{2}$$

și cum

$$CK = \frac{2R \cdot h}{\sqrt{4R^2 + h^2}},$$

rezultă

$$S = \pi R \cdot \frac{\sqrt{4R^2 + h^2}}{2}.$$

Verificare. Secțiunea este o elipsă de semiaxe $\frac{2R}{2} = R$ și $\frac{BD}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 + h^2}$. Deci aria sa este

$$S = \pi R \cdot \frac{\sqrt{4R^2 + h^2}}{2}.$$

6.58. Pe cercul bazei superioare a unui cilindru cu volumul egal cu 1, se ia un punct A. Fie BC un diametru al bazei inferioare punctele A și B aparținînd aceleiași generatoare. Fie MN un diametru al bazei inferioare perpendicular la BC. Să se demonstreze că volumul mărginit de suprafața cilindrului și planul

care trece prin punctele A, M și N este cuprins între $\frac{1}{4}$ și $\frac{1}{6}$.

Soluție. Deoarece MN și BC sînt perpendiculare și AB e o generatoare AB și deoarece MN e diametru, porțiunea MBN este un semicerc. Deci volumul $ABMN$ este o copită cilindrică cu baza un semicerc, adică dacă r și h sînt respectiv raza și înălțimea cilindrului.

$$V_{ABMN} = \frac{2}{3} r^2 h. \quad \text{Dar} \quad \pi r^2 h = 1 \ \text{și} \ r^2 h = \frac{1}{\pi}.$$

$$\text{Deci} \ V_{ABMN} = \frac{2}{3\pi}.$$

Dar $\frac{1}{6} < \frac{2}{3\pi} < \frac{1}{4}$, deoarece $3\pi < 12$ sau $\pi < 4$ și $3\pi > 8$ adică $\pi > 4 \cdot \frac{2}{3}$.

Deci volumul din problemă e cuprins între $\frac{1}{4}$ și $\frac{1}{6}$.

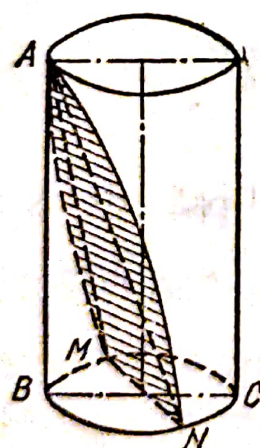


Fig. 6.58

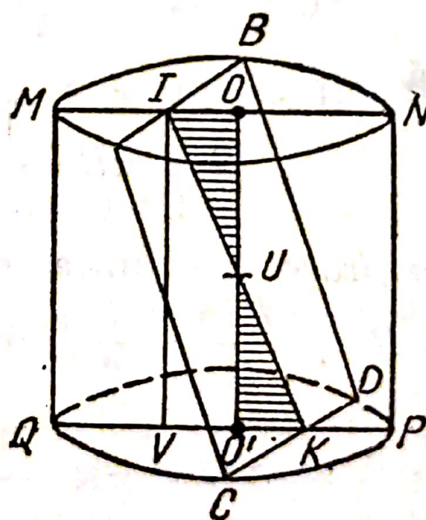


Fig. 6.59

6.59. Înălțimea unui cilindru circular drept este h și raza r, unde $h < 2r$. În acest cilindru este înscris un pătrat oblic față de axă, astfel încît toate vîrfurile lui se află pe cercurile bazelor. Să se afle latura pătratului. Aplicație $h = 2$, $r = 7$.

Soluție. Considerăm secțiunea axială $MNPQ$ a cilindrului. Fie O și O' centrele bazelor. Ducem în planul bazei superioare, AB perpendiculară pe MN la distanța x de O. În planul bazei inferioare ducem, de asemenea, CD perpendiculară pe PQ la aceeași distanță x de O'. Rezultă paralelismul dintre AB și CD, deoarece amîndouă sînt perpendiculare pe planul $MNPQ$, fiind perpendiculare pe dreptele MN și OO' ale acestuia. De asemenea, $AB = CD$, fiind egal distanțat de centrele cercurilor respective. Să notăm $AB = CD = l$.

Fie I intersecția dintre AB și MN, iar K intersecția dintre CD și QP. Dreapta IK taie pe OO' în U. AB este perpendiculară pe IK. Rezultă că paralelogramul $ABCD$ este un dreptunghi. Pentru ca dreptunghiul $ABCD$ să devină pătrat, trebuie ca să avem $AB = IK$. Dar

$$IA = \frac{l}{2} = \sqrt{r^2 - x^2},$$

iar în triunghiul IVK avem: $IK = \sqrt{h^2 + 4x^2}$, deci $2\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{h^2 + 4x^2}$ de unde

$$x = \sqrt{\frac{4r^2 - h^2}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4r^2 - h^2}{2}}.$$

Latura pătratului, în acest caz, este:

$$l = 2\sqrt{r^2 - \frac{4r^2 - h^2}{8}} = \sqrt{\frac{4r^2 + h^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{8r^2 + 2h^2}.$$

Cazul $h = 2$, $r = 7$ ne dă: $l = \frac{1}{2}\sqrt{392 + 8} = 10$.

6.60. Se dă un cilindru de rotație de generatoare G și un punct M mobil într-un plan paralel cu bazele la distanța d de baza superioară, în afara cilindrului. Notăm cu d_1 și d_2 distanțele lui M la doi diametri paraleli ai cilindrului, iar cu m_1 și m_2 distanțele lui

M la extremitățile uneia din generatoarele respective. Să se arate că independent de raza cilindrului avem:

$$d_2^2 - d_1^2 = m_2^2 - m_1^2 = G(G + 2d).$$

(G.M.B., 7661, *M.I.F.*, 1966).

Indicație. Fie secțiunea axială a cilindrului cu diametri paraleli AB, $A'B'$ și generatoarele AA' și BB'.

Fie M_1 și M_2 proiecțiile lui M pe diametrii $A'B'$ și AB și N_1 și N_2 proiecțiile lui pe planele celor două baze.

Figura $M_1M_2N_2N_1$ este un dreptunghi, deoarece MN_1N_2 este paralelă cu planul $ABA'B'$ ($M_1N_1 \perp \perp MN_1$) și analog $M_2N_2 \perp MN_2$.

Din triunghiurile dreptunghice MN_1N_2 și MN_2M_2 avem $d_1^2 = d^2 + M_1N_1^2$ și $d_2^2 = (d + G)^2 + M_2N_2^2$, sau $d_2^2 - d_1^2 + (d + G)^2 - d^2 = G(G + 2d)$.

Analog, din triunghiurile dreptunghice $MB'M_1$ și MBM_2: $m_1^2 = d_1^2 + B'M_1^2$; $m_1^2 = d_2^2 + MB_2^2$; însă $B'M_1 = BM_2$, deci $m_2^2 - m_1^2 = d_2^2 - d_1^2 = G(G + 2d)$.

6.61. Se rotește triunghiul echilateral ABC în jurul laturii BC. Să se arate că volumul V al solidului obținut este a șasea parte din produsul ariei laterale a aceluiași solid prin înălțimea h a triunghiului ABC.

(R.M.F., 633, *N.N. Mihăileanu*).

Soluție. Fie $AB = l$. Corpul obținut se compune din două conuri egale cu baza comună, deci

$$V = 2\frac{\pi h^2 \cdot l}{3 \cdot 2} = \frac{\pi h^2 l}{3}.$$

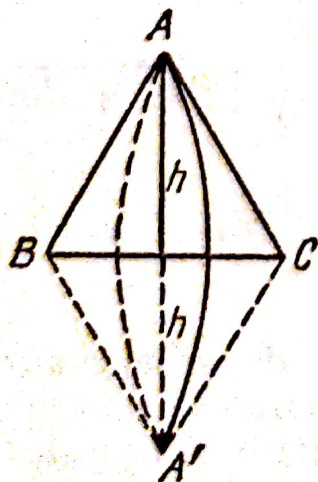


Fig. 6.61

Relația care dă pe V se mai poate scrie

$$V = \frac{2\pi hl \cdot h}{6},$$

lucru care ne arată exactitatea enunțului întrucît $2\pi hl$ este suprafața laterală a solidului.

6.62. Un vas de tablă în formă de trunchi de con are razele $2a$ și a iar generatoarea $6a$. Să se dimensioneze un dreptunghi de tablă din care se poate tăia dintr-o singură bucată suprafața laterală a vasului, cu cît mai puține deșeuri.

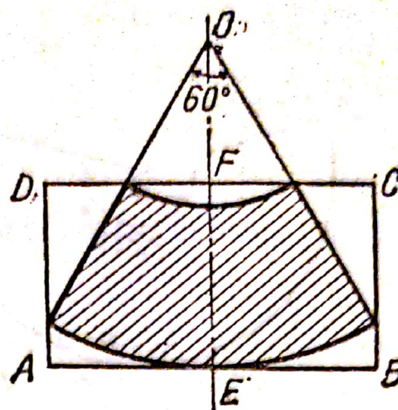


Fig. 6.62

Soluție. Desfacem suprafața laterală a trunchiului de con, tăind-o de-a lungul unei generatoare.

Desfășurarea are forma unui sector de coroană cu razele $6a$ și $12a$.

Baza mare desfășurată dă un arc de cerc care face parte dintr-un cerc cu raza $12a$. Dacă u este unghiul la centru al acestui arc, avem

$$12au = 4\pi a, \text{ deci } u = \frac{\pi}{3}.$$

Aria laterală este deci $\frac{1}{6}$ din aria coroanei cu razele de mai sus.

Să circumscriem acestei suprafețe desfășurate un dreptunghi astfel ca axa de simetrie a desfășuratei să fie și axa de simetrie pentru dreptunghi. Se vede că lungimea dreptunghiului este egală cu latura hexagonului regulat înscris cercului cu raza $12a = AB$.

Lățimea dreptunghiului este:

$$BC = OE - OF = 12a - 3a\sqrt{3} = 3a(4 - \sqrt{3}).$$

Aria desfășurată este $S = 18\pi a^2$; aria dreptunghiului $S_1 = 36a^2(4 - \sqrt{3})$. Procentul de deșeuri 30,9%.

6.63. Un sector circular corespunzător unui arc de 216°, într-un cerc cu raza de 15 cm, se înfășoară formînd suprafața laterală a unui con.

1°. Să se afle aria totală și volumul conului.

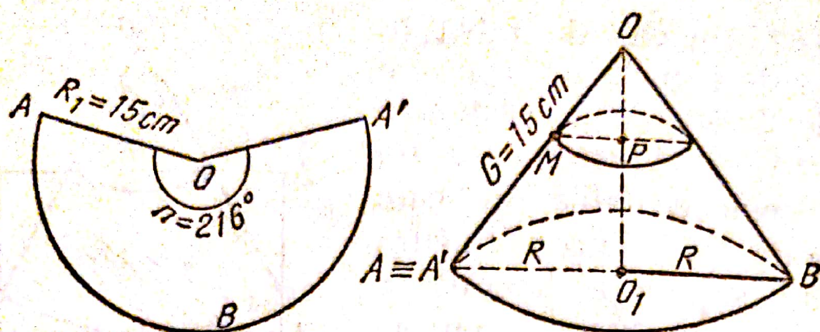


Fig. 6.63

2°. La ce distanță de vîrful conului trebuie făcută o secțiune printr-un plan paralel cu baza, astfel ca aria cercului de secțiune să fie 9π cm²?

Soluție. 1°. Dacă desenăm un sector și conul respectiv obținut prin înfășurare avem figurile cu notațiile:

$AO = R_1$ raza cercului din care face parte sectorul $= 15$ cm; $n = 216° =$ măs. $\overset{\frown}{ABA'}$.

Punctul O centrul cercului și care devine vîrful conului. $AO = G$ generatoarea conului obținut $= 15$ cm.

$OO_1 = h$ înălțimea conului obținut.

$AO_1 = O_1B = R$ raza conului, care nu se cunoaște.

Prin înfășurare, aria sectorului circular devine aria laterală a conului a cărui generatoare este chiar raza sectorului. Scriind că aceste două sînt egale, obținem $\pi RG = \dfrac{\pi R_1 n°}{360°}$ în care înlocuind $G = R_1 = 15$ cm și $n° = 216°$ obținem o ecuație de gr. 1 din care $\Rightarrow$ $\Rightarrow R = 9$ cm.

Avem un triunghi dreptunghic cu catetele $OO_1 = h$, $AO_1 = R = 9$ cm și ipotenuza $AO = G = 15$ cm.

Din triunghiul dreptunghic AO_1O, avem, conform teoremei lui Pitagora, $h^2 = 15^2$ cm² $- 9^2$ cm² $=$ $= 225$ cm² $- 81$ cm² $= 144$ cm² $\Rightarrow h = 12$ cm.

Deci aria totală a conului va fi $A_t = A_l + A_b =$ $= \pi RG + \pi R^2 = \pi R(G + R) = 9\pi$ cm $(15$ cm $+$ $+ 9$ cm$) = 216\pi$ cm².

Volumul conului $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi 81\ cm^2 \cdot 12\ cm}{3} =$
$= 324\pi\ cm^3$.

Observație. Raza conului R, se putea afla egalînd lungimea arcului de cerc a sectorului cu lungimea cercului de la baza conului.

2°. Notînd segmentul $MP = r$ raza cercului de secțiune care are aria de $9\pi\ cm^2 \Rightarrow r^2 = 9\pi$ de unde $r = 3$ cm, atunci distanța căutată va fi OP, pe care o aflăm scriind proporționalitatea laturilor omoloage în triunghiurile asemenea AO_1O și MPO ($\triangle AO_1O \sim \sim \triangle MPO$ pentru că sînt dreptunghice și au un unghi ascuțit comun sau conform teoremei fundamentale a asemănării, latura $MP \parallel AO_1$).

$$\frac{OP}{OO_1} = \frac{MP}{AO_1} \quad \text{sau} \quad \frac{3\ cm}{9\ cm} = \frac{OP}{12\ cm},$$

$$\text{de unde } OP = \frac{3 \cdot 12}{9}\ cm = 4\ cm.$$

6.64. Un triunghi isoscel cu una din laturile egale de mărimea a și unghiul de la vîrf egal cu α, se rotește în jurul uneia din laturile egale. Se cere:

a). Să se calculeze volumul corpului obținut,

b). Cît va fi de mare unghiul a, dacă volumul obținut este $\frac{\pi a^3}{12}$.

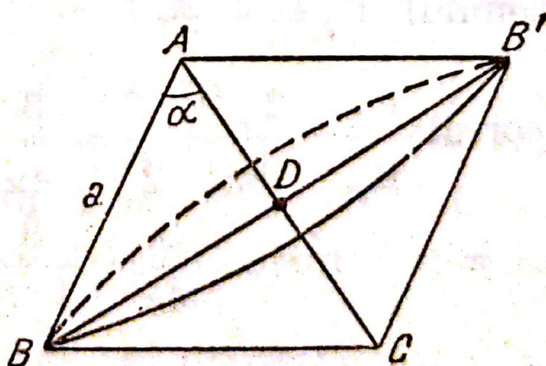


Fig. 6.64

Soluție. a) Avem:

$$V = \frac{\pi BD^2 \cdot AC}{3} = \frac{\pi a^3 \sin^2 \alpha}{3}.$$

b). Deci,

$$V = \frac{\pi a^3 \cdot \sin^2 \alpha}{3} = \frac{a^3}{12} \text{ și } \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}.$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{2}.$$

Rezultă: $\alpha = 30°$ sau $150°$.

6.65. Dintr-o piesă uzată în formă de con circular drept cu raza bazei de 2 dm și înălțimea $2\sqrt{2}$ dm se taie un corp în formă de cub cu una din fețe așezată pe baza conului, de volum maxim. Să se arate că-n felul acesta se folosește mai puțin de un sfert din material.

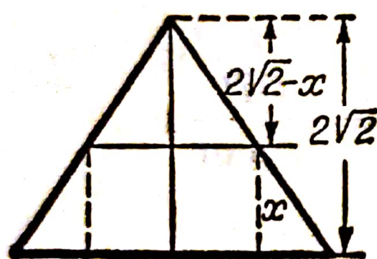


Fig. 6.65

Soluție. Notînd cu x latura cubului, se observă că diametrul secțiunii orizontale este diagonala unei fețe deci $x\sqrt{2}$. Din asemănarea triunghiurilor rezultate pe o secțiune axială obținem că

$$\frac{x\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2} - x}{2\sqrt{2}} \text{ sau } \frac{x\sqrt{2}}{2} = 1 \text{ deci } x = \sqrt{2}.$$

Volumul cubului este $V_1 = x^3 = 2\sqrt{2}$.

Volumul conului $V_2 = \dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

Făcînd raportul $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2\sqrt{2} \cdot 3}{8\pi\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4\pi}$.

Dar, pentru că $\pi > 3$ fracția $\dfrac{3}{4\pi} < \dfrac{3}{4 \cdot 3}$ deci $\dfrac{V_1}{V_2} < \dfrac{1}{4}$ sau $V_1 < \dfrac{V_2}{4}$.

6.66. Un pătrat $ABCD$ de latură a se rotește în jurul unei drepte din același plan cu pătratul care trece prin vîrful A și face cu diagonala AC un unghi x unde $45° < x < 90°$. Să se afle aria totală și volumul corpului de rotație obținut în funcție de a și x.

(G.M.B., 4788, *C. Ionescu-Țiu*)

Soluție. Fie B_1, C_1, D_1 proiecțiile punctelor B, C, D pe axa de rotație. Aria este formată din ariile laterale a două conuri și a două trunchiuri de con, iar volumul din volumele celor două trunchiuri de con, minus volumele celor două conuri.

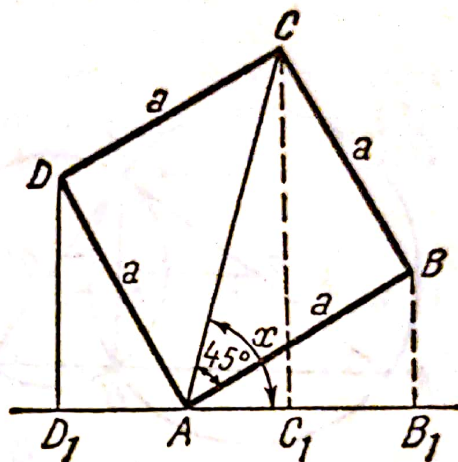


Fig. 6.66

$$AB_1 = a\cos(x - 45°) = \frac{a\sqrt{2}(\cos x + \sin x)}{2} = DD_1;$$

$$BB_1 = D_1A = \sin(x - 45°) = \frac{a\sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{2};$$

$$CC_1 = a\sqrt{2}\sin x.$$

Aplicînd formulele respective obținem:

$$S = 4\pi a^2\sqrt{2}\sin x; \quad V = \pi a^3\sqrt{2}\sin x.$$

Observație. Aria S și volumul V sînt maxime cînd $x = 90°$, iar pentru $x = 45°$ avem $S_1 = 4\pi a^2$ și $V_1 = \pi a^3$, care se verifică ușor, corpul de rotație fiind un cilindru cu $R = a$ și înălțimea $h = a$.

6.67. Se dau două cercuri C și C' cu centrele în O și O' și razele respective $R = 4$ cm și $R' = 3$ cm, cele două cercuri se intersectează în A și B.

a). Fie M punctul diametral opus lui A în cercul C și N punctul diametral opus cu A în cercul C'. Să se demonstreze că punctele M, B, N sînt coliniare.

b). Să se calculeze raportul dintre ariile triunghiurilor AOO' și AMN.

c). Presupunînd triunghiul OAO' dreptunghic în A, să se calculeze:

1°). segmentul OO' și valoarea raportului OP/PO', punctul P fiind intersecția dreptei AB cu OO'.

2°). aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului AMN în jurul catetei AM.

Fig. 6.67

Soluție. a). Avem $\sphericalangle ABM = 90°$, deoarece $\sphericalangle ABM$ este înscris în cercul C, laturile BA și BM trec prin extremitățile diametrului AM. La fel, $\sphericalangle ABN = 90°$, AN fiind diametru în cercul C'.

Deoarece $\sphericalangle ABM + \sphericalangle ABN = 90° + 90° = 180°$, punctele M, B, N sînt coliniare.

b). Segmentul OO' este linie mijlocie în triunghiul AMN.

Fie $P = AB \cap MN$. Triunghiurile AOO' și AMN sînt asemenea avînd unghiul din A comun, iar $AM = 2AO$ și $AN = 2AO'$ deci $\frac{AO}{AM} = \frac{AO'}{AN} = \frac{1}{2}$, $\frac{OO'}{MN} = \frac{1}{2}$, raportul de asemănare este $\frac{1}{2}$.

$$\frac{\text{aria }(AOO')}{\text{aria }(AMN)} = \left(\frac{1}{2} \cdot OO' \cdot AP\right) : \left(\frac{1}{2} \cdot MN \cdot AB\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot OO' \cdot AP\right) : \left(\frac{1}{2} \cdot 2OO' \cdot 2AP\right) = \frac{OO' \cdot AP}{4 \cdot OO' \cdot AP} = \frac{1}{4}.$$

c). $OO'^2 = 4^2 + 3^2 = 25$; $OO' = 5$ cm. Din relația catetei avem

$$OA^2 = OO' \cdot OP \text{ și } O'A^2 = OO' \cdot OP \Rightarrow \frac{OP}{OP'} =$$

$$= \frac{OA^2}{OO'} : \frac{O'A^2}{OO'} = \frac{OA^2}{O'A^2} = \frac{16}{9}.$$

Corpul obținut prin rotire este un con circular drept cu raza $R = AN = 6$ cm, înălțimea $I = AM = 8$ cm și generatoarea $G = MN = 2 \cdot OO' = 10$ cm.

Aria totală

$$A = \pi RG + \pi R^2 = \pi R(G + R) = 6\pi(10 + 6) = 96\pi \text{ cm}^2.$$

Volumul

$$V = \frac{\pi R^2 I}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = 96\pi \text{ cm}^2.$$

6.68. Se dă un con circular drept cu diametrul bazei de 12 cm și înălțimea egală cu 2/3 din diametru.

a). Să se afle aria laterală, aria totală și volumul conului.

b). Se desfășoară suprafața laterală a conului obținîndu-se un sector de cerc. Cîte grade are unghiul acestui sector?

La ce distanță de vîrful conului trebuie făcută o secțiune printr-un plan paralel cu baza astfel ca lungimea cercului de secțiune să fie 9π cm?

Soluție. a). Notăm cu R raza bazei conului, cu G generatoarea conului iar cu h înălțimea conului. Deoarece diametrul bazei conului este 12 cm rezultă că $R = 6$ cm. Înălțimea conului va fi: $h = 2/3 \cdot 12$ cm $= 8$ cm. Din triunghiul dreptunghic ale cărui catete sînt respectiv raza bazei conului și înălțimea conului și a cărui ipotenuză este generatoarea conului avem conform *teoremei lui Pitagora*:

$$G^2 = 64 \text{ cm}^2 + 36 \text{ cm}^2 \Rightarrow G = 10 \text{ cm}.$$

Deci aria laterală a conului va fi $A_1 = \pi RG = \pi \cdot 6$ cm $\cdot$ 10 cm $= 60\pi$ cm². Aria totală $A_t = A_l + \pi R^2 = 60\pi$ cm² $+ 36\pi$ cm² $= 96\pi$ cm².

Volumul conului $V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 36 \text{ cm}^2 \cdot 8 \text{ cm}}{3} =$

$$= 96\pi \text{ cm}^3.$$

b). Prin desfășurare pe un plan, suprafața laterală a conului devine un sector de cerc a cărui rază este chiar generatoarea conului. Aria acestui cerc va fi $A_l = \pi G^2 = 100\pi$ cm².

Aria sectorului de cerc va fi aria laterală a conului adică $A_2 = 60\pi$ cm².

Deoarece unghiului la centru de 360° îi corespunde o arie de 100π cm², rezultă că unghiul la centru de $x°$ îi corespunde o arie de 60π cm². Avem proporția corespunzătoare:

$$\frac{360°}{x} = \frac{100}{60} \text{ de unde } x = \frac{60 \cdot 360°}{100} = 216°.$$

Deoarece lungimea cercului de secțiune este 9π cm rezultă din formula care dă lungimea unui cerc că $2\pi r = 9\pi$ cm, de unde raza cercului de secțiune este $r = 4{,}5$ cm.

Notăm: $DC = R$; $AD = h$; $AC = G$; AE este distanța căutată, iar $EF = r$. Deoarece triunghiurile AEF și ADC sînt asemenea rezultă scriind proporționalitatea laturilor omoloage:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EF}{DC} \text{ sau } \frac{AE}{8 \text{ cm}} = \frac{4{,}5 \text{ cm}}{6 \text{ cm}}$$

$$\text{de unde } AE = \frac{4{,}5 \cdot 8}{6} \text{ cm}.$$

6.69. Se dă triunghiul echilateral ABC de latură a. Rotim în planul triunghiului acest triunghi în jurul vîrfului B, cu un unghi de 30° și A ajunge în A_1, iar C în C_1. Fie $M = AC \cap A_1C_1$.

a). Să se arate că $BM \perp AC_1$.

b). Să se arate că patrulaterul A_1AC_1C este trapez isoscel, echivalent cu pătratul de latură $\frac{a}{2}$.

c). Se face o rotaţie tot în jurul lui B de un unghi egal cu 90°. Se obţine trapezul isoscel A_1C_1AC şi aria $(A_1C_1AC) = 2$ aria (ABC).

Soluţie. 1). Din $\triangle A_1AM = \triangle CC_1M \Rightarrow MA = MC_1$ şi cum $BA = BC_1 = a$ urmează că BM este mediatoarea segmentului AC_1, deci $BM \perp AC_1$ şi este bisectoare a unghiului ABC_1.

2). patrulaterul A_1AC_1C este trapez isoscel, deoarece $BM \perp A_1C$ fiind bisectoarea în triunghiul isoscel A_1BC şi cum $BM \perp AC_1$, rezultă $A_1C \parallel AC_1$ iar $CC_1 = A_1A = AC_1$ coarde care subîntind arce egale cu 30°.

Aria $(A_1AC_1C) = 3$ aria (BCC_1) — aria (A_1BC);

dar aria $(BCC_1) = \frac{a^2}{4}$ şi aria $(A_1BC) = \frac{a^2}{2}$.

Deci aria $(A_1AC_1C) = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$.

3). Avem aria $(BC_1A) = \frac{a^2}{4}$ şi aria (A_1BC) unde A_1BC triunghi isoscel $A_1B = BC = a$, iar $\sphericalangle A_1BC = 150°$ este $\frac{a \cdot A_1A_2}{2}$ şi $A_1A_2 \perp BC (A_2 \in BC)$.

Deci $A_1A_2 = \frac{a}{2}$. Astfel că aria $(A_1BC) = \frac{a^2}{4}$.

În concluzie, aria $(A_1C_1AC) = 2$ aria (ABC) + aria (ABC_1) — aria $(A_1BC) = 2$ aria (ABC).

6.70. Un triunghi isoscel ABC are $AB = AC$ şi $\sphericalangle A = 30°$ iar $BC = 5$ m. Un cerc cu centrul în B şi de rază $R = BC$ taie latura AC în D şi latura AB în E.

a). Să se calculeze în centimetri segmentele CD şi DE.

b). Să se afle în dm^3 volumul obţinut prin rotirea triunghiului ABC în jurul bazei BC.

(G.M.B., 4486, *C. Ionescu-Ţiu*).

Soluție. a). $BC = BD = BE$; $\sphericalangle BCD = 75°$; $\sphericalangle BDC = 75°$; $\sphericalangle DBC = 30°$; $\sphericalangle DBE = 75° -$

$$- 30° = 45°; \ \sphericalangle DBF = \frac{1}{2} \cdot 45°.$$

$$CD = 2BC \cdot \cos 75° = 2BC \sin 15° = 10 \sin 15°.$$
$$DE = 2BD \sin 22°30' = 10 \cdot \sin 22°30'.$$

$$\sin 15° = \sin (45° - 30°) =$$

$$= \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45° = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4} =$$

$$= \frac{1{,}41 \cdot 0{,}73}{4} \cong 0{,}253 \text{ deci } CD \cong 2{,}58 \text{ m.}$$

$$\sin 22°\,30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{0{,}59}}{2} \cong 0{,}383.$$

$$DE = 10 \cdot 0{,}383 = 3{,}83 \text{ m} = 382 \text{ cm.}$$

b). $V = \frac{\pi R^2 I}{3} = \frac{\pi R^2}{3}\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{5\pi R^2}{2}$ unde R este înălțimea din A a triunghiului isoscel ABC, deci $R = 2{,}5 \cdot \text{tg } 75°$.

$$\text{tg } 75° = \text{tg } (45° + 30°) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \cong 3{,}73.$$

$$V = \frac{5 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}73^2}{3} = \frac{15{,}70 \cdot 13{,}9139}{3} \cong$$

$$\cong 69{,}811 \text{ m}^3 \approx 69\,811 \text{ dm}^3.$$

6.71. Un dreptunghi $ABCD$ cu laturile $AB = 4$ m și $AD = 3$ m se rotește în jurul unei drepte care trece prin A și este paralelă cu diagonala BD.

a). care este aria corpului de rotație obținut?

b). care este volumul corpului de rotație obținut prin rotirea dreptunghiului dat în jurul unei axe dusă din A perpendiculară pe AC?

(G.M.B., 4783, *C. Ionescu-Țiu*).

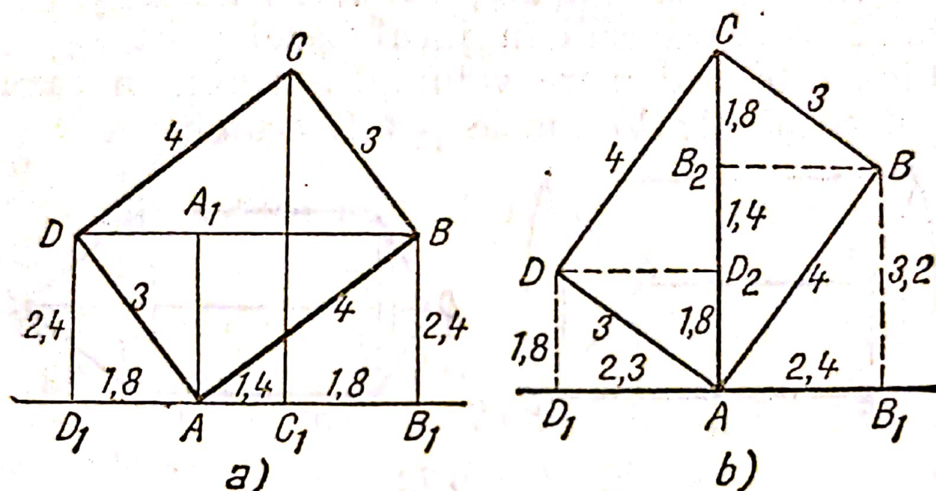


Fig. 6.71

Soluție. a). Fie B_1, C_1 și D_1 proiecțiile B, C și D pe axa de rotație, iar A_1 proiecția lui A pe BD. Diagonala $BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m.

$$BB_1 = DD_1 = AA_1 = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4 \text{ m}.$$

$$AD_1 = DA_1 = \frac{AD^2}{BD} = \frac{9}{5} = 1{,}8 \text{ m (teorema catetei)}.$$

$C_1B_1 = 1{,}8$ m; $AC_1 = 5 - 3{,}6 = 1{,}4$; $AB_1 = A_1B = 5 - 1{,}8 = 3{,}2$ m; $CC_1 = 2AA_1 = 4{,}8$.

$$S = \pi 2{,}4 \cdot 3 + \pi \cdot 2{,}4 \cdot 4 + \pi 4 \cdot (2{,}4 + 4{,}8) + \pi \cdot 3(2{,}4 + 4{,}8) = 67{,}2\ \pi \text{ m}^2.$$

b). Volumul

$$V = \frac{\pi\, 2{,}4}{3}(1{,}8^2 + 5^2 + 1{,}8 \cdot 5) +$$

$$+ \frac{\pi \cdot 2{,}4}{3}(5^2 + 3{,}2^2 + 3{,}2 \cdot 5) - \frac{\pi \cdot 2{,}4}{3} \cdot 1{,}8^2 -$$

$$- \frac{\pi \cdot 2{,}4}{3} \cdot 3{,}2^2 = 60\pi \text{ m}^3.$$

6.72. Se consideră un trapez:
a). Rotim trapezul în jurul bazei mici.
b). Rotim trapezul în jurul bazei mari.
Cînd este mai mare volumul obținut, în cazul a) sau în cazul b)? Volumele pot fi egale?

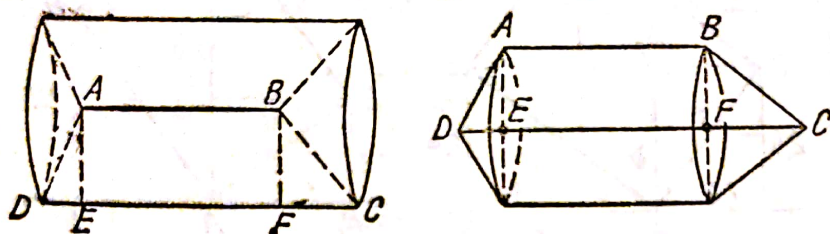


Fig. 6.72

Soluție. Se știe că volumul unui con circular drept este $\frac{1}{3}$ din volumul unui cilindru circular drept, acestea avînd bazele și înălțimile respectiv egale. În cazul a) corpul este format din cilindrul (fig. 1) cu raza AE (înălțimea trapezului) și înălțimea AB, avînd volumul V_1, la care se adaugă $\frac{2}{3}$ din cilindrul cu raza AE și înălțimea DE, avînd volumul V_2 și la care se adaugă $\frac{2}{3}$ din cilindrul cu raza $BF = AE$ și înălțimea FC, avînd volumul V_3.

Deci $V_a = V_1 + \frac{2}{3} V_2 + \frac{2}{3} V_3$ adică $V_a = V_1 + \frac{2}{3}(V_2 + V_3)$.

În cazul b) corpul este format din cilindrul (fig. 2) de rază AE și înălțimea AB, cu volumul V_1, la care se adaugă conul de rază AE și înălțimea DE cu volumul $\frac{1}{3}$ din V_2 și la care se mai adaugă conul de rază $BF = AE$ și înălțime EC cu volumul egal cu $\frac{1}{3}$ din cilindrul de volum V_3. Deci $V_a = V_1 + \frac{1}{3}(V_2 + V_3)$.

Evident, $V_a > V_b$; deci volumul mai mare este în cazul a). Volumele nu pot fi egale căci ar însemna ca $\frac{2}{3}(V_2 + V_3) = \frac{1}{3}(V_2 + V_3)$, adică $V_2 + V_3 = 0$ ceea ce este imposibil, cînd $ABCD$ este un trapez oarecare.

6.73. O foaie de tablă galvanizată are forma unui triunghi ascuțitunghi ABC cu latura cea mai mare $AB = 8$ dm, iar aria de 24 dm² și $\sphericalangle BAC = 60°$.

a). Să se decupeze un dreptunghi cu raportul dimensiunilor 0,8 care să aibă în această condiție și o arie cît mai mare posibilă, dimensiunea cea mare fiind pe AB.

b). Să se arate că, aria dreptunghiului decupat nu depinde de unghiul ascuțit $BAC = \alpha$.

c). Care este aria dreptunghiulară cea mai mare ce se poate decupa din triunghiul ABC fără a se impune raportul dimensiunilor dreptunghiului?

d). Care este volumul născut prin rotirea triunghiului ABC în jurul lui AB?

(G.M.B., 12998, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Prin C ducem o paralelă la AB iar prin A o perpendiculară pe AB și acestea se intersectează în punctul C'. Triunghiurile ABC și ABC' au aceeași bază și aceeași înălțime, deci sînt echivalente. Un dreptunghi avînd baza situată pe AB și înălțimea dreptunghiului $h = 0,8\ AB$, va fi același dreptunghi ca mărime înscris în triunghiul ABC sau ABC' pe

motive de proporționalitate. Notăm baza dreptunghiului cu $5x$, atunci $h = 0{,}8 \cdot 5x = 4x$. Aria dreptunghiului decupat va fi $S = 5x \cdot 4x = 20x^2$.

Fie M vîrful dreptunghiului de pe BC' și M' și M'' proiecțiile lui pe AB și respectiv AC', deci $MM' = 4x$ și $MM'' = 5x$.

Înălțimea AC' este egală cu $\frac{24 \cdot 2}{8} = \frac{48}{8} = 6$ m.

Din asemănarea triunghiurilor ABC' și $MM'B$ avem $\frac{8 - 5x}{4x} = \frac{8}{6}$, deci $x = \frac{24}{31}$; $S = 11{,}8834$ dm².

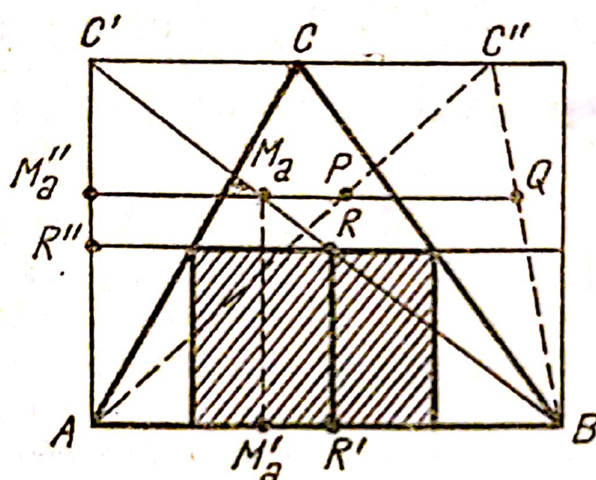


Fig. 6.73

b). Dacă ducem două paralele cu AB care să intersecteze triunghiurile ABC și ABC', porțiunile din fiecare triunghi cuprinse între cele două paralele sînt trapeze echivalente avînd aceleași baze și aceeași înălțime ca dimensiuni, și prin urmare aria dreptunghiului decupat nu depinde de unghiul ascuțit $BAC = \alpha$.

c). Fie u și v dimensiunile dreptunghiului cu aria cea mai mare fără a impune raportul dimensiunilor. Avem:

$$S_{max} = uv \text{ și } \frac{8 - u}{v} = \frac{8}{6};$$

$$48 - 6u = 8v; \quad S = \frac{(48 - 6u)\,u}{8} = \frac{6}{8}(8u - u^2).$$

Maximumul lui $8u - u^2$ este pentru $u = 4$.

$$S_{max} = uv = \frac{6}{8}(32 - 16) = 12 \text{ dm}^2,$$

adică jumătate din aria triunghiului dat, una din laturile dreptunghiului fiind linie mijlocie în triunghiul ABC.

$$\text{d)}.\ V = \frac{\pi R^2 I}{3} = \frac{\pi 6^2 \cdot 8}{3} = 96\pi \text{ dm}^3.$$

6.74. Un con și un trunchi de con sînt echivalente și au înălțimile egale. Să se demonstreze că din razele bazelor se poate construi un triunghi. Să se determine unghiul cel mare al acestui triunghi.

Soluție. Fie c raza bazei conului și a, b razele bazelor trunchiului de con.

Rezultă din enunț:

$$\frac{1}{3}\pi c^2 h = \frac{1}{3}\pi(a^2 + b^2 + ab)h$$

sau

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab. \qquad (1)$$

Trebuie să arătăm mai întîi că:

$$a + b > c \text{ și } a - b < c$$

după care se va putea afirma că, cu a, b, c se poate construi un triunghi.

Din (1) deducem:

$$a^2 + b^2 + ab > c^2 - ab,$$

$$(a + b)^2 > c^2, \text{ sau } (a + b) > c$$

și apoi $a^2 + b^2 + ab < c^2 + 3ab$; $(a - b)^2 < c^2$; $|a - b| < c$.

Deci cu a, b, c se poate forma un triunghi.

Teorema cosinusurilor aplicată în acest triunghi dă:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad (2)$$

C fiind unghiul cel mai mare.

Comparînd relațiile (1), (2), rezultă:

$$ab = -2ab \cdot \cos C \text{ sau } \cos C = -\frac{1}{2}. \text{ Deci } C = 120°.$$

6.75. Să se arate că raportul dintre volumul și aria oricărui poliedru circumscris aceleiași sfere este constant.

Soluție. Un poliedru arbitrar, circumscris unei sfere date, poate fi descompus în piramide avînd vîrful comun în centrul sferei și cu baze toate fețele poliedrului.

Volumul unei piramide fiind egal cu produsul dintre bază și o treime din înălțime, care în cazul problemei este o treime din raza sferei, de unde rezultă că raportul dintre volumul poliedrului și aria sa este o treime din raza sferei.

PROBLEME DE SINTEZĂ. GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

7.1. Fie cercul (C) și A un punct pe acest cerc. Din A ducem perpendiculara AB pe planul cercului. Să se afle locul geometric al proiecției N a punctului A pe dreapta BM unde M este un punct mobil pe cercul dat.

Soluție. Triunghiurile ABM, AMN și ANB sînt dreptunghice. Punctul N este pe sfera de diametru AB dar și pe suprafața conică generată de dreapta BM. Planul AMN este perpendicular pe planul cercului (C). Cercul cu diametrul AM este conținut în sfera care are ca cerc mare cercul (C) și conține punctul N, de unde rezultă că locul geometric al punctului N este intersecția celor două sfere și se arată, de asemenea, și reciproc — orice punct al intersecției celor două sfere aparține locului geometric căutat.

7.2. Considerînd globul pămîntesc ca o sferă, se cere:

a). Să se afle locul geometric al proiecției pe planul ecuatorului al punctelor M de pe Pămînt care au latitudinea egală cu longitudinea.

b). Să se afle locul geometric generat de dreapta AM, A fiind punctul de longitudine nulă.

Soluție. a). Din A și M ducem perpendiculara pe Oy în M'' și M', fiind pe intersecția planului meridian cu ecuatorul. Din triunghiurile dreptunghice OMM' și AOM'' rezultă $OM = OM''$ deci M' și M'' coincid. A și O sînt fixe, iar $\sphericalangle AM'O = 90°$. Locul geometric al lui M' este format din două cercuri de diametru cît raza pămîntului, cel de-al doilea trece prin O și A' simetricul lui A în raport cu O.

b). $\sphericalangle MOA = 45°$, deci fiind dată dreapta (d) perpendiculară Ecuatorului în A, dreapta (d) rămîne fixă, iar AM rămîne înclinată față de (d) cu 45°.

7.3. Se dă o sferă de rază R cu centrul O. Fie un con circular drept cu vîrful S, circumscris sferei. Generatoarele acestui con sînt tangente sferei în punctele situate pe un cerc de diametru AB. Se consideră de asemenea conul cu vîrful în O și avînd ca bază același cerc mic al sferei de diametru AB.

a). Să se afle unghiul u, jumătatea unghiului de la vîrful S din secțiunea axială a conului circumscris, știind că suma volumelor conurilor SAB și OAB este egală cu 3/8 din volumul sferei.

b). Fiind dată raza R a sferei, să se arate că volumul conului circumscris sferei este egal cu

$$\frac{R^3(1+\sin u)^2}{3\sin u(1-\sin u)}.$$

c). Să se arate că minimumul volumului conului circumscris sferei păstrînd R constant este egal cu de două ori volumul sferei.

d). Să se calculeze unghiul u cel mai mare dintre unghiurile u cuprinse în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care volumul conului circumscris sferei date este egal cu $3R^3$.

(*Bacalaureat*, 1973).

Soluție.

a). $$V(SAB) + V(OAB) = \frac{3}{8}\cdot\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi R^3}{2}. \quad (1)$$

Dar $V(SAB) = \frac{\pi}{3}\,\omega B^2\cdot\omega S$, ω centrul cercului de diametru AB.

$V(OAB) = \frac{\pi}{3}\,B^2\cdot O\omega$ și deci $V(SAB) + V(OAB) =$ $= \frac{\pi}{3}\cdot\omega B^2\cdot OS.$

Din $\triangle O\omega B$, avem $\omega B = R\cos u$ și din $\triangle OBS$, $OS = \frac{R}{\sin u}$. Astfel că (1) devine: $\frac{\pi}{3} R^2 \cos^2 u \frac{\pi R}{\sin u} = \frac{\pi R^3}{2} \Rightarrow 2\cos^2 u = 3\sin u \Rightarrow 2\sin^2 u + 3\sin u - 2 = 0 \Rightarrow \sin u = \frac{-3 \pm 5}{4}$, care dă singura soluție valabilă $\sin u = \frac{1}{2}$ și cum u este ascuțit, rezultă $u = 30°$.

b). Volumul conului circumscris sferei este

$$V(SMN) = \frac{\pi}{3} O'N^2 \cdot O'S. \qquad (2)$$

Din $\triangle OBS \sim \triangle O'NS \Rightarrow \frac{O'N}{R} = \frac{SN}{OS} = \frac{SO'}{SB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow O'N = \frac{R(SO+R)}{OS\cos u} = \frac{R\left(\frac{R}{\sin u} + R\right)}{R\operatorname{ctg} u} = \frac{R(1+\sin u)}{\cos u}$$

iar $O'S = R + OS = R + \frac{R}{\sin u} = \frac{R(1+\sin u)}{\sin u}$.

Înlocuind în (2) avem:

$$V(SMN) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2(1+\sin u)^2}{\cos^2 u} \cdot \frac{R(1+\sin u)}{\sin u} = \frac{R^3(1+\sin u)^2}{3\sin u\,(1-\sin u)}.$$

c). Minimumul volumului conului circumscris sferei este dat de minimumul funcției $z = \frac{(1+\sin u)^2}{\sin u(1-\sin u)}$. Avînd în vedere că u este ascuțit, $z > 0$. De aici avem: $(1+z)\sin^2 u - (z-2)\sin u + 1 = 0$ și această ecuație în $\sin u$ trebuie să aibă rădăcini reale; deci $\Delta = (z-2)^2 - 4 - 4z \geqslant 0 \Rightarrow z^2 - 8z > 0$ și cum $z > 0$, trebuie ca $z \in [8, \infty]$. Astfel că minimumul lui z este 8 și volumul minim este $= \frac{\pi R^3}{2} \cdot 8 = 2V$ sf, adică de

două ori volumul sferei de rază R. Se poate determina şi unghiul u corespunzător, rezolvînd ecuaţia de mai sus în cazul $z = 8$ şi obţinem: $9 \sin^2 u - 6 \sin u + 1 = 0 \Rightarrow (3 \sin u - 1)^2 = 0$; $\sin u = \frac{1}{3}$ şi de aici $u = \arcsin \frac{1}{3}$.

d). Avem ecuaţia $\frac{\pi R^3 (1 + \sin u)^2}{3 \sin u\,(1 - \sin u)} = 3\pi R^3$, sau $10 \sin^2 u - 7 \sin u + 1 = 0 \Rightarrow \sin u = \frac{7 \pm 3}{20}$ $\sin u = \frac{1}{2}$ sau $\sin u = \frac{1}{5}$. Sînt deci două valori ale lui u, care satisfac condiţia impusă şi cea mai mare este cea corespunzătoare lui $\sin u = \frac{1}{2}$, adică $u = 30°$.

7.4. Un trunchi de con este circumscris unei sfere.

a). Să se arate că raportul ariilor totale ale acestor corpuri este egal cu raportul volumelor lor.

b). Cum poate varia acest raport?

Soluţie. a). Fie G, R, r elementele triunghiului de con şi ρ raza sferei. S_1, S_2, V_1 şi V_2 ariile şi volumele respective.

Avem $G = R + r$ şi $\rho^2 = Rr$.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{R^2 + r^2 + Rr}{2Rr} = m.$$

b). Obţinem $\frac{R^2}{r} + (1 - 2m)\frac{R}{r} + 1 = 0.$

Pentru ca rădăcinile acestei ecuaţii în $\frac{R}{r}$ să fie reale şi pozitive trebuie ca realizantul şi suma rădăcinilor să fie pozitive. Deci, $4m^2 - 4m - 3 > 0$ şi $2m - 1 > 0$ sau $m \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

7.5. La o piramidă regulată cu baza un pătrat, notăm cu α unghiul diedru de la bază, cu β unghiul diedru a două fețe laterale adiacente și cu γ unghiul a două muchii laterale vecine. Să se stabilească relația

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \sqrt{\cos\gamma}.$$

Soluție. Fie piramida $VABCD$ și înălțimea $VO = h$. Ducem $VF \perp CD$, și $DG \perp CV$; $CD = a$, $\sphericalangle OFV = \alpha$, $\sphericalangle BGD = \beta$, $\sphericalangle CVD = \gamma$.

$$\frac{h}{a} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2};\quad DC \cdot VF = VC \cdot DG.$$

Rezultă:

$$DG = \frac{a\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}};\quad \sin\frac{\beta}{2} = \frac{OD}{DG} = \frac{\sqrt{2h^2+a^2}}{\sqrt{4h^2+a^2}},$$

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{2+\operatorname{tg}^2\alpha}{2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)};\quad \cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{VF}{FC} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}-1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}+1} = \frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \sqrt{\cos\gamma}.$$

7.6. Într-un cilindru închis, cu lungimea de 1 m și cu secțiunea de 2×10^{-3} m², plin cu oxigen, se află un piston mobil. Pistonul stă în mijlocul cilindrului,

iar gazul aflat în cele două compartimente se află la 0°C și presiunea atmosferică normală $p = 1{,}013 \times \times 10^5 N/m^2$.

a). Se deplasează pistonul cu 0,4 m față de poziția inițială. Ce presiune are gazul în fiecare compartiment?

b). Ce forță trebuie să acționeze asupra pistonului, pentru a-l menține în noua lui poziție?

Temperatura se consideră constantă, grosimea pistonului este neglijabilă iar oxigenul gaz perfect.

Soluție. a). Avem $V_1 = V_2 = 0{,}5 \times 2 \times 10^{-3} = 10^{-3}\ \text{m}^3$.

$$p_1 = p_2 = 1{,}013 \times 10^5\ N/\text{m}^2.$$

$$V_1' = 0{,}1 \times 2 \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-4}\ \text{m}^3.$$

$$V_2' = 0{,}9 \times 2 \times 10^{-3} = 1{,}8 \times 10^{-3}\ \text{m}^3.$$

$$\Rightarrow p_1 V_1 = p_1' V_1'.$$

$$p_1' = \frac{p_1 V_1}{V_1'} = \frac{10^{-3}}{2 \times 10^{-4}} \times 1{,}013 \times 10^5 = 5{,}065 \times 10^5\ \text{N/m}^2,$$

$$p_2' = \frac{10^{-3}}{1{,}8 \times 10^{-3}} \times 1{,}013 \times 10^5 = 0{,}562 \times 10^5\ \text{N/m}^2,$$

b). $p_1' - p_2' = 5{,}065 \times 10^5 - 0{,}562 \times 10^5 = 4{,}503 \times \times 10^5\ \text{N/m}^2$.

$$F = (p_1' - p_2')\, S = 2 \times 10^{-3} \times 4{,}5 \times 10^5 = 900\ \text{N}.$$

7.7. Fie M un punct în interiorul unui tetraedru $VABC$. Dreptele AM, BM, CM intersectează fețele VBC, VCA, VAB respectiv în A_1, B_1, C_1, iar dreptele VA_1, VB_1, VC_1 întîlnesc muchiile BC, CA, AB respectiv în A_2, B_2, C_2.

Să se arate că volumul tetraedrului $VA_2B_2C_2$ este cel mult un sfert din volumul $VABC$.

(G.M., 13455, C. *Ionescu-Țiu*).

Soluție. Înălțimea dusă din V a tetraedrului $VABC$ este aceeași cu a tetraedrului $VA_2B_2C_2$ dusă din V, deci trebuie arătat că: aria $A_2B_2C_2 \leqslant$ aria ABC.

Notăm

$$\frac{A_2C}{A_2B} = a; \quad \frac{B_2A}{B_2C} = b; \quad \frac{C_2B}{C_2A} = c; \text{ aria } ABC = (ABC).$$

Dreptele AA_2, BB_2, CC_2 fiind concurente, avem $a \cdot b \cdot c = 1$.

Avem:

$$\frac{(A_2B_2C_2)}{(ABC)} = \frac{(ABC) - (A_2B_2C) - (A_2C_2B) - (B_2C_2A)}{(ABC)} =$$

$$= 1 - \frac{B_2C}{AC} \cdot \frac{A_2C}{BC} - \frac{B_2A}{AC} \cdot \frac{C_2A}{AB} - \frac{A_2B}{BC} \cdot \frac{C_2B}{AB} =$$

$$= 1 - \frac{a}{(b+1)(a+1)} - \frac{b}{(b+1)(c+1)} -$$

$$- \frac{c}{(a+1)(c+1)} =$$

$$= \frac{(a+1)(b+1)(c+1) - ac - a - ab - b - bc - c}{(a+1)(b+1)(c+1)} =$$

$$= \frac{1 + abc}{abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1};$$

dar $abc = 1$ *(teorema lui Ceva)*. Deci,

$$\frac{(A_2B_2C_2)}{(ABC)} = \frac{1}{2 + \left[\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right)\right]} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

deoarece $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, $b + \frac{1}{b} \geqslant 2$, $c + \frac{1}{c} \geqslant 2$, egalitatea are loc cînd $a = b = c = 1$, adică A_1, B_1, C_1 sînt situate pe medianele VA_2, VB_2, VC_2 respectiv ale triunghiului VBC, VCA, VAB iar dreptele A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, sînt paralele respectiv cu AB, BC, CA.

7.8. Fie G centrul de greutate al tetraedrului $ABCD$. Dacă triunghiul GAD este dreptunghic în G, atunci muchia AD este egală cu bimediana corespunzătoare muchiilor AD și BC.

(G.M.F.B., 5938, *N.M.*).

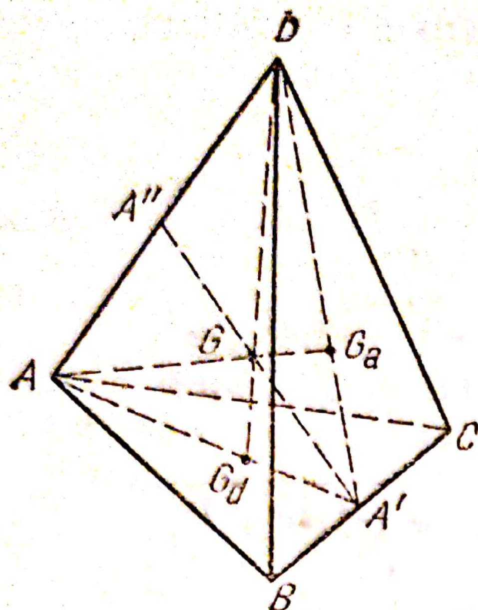


Fig. 7.8

Soluție. Notăm cu G_a centrul de greutate al feței BCD și cu G_d centrul de greutate al feței ABC. Fie A' mijlocul lui BC și A'' mijlocul lui AD. Rezultă că AG_a și DG_d sînt mediane în tetraedru iar $A'A''$ este bimediana corespunzătoare muchiilor AD și BC. Se știe că expresiile pătratelor lungimilor medianelor sînt:

$$AG_a^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + AD^2) - \frac{1}{9}(BC^2 + CD^2 + BD^2). \qquad (1)$$

$$DG_d^2 = \frac{1}{3}(DA^2 + DB^2 + DC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + AC^2). \qquad (2)$$

Avem:

$$AG = \frac{3}{4} AG_a \text{ și } DG = \frac{3}{4} DG_d$$

sau

$$AG^2 = \frac{9}{16} AG_a^2 \text{ și } DG_a^2 = \frac{9}{16} DG_d^2. \qquad (3)$$

Ținînd seama că triunghiul GAD este dreptunghic în G, are loc *teorema lui Pitagora*

$$AG^2 = DG^2 = AD^2. \qquad (4)$$

Ținînd cont de egalitățile (1), (2) și (3) relația (4) devine:

$$\frac{3}{16}(AB^2+AC^2+AD^2) - \frac{1}{16}(BC^2+CD^2+BD^2) + \frac{3}{16}(DA^2+DB^2+DC^2) - \frac{1}{16}(AB^2+BC^2+AC^2) = AD^2.$$

Efectuînd eliminarea numitorilor şi făcînd reducerile obţinem:

$$AB^2 + AC^2 + DB^2 + DC^2 - BC^2 = 5AD^2. \qquad (5)$$

Expresia lungimii bimedianei $A'A''$ este

$$A'A'' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AB^2 + AC^2 + DB^2 + DC^2 - BC^2 - AD^2},$$

sau ţinînd seama de (5) avem:

$$A'A'' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5AD^2 - AD^2}$$

deci

$$A'A'' = AD.$$

7.9. Se secţionează o piramidă oarecare triunghiulară $VABC$ cu un plan paralel cu faţa ABC, care taie muchiile în a, b, c.

Se proiectează a, b, c pe planul ABC în a', b', c'. Fie $A'(Bc' \cap Cb')$, $B' = (Ca' \cap Ac')$ şi $C' = (Ab' \cap Ba')$. Să se arate că perechile de triunghiuri $(ABC, a'b'c')$, $(ABC, A'B'C')$, $(A'B'C', a'b'c')$ sînt secţiuni paralele în trei piramide ale căror vîrfuri sînt pe aceeaşi dreaptă.

Soluţie. Secţiunea plană abc este paralelă cu baza ABC. Triunghiul $a'b'c'$ fiind proiecţia unui triunghi paralel cu ABC, va avea şi el laturile paralele cu omoloagele lui ABC. Triunghiurile ABC, $a'b'c'$ sînt deci omotetice şi vîrfurile omoloage sînt pe proiecţiile muchiilor VA, VB, VC adică Aa', Bb', Cc' care concură în V' proiecţia vîrfului V pe planul ABC.

Rezultă că oriunde ar fi în spaţiu $a'b'c'$ paralel cu ABC, dreptele Aa', Bb', Cc' sînt muchiile unei piramide cu vîrful V_1 pe perpendiculara în V' la planul ABC.

Triunghiul $A'B'C'$ are vîrfurile A' şi B' astfel că

$$\frac{A'b'}{A'C} = \frac{A'c'}{A'B} = \frac{b'c'}{BC} = \frac{c'a'}{CA} = \frac{b'a'}{BC}$$

adică latura $A'B'$ este paralelă cu $a'b'$ şi cu AB.

Analog, celelalte laturi ale lui $A'B'C'$ sînt paralele cu laturile lui $a'b'c'$ și ABC. Atunci dreptele $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$ și dreptele AA', BB', CC' concură în două puncte V_2' și V_3'.

Fie acum $a_1'b_1'c_1'$, $A_1'B_1'C_1'$ o poziție determinată în spațiu a triunghiurilor $a'b'c'$ și $A'B'C'$ paralele cu ABC. Dreptele AA_1', BB_1', CC_1' sînt muchiile unei piramide cu vîrful într-un punct V_3 pe perpendiculara în V_3' pe planul ABC, iar dreptele $A_1'a_1'$, $B_1'b_1'$, $C_1'c_1'$ sînt muchiile unei piramide cu vîrful în V_2 pe perpendiculara în V_2' la planul ABC.

Dar punctele V_1', V_2', V_3' sînt pe aceeași dreaptă în planul ABC și deci și vîrfurile V_1, V_2, V_3 sînt pe o dreaptă.

7.10. Se consideră un romb $ABCD$ cu unghiurile $B = D < 90°$ și diagonalele $AC = 2a$ și $BD = 2b$ intersectîndu-se în O. Se duce din A o perpendiculară pe BC care taie pe BD în H și pe BC în E.

a). Să se calculeze lungimea segmentului AH în funcție de a și b.

b). Să se determine unghiurile rombului care are proprietatea că latura este medie proporțională între diagonalele sale.

c). Să se calculeze tangenta trigonometrică a unghiurilor rombului pentru care aria laterală a corpului născut din rotirea rombului în jurul diagonalei BD este egală cu dublul ariei sferei de diametru AC.

Soluție. a). Avem $S(ABC) = ab = \frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{AE\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

$$AE = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Patrulaterul $OHEC$ este inscriptibil, deci $AH \cdot AE = OA \cdot AC$

$$AH \cdot \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = a \cdot 2a; \quad AH = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}.$$

b). $AB^2 = 4ab$; $a = AB \sin\alpha$, $b = AB \cos\alpha$.

$4\sin\alpha\cos\alpha = 1$; $\sin 2\alpha = \sin B = \frac{1}{2}$, $B = 30°$, $A = 150°$

c). $2\pi a \cdot AB = 8\pi a^2$; $a\sqrt{a^2 + b^2} = 4a^2$; $b^2 = 15\ a^2$;

$$\frac{b}{a} = \sqrt{15} = \operatorname{ctg}\alpha;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{15};\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{7},$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sqrt{15}}{7};\ \operatorname{tg} C = -\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

7.11. Se consideră un tetraedru regulat $ABCD$ a cărui muchie este a.

a). Să se calculeze distanța IJ unde I și J sînt mijloacele muchiilor AB și CD.

b). Printr-un punct M mobil pe IJ se duce un plan perpendicular pe IJ și acest plan taie muchiile AC, AD, BC, BD respectiv în E, F, G, H. Să se arate că figura $EFGH$ este un dreptunghi de perimetru $2a$ oricare ar fi poziția lui M pe IJ.

Soluție. Avem $IJ \perp AB$; $IJ \perp CD$; $AJ = BJ = = a \sin 60° = a\frac{\sqrt{3}}{2}$; AJB este triunghi isoscel, deci

$$IJ^2 = AJ^2 - \left(\frac{AI}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2};\ \text{deci}\ IJ = a\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$AB \parallel \text{pl}\ (EFGH)$; $CD \parallel \text{pl}\ (EFGH)$; planele ABC și ABD intersectează planul $EFGH$ după dreptele paralele $GE \parallel HF \parallel AB$ analog $GE \parallel EF \parallel CD$, dar AB și CD au direcții perpendiculare.

$EF = AE$; $EG = EC$; Triunghiurile EAF, BGH, CEG, DEH sînt echilaterale, deci

$$EF = EG = AE + EC = a.$$

7.12. Se dă mulțimea de piramide triunghiulare care au baza comună un triunghi ABC dreptunghic în A, iar vîrfurile M situate pe semidreapta AZ perpen-

diculară pe bază. Fie α, β respectiv unghiurile muchiilor MB, MC cu planul bazei, iar γ unghiul format de fața MBC cu planul bazei. Din această mulțime de piramide se consideră piramida de volum V_1 pentru care $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ și piramida de volum V_2 pentru care $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

Să se arate că

$$\frac{V_1^2}{V_2^2} = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}$$

unde a, b, c sînt laturile triunghiului ABC.

(G.M.B., 1963, p, 673)

Soluție. Dacă $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, avem $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$. Fie M_1 și M_2 vîrfurile acestor două piramide.

$$M_1A = x;\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{c};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{b};\quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{x}{h};\quad \text{iar } bc = ah;\quad x = \sqrt{h(a+b+c)}$$

$$V_1 = \frac{h}{6} \cdot \sqrt{abc(a+b+c)};$$

pentru piramida $ABCM_2$ avem

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1 \quad \text{și}$$

$$V_2 = \frac{ah}{6} \cdot \frac{bc}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

7.13. Prin G, centrul de greutate al unui tetraedru $A_1A_2A_3A_4$ se duce un plan oarecare, care taie muchiile A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 respectiv în A', A'', A'''. Să se arate că

$$\frac{A_1A_2}{A_1A'} + \frac{A_1A_3}{A_1A''} + \frac{A_1A_4}{A_1A'''} = 4.$$

(G.M.F.B., 2341).

Soluție. Se știe că dacă D este un punct pe latura BC a unui triunghi ABC, iar M, O, N sînt intersecțiile unei drepte oarecare cu AB, AD, AC, are loc relația:

$$BD\cdot\frac{CA}{NA}+DC\cdot\frac{BA}{NA}=$$
$$=BC\cdot\frac{DA}{OA}.$$

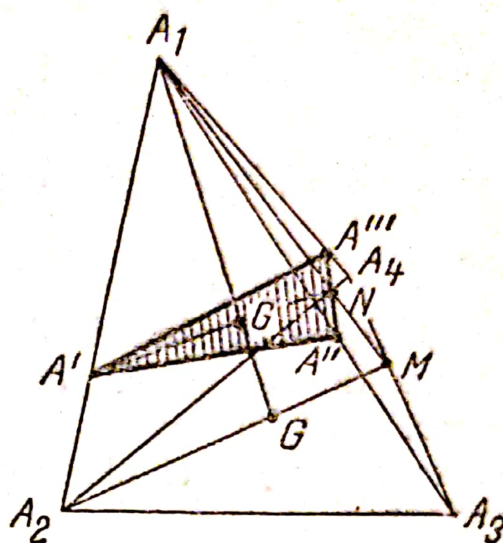


Fig. 7.13

Aplicînd această proprietate în triunghiurile $A_1A_3A_4$ și A_1A_2M respectiv, ținînd seamă că M este mijlocul lui A_3A_4 și G_1 este centrul de greutate al feței $A_2A_3A_4$, avem:

$$\frac{A_1A_3}{A_1A_4}+\frac{A_1A_4}{A_1A'''}=2\cdot\frac{A_1M}{A_1N} \tag{1}$$

și

$$\frac{A_1A_2}{A_1A'}+2\cdot\frac{A_1M}{A_1N}=3\cdot\frac{A_1G_1}{A_1G}. \tag{2}$$

Ținînd seama de (1) și că

$$\frac{A_1G_1}{A_1G}=\frac{1}{3}$$

relația (2) devine:

$$\frac{A_1A_2}{A_1A'}+\frac{A_1A^3}{A_1A''}+\frac{A_1A_4}{A_1A'''}=4.$$

7.14. Să se arate că unghiurile diedre ale unui dodecaedru regulat sînt date de formula

$$\cos\alpha=\frac{a_5(l_5-l_5')}{l_5(a_5^2+a_5-1)},$$

unde a_5 și l_5 sînt respectiv apotema și latura pentagonului regulat convex înscris în cercul de diametru egal cu unitatea și l_5' este latura pentagonului regulat stelat înscris în același cerc.

(G.M.B., 2856, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. Ținînd seama că în cazul nostru:

$$a_5 = \frac{\sqrt{5}+1}{8}; \; l_5 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \text{ și}$$

$$l'_5 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

și înlocuind în relația ce trebuie demonstrată, obținem

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \qquad (1).$$

Deci, ne rămîne de demonstrat relația (1). Ne vom aminti de elementele fundamentale ale unui triunghi sferic: laturile lui a, b, c și unghiurile A, B, C sînt respectiv unghiuri plane și diedre ale triedrului corespunzător.

Deci, cu ajutorul trigonometriei sferice putem calcula unghiul diedru al dodecaedrului regulat. Pentru dodecaedru, unghiurile plane de la vîrf sînt unghiurile pentagonului regulat, de aceea $a = b = c = \frac{3\pi}{5}$ și deci, avem:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{3\pi}{5} - \cos^2\frac{3\pi}{5}}{\sin^2\frac{3\pi}{5}}$$

(am folosit formula cosinusului laturii). Substituind valorile

$$\cos\frac{3\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{și} \quad \sin\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

obținem: $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ și deci relația (1) este demonstrată.

Observare. α este aproximativ $= 116°33'54''$.

7.15. Să se arate că dacă S este aria totală a unui tetraedru și d_1, d_2, d_3, d_4 diametrii cercurilor înscrise fețelor lui, avem relația:

$$d_1 d_2 d_3 d_4 \leqslant \frac{S^2}{27}.$$

(G.M.B., 1225, *Simon Petre*).

Soluție. Fie r_1, r_2, r_3, r_4 razele cercurilor înscrise fețelor tetraedrului p_1, p_2, p_3, p_4 semiperimetrele fețelor și S_1, S_2, S_3, S_4 ariile acestor fețe. Avem:

$$r_1p_1 + r_2p_2 + r_3p_3 + r_4p_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S.$$

Produsul $r_1p_1 \cdot r_2p_2 \cdot r_3p_3 \cdot r_4p_4$ este maxim cînd $r_1p_1 = r_2p_2 = r_3p_3 = r_4p_4$, adică $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ ceea ce există cînd tetraedrul este regulat. Deci produsul

$$r_1p_1r_2p_2r_3p_3r_4p_4 \leqslant S_1S_2S_3S_4 = \left(\frac{S}{4}\right)^4.$$

Această relație se mai poate scrie și

$$r_1r_2r_3r_4 \leqslant \frac{S^4}{4^4p_1p_2p_3p_4}.$$

În cazul tetraedrului regulat $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{3a}{2}$ unde a este muchia tetraedrului și

$$S = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3};\ S^2 = 3a^4.$$

Rezultă:

$$r_1r_2r_3r_4 \leqslant \frac{S}{16 \cdot 27} \quad \text{sau}$$

$$(2r_1)(2r_2)(2r_3)(2r_4) \leqslant \frac{S^2}{27}.$$

Folosind notațiile din enunț, avem:

$$d_1d_2d_3d_4 \leqslant \frac{S^2}{27}.$$

7.16. Se dă mulțimea de piramide triunghiulare care au bază comună un triunghi dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$) iar vîrfurile M situate pe semidreapta Az perpendiculară pe bază. Notăm cu α, β, γ respectiv

unghiurile de înclinare ale muchiilor MB, MC și al feței MBC pe planul bazei.

Din această mulțime se consideră două piramide: una la care

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

și alta la care

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Să se arate că între volumele lor V_1 și V_2 avem relația:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \frac{(a + b + c)(ab + bc + ca)}{abc}.$$

(G.M.F.B., 5592, *Gh. Bazacov*).

Fig. 7.16

Soluție. Pentru prima piramidă trebuie să avem:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \text{ sau}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

Dar

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) =$$
$$= \frac{\sum \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}{1 - \sum \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \quad (1)$$

de la care se obține identitatea condiționată:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma. \quad (2)$$

Fie M_1 vîrful acestei piramide și notăm cu $M_1A = x$, laturile triunghiului ABC cu a, b, c, și înălțimea lui AD cu h. Din figură se obține ușor:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{c}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{x}{b}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{x}{h}.$$

Relația (2) devine:

$$\frac{x}{b} + \frac{x}{c} + \frac{x}{h} = \frac{x^3}{bch} \quad \text{sau} \quad ch + bh + bc = x^2$$

dar

$$bc = ah \text{ și deci, } x = \sqrt{h(a+b+c)}$$

Atunci,

$$V_1 = \frac{ah}{2} \cdot \frac{x}{3} \text{ sau } V_1 = \frac{h}{6}\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Pentru piramida a doua ni se dă:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Identitatea (1) ne dă atunci:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1$$

și înlocuind tangentele cu valorile lor obținute mai sus, avem ecuația unde am notat $AM_2 = y$;

$$\frac{y^2}{bc} + \frac{y^2}{bh} + \frac{y^2}{hc} = 1$$

care rezolvată ne dă rădăcina

$$y = \sqrt{\frac{bch}{b+c+h}}.$$

Atunci volumul piramidei a doua va fi:

$$V_2 = \frac{ah}{6} \cdot \frac{bc}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Ridicăm la pătrat cele două expresii obținute pentru V_1 și V_2 iar apoi facem raportul lor. Se obține:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}.$$

7.17. În tetraedrul $VASB$ înălțimea dusă din vîrful V face ca muchiile AV, BV, CV unghiurile α, β, γ iar piciorul ei O coincide în centrul cercului înscris feței ABC. Să se arate că există relația:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{AB \cdot AC} + \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{BA \cdot BC} + \frac{\operatorname{tg}^2\gamma}{CA \cdot CB} = \frac{1}{OV^2}.$$

Soluție. În triunghiul dreptunghic AOV

$$OA^2 = OV^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \qquad (1)$$

analog

$$OB^2 = OV^2 \operatorname{tg}^2 \beta \qquad (2)$$

$$OC^2 = OV^2 \operatorname{tg}^2 \gamma. \qquad (3)$$

Din triunghiul ABI_a scoatem:

$$\frac{AI_a}{\sin ABI_a} = \frac{AB}{\sin AI_aC} = \frac{BI_a}{\sin \frac{1}{2} A}.$$

Dar $\sphericalangle ABI_a = B + \frac{1}{2}(180° - B) = \left(90° + \frac{1}{2} B\right).$

$\sphericalangle AI_aB = \frac{1}{2} C,$

deci

$$AI_a = \frac{AB \cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C.}.$$

Înlocuind totul în funcție de laturi, se obține:

$$AI_a = \sqrt{\frac{bcp}{p-a}}; \text{ analog } BI_a = \sqrt{\frac{ac(p-c)}{p-a}}.$$

Din triunghiul BOI_a scoatem: $BI_a = OI_a \cos \frac{1}{2} C$, de unde

$$OI_a = a\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}.$$

Avem: $OA = AI_a - OI_a.$

$$OA = \sqrt{\frac{bcp}{p-a}} - a\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} = (p-a)\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}};$$

$$OA = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}; \text{ deci: } OA^2 = \frac{ab(p-c)}{p}.$$

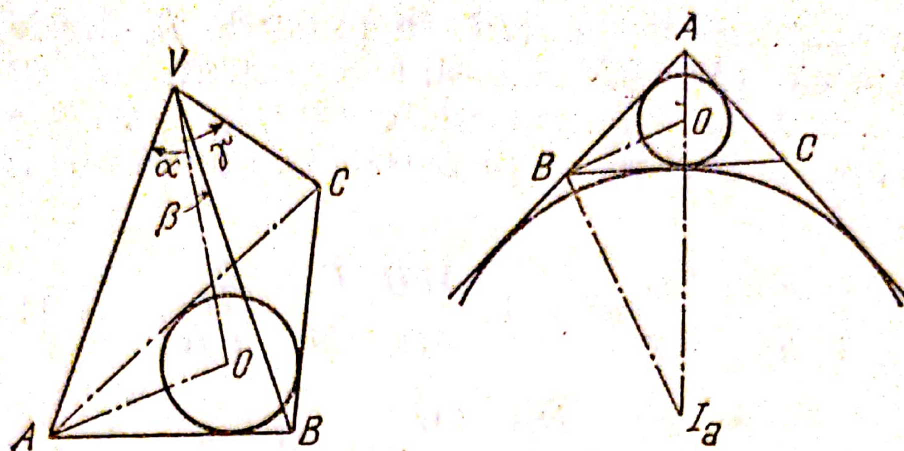


Fig. 7.17

Relațiile (1), (2), (3) devin:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{bc(p-a)}{p \cdot OV^2}; \quad \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{ac(p-b)}{p \cdot OV^2};$$

$$\operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{ab(p-c)}{p \cdot OV^2}.$$

Împărțind relațiile obținute prin $AB \cdot AC = b \cdot c$; analog $BA \cdot BC = a \cdot c$ și $CA \cdot CB = a \cdot b$ și adunînd membru cu membru, obținem:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{AB \cdot AC} + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{BA \cdot BC} + \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma}{CA \cdot CB} =$$

$$= \frac{1}{OV^2}\left(\frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p}\right).$$

dar

$$\frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p} = 1 - \frac{a}{p} + 1 - \frac{b}{p} + 1 - \frac{c}{p} =$$

$$= 3 - \frac{a+b+c}{p} = 3 - \frac{2p}{p} = 3 - 2 = 1$$

și astfel relația este demonstrată.

7.18. Un plan oarecare taie muchiile OA, OB, OC ale unui tetraedru $OABC$ respectiv în punctele D, E, F.
Fie G, H, K punctele de intersecție ale diagonalelor patrulaterelor $ABED$, $BCFE$, $CADF$. Dreptele OG, OH,

OK taie laturile bazei ABC în punctele L, M, N. Să se arate că AM, BN, CL sînt concurente.

Soluția I. În triunghiurile OAB, OBC, OCA avem trei grupe de ceviene cu picioarele comune în G, H, K. Avem

$$\frac{LA}{LB}\cdot\frac{EB}{EO}\cdot\frac{DO}{DA}=-1;\ \frac{MB}{MC}\cdot\frac{FC}{FO}\cdot\frac{EO}{EB}=-1;$$

$$\frac{NC}{NA}\cdot\frac{DA}{DO}\cdot\frac{FO}{FC}=-1.$$

Înmulțind, obținem:

$$\frac{LA}{LB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}=-1.$$

Soluția II. Planele ABF și ACE se taie pe dreapta AH, planele BAF și BCD se taie pe dreapta BK. Cum dreptele AH și BK sînt în același plan ABF ele se taie în punctul P. Planele CAE și CBD se taie pe dreapta CH, rezultă deci că și CG tre ce prin punctul P, prin urmare dreptele AH, BK și CG concură în P. Planele OAH, OBK, OCG se taie pe dreapta OP. Dreptele LC, MA, NB sînt intersecțiile planului ABC cu planele OCG, OAH și OBK. Dreptele AM, BN și CL concură în Q unde dreapta OP înțeapă planul ABC.

7.19. Fie un pătrat $ABCD$ de latură $2a$. În planul ce trece prin AB și perpendicular pe planul $ABCD$ se construiește triunghiul echilateral AEB. Un punct M este mobil pe latura AB și se notează $MB = x$. Fie N proiecția lui E pe dreapta MC, F mijlocul lui AB, O mijlocul lui CE și H mijlocul lui DC.

a). Să se afle locul geometric al punctului N cînd M descrie segmentul FB.

b). Să se exprime lungimea MO în funcție de a și x cînd M descrie segmentul FB.

c). Să se arate că $OC = ON = OF = OB = OH$.

d). Care este minimumul și maximumul segmentului MO?

(G.M.B., 10649, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). $EF \perp (ABCD)$ și din F ducem perpendiculara FN pe CM din planul $ABCD$, atunci după teorema celor trei perpendiculare $EN \perp MC$. Și deci N este proiecția lui E pe MC. Triunghiul dreptunghic

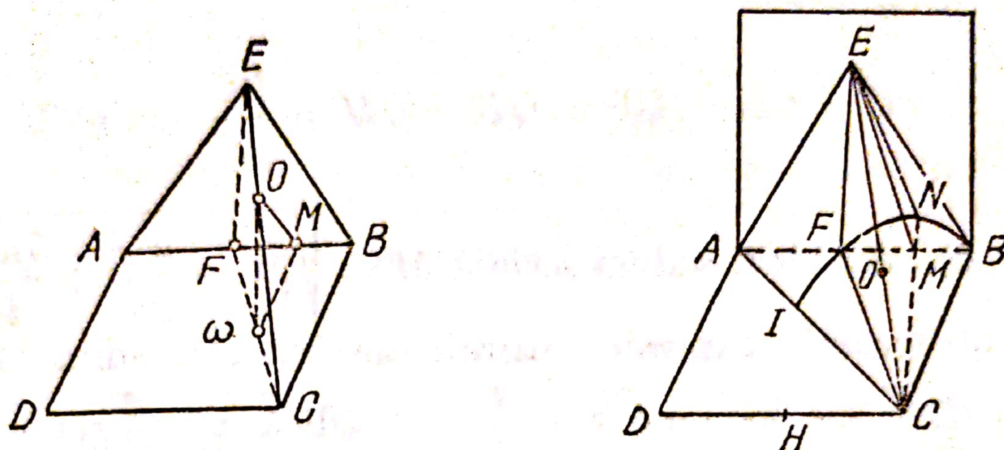


Fig. 7.19

CNF are ipotenuza fixă FC. Deci N se află pe cercul de diametru FC și așezat în planul $ABCD$. Acest cerc trece prin $B(\sphericalangle FBC = 90°)$ și prin I proiecția lui F pe AC. Punctul M variind între B și A, N descrie arcul $BNFI$ din cercul amintit. Cînd M coincide cu B, atunci N se află în B, iar cînd M coincide cu A, N coincide cu I.

b). MO este mediană în triunghiul ECM. Deci

$$MO^2 = \frac{2(EM^2 + M^2C) - EC^2}{4}.$$

$$EM^2 = FM^2 + EF^2 = (a - x)^2 + 3a^2 = x^2 - 2ax + 4a^2.$$

$MC^2 = 4a^2 + x^2$, iar EC fiind ipotenuză în triunghiul dreptunghic EBC ($\sphericalangle EBC = 90°$), avem: $EC^2 = EB^2 + BC^2 = 4a^2 + 4a^2 = 8a^2$. Deci

$$MO^2 = x^2 - ax + 2a^2; \ MO = \sqrt{x^2 - ax + 2a^2}.$$

c). $OC = \dfrac{EC}{2}$ prin ipoteză; $ON = \dfrac{EC}{2}$ deoarece $\triangle ENC$ este dreptunghic în N și O mijlocul ipotenuzei EC. Din triunghiul dreptunghic EBC, $OB = \dfrac{EC}{2}$.

Triunghiul EHC este dreptunghic în H și deci $OH = \frac{EC}{2}$ și tot astfel din triunghiul dreptunghic EFC, $OF = \frac{EC}{2}$. Deci

$$OC = ON = OF = OB = OH = \frac{EC}{2} = a\sqrt{2}.$$

d). Pe OM îl putem scrie: $OM = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{7a^2}{4}}$. Din această expresie, rezultă imediat că minimumul lui OM, are loc cînd $x - \frac{a}{2} = 0$, adică $x = \frac{a}{2}$, și punctul M este la mijlocul lui FB.

Deci $OM_{min} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Maximumul are loc cînd $x - \frac{a}{2}$ este maxim, adică cînd x ia cea mai mare valoare, din intervalul de variație $x = a$, adică M în F, sau în B cînd $x = 0$ și

$$OM_{max} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{7a^2}{4}} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Observație. Se poate rezolva acest punct și astfel: triunghiul EFC este dreptunghic în F și să ducem prin O, mijlocul ipotenuzei EC, paralela $O\omega$ la EF. Triunghiul $O\omega M$ este dreptunghic cu unghiul drept în ω. Cateta $O\omega = \frac{EF}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ este constantă și ω punct fix, atunci minimumul sau maximumul ipotenuzei OM are loc odată cu minimumul sau maximumul catetei ωM. Dar ωM este minim cînd $\omega M \perp FB$, adică cînd $\omega M \parallel BC$ și deci ωM este linie mijlocie în triunghiul FBC, adică M la mijlocul lui BF, $x = \frac{a}{2}$, iar maximumul cînd M este fie în B, fie în F, adică $x = 0$

sau $x = a$. Pentru minim $OM_{min} = \sqrt{\omega O^2 + \omega M^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ iar pentru maxim $OM_{max} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4}} = a\sqrt{2}$.

7.20. Se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$.

a). Să se determine locul geometric al mijloacelor segmentelor xy, unde x este un punct arbitrar al segmentului AC și y un punct arbitrar al segmentului $B'D'$.

b). Să se determine locul geometric al punctelor z de pe segmentul xy care satisfac relația: $zy = 2xz$.

Soluție. a). Fie M mijlocul segmentului xy. Cînd x este fix pe AC și y este mobil pe $B'D'$, M descrie un segment paralel cu $B'D'$ și egal cu jumătate din $B'D'$ (linia mijlocie a triunghiului $xB'D'$) care se găsește la egală distanță între planele $(ABCD)$ și $(A'B'C'D')$.

Deci, pentru fiecare poziție a lui x pe AC, locul lui M este un segment paralel cu $B'D'$ și egal cu $\frac{1}{2} \cdot B'D'$. Cînd x alunecă pe AC, segmentul loc geometric alunecă paralel cu el însuși, rămînînd la egală distanță de planele $(ABCD)$ și $(A'B'C'D')$, deci, determină o porțiune dintr-un plan situat la egală distanță de planele bazelor $ABCD$ și $A'B'C'D'$.

Pentru a determina forma acestei porțiuni de plan considerăm pozițiile extreme ale lui x: cînd x se află în A, locul este segmentul FE, iar cînd x se află în C, locul este segmentul GH (E, F, G, H sînt respectiv centrele pătratelor $AA'DD'$; $AA'BB'$; $BB'CC'$; $CC'DD'$).

Se verifică ușor că punctele E, F, G, H formează un pătrat al cărui raport de asemănare față de pătratele de bază este de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pentru a demonstra că locul geometric este toată suprafața pătratului $EFGH$ trebuie să mai demonstrăm că această suprafață este densă sau compactă, adică nu există puncte ale sale care să nu satisfacă condițiile

problemei, adică oricare ar fi punctul N pe suprafața pătratului $EFGH$ se pot găsi două puncte P, Q respectiv pe diagonala AC și $B'D'$ așa ca N să fie mijlocul segmentului PQ.

Cînd punctul Q descrie diagonala $B'D'$ simetricul lui Q față de N descrie un segment paralel cu $B'D'$ și situat în planul $(ABCD)$, N găsindu-se la egală distanță față de bazele cubului. Rezultă că P se găsește la intersecția acestui segment loc geometric cu diagonala AC.

Deci, pozițiile punctelor P, Q se determină astfel:

Se ia un punct arbitrar Q', pe $B'D'$, se construiește simetricul lui Q' față de N și prin acest punct se duce paralela la $B'D'$ care taie pe AC în P. Dreapta NP taie pe $B'D'$ în Q. Deci, am găsit două puncte P și Q (P pe AC și Q pe $B'D'$) așa ca N să fie mijlocul segmentului PQ și cu aceasta și problema continuității locului este rezolvată.

b). În caz că $zy = 2xz$ locul geometric al lui z este suprafața unui dreptunghi ale cărui vîrfuri E', F', G', H' interioare segmentelor AD', AB', CB', CD' le împart în raportul $\frac{1}{3}$, adică

$$\frac{AE'}{AD'} = \frac{AF'}{AB'} = \frac{CG'}{CB'} = \frac{CH'}{CD'} = \frac{1}{3}.$$

Aceste puncte se obțin cînd x se află în A și C și y se află în B' și D'. Se demonstrează că suprafața acestui pătrat este compactă găsind două puncte P și Q coliniare cu z în mod analog ca la punctul a), așa că $\frac{Pz}{z} = \frac{1}{2}$, ($P$ pe AC și Q pe $B'D'$) pentru un z ales arbitrar în planul $E'F'G'H'$.

Observație. Problema se poate generaliza înlocuind cubul cu o prismă oblică patrulateră $ABCDA'B'C'D'$, x fiind un punct arbitrar al segmentului AC și y un punct arbitrar al segmentului $B'D'$.

Să se afle în acest caz locul geometric al punctului z de pe segmentul xy așa ca $zy = k \cdot zx$ (k este un coeficient real dat).

Printr-un raționament analog se găsește că locul geometric al punctului z este porțiunea de plan cuprinsă în interiorul patrulaterului $EFGH$ unde E, F, G, H se găsește respectiv pe AD', AB', CB', CD' și satisfac relațiile:

$$\frac{D'E}{EA} = \frac{B'F}{FA} = \frac{B'G}{GC} = \frac{D'H}{HC} = k.$$

Se demonstrează că această porțiune de plan este densă (toate punctele sale satisfac condițiile problemei) găsind două puncte, P pe AC și Q pe $B'D'$ coliniare cu un punct arbitrar z din planul $EFGH$, așa ca $\frac{Qz}{zP} = k$.

Pentru a găsi cele două puncte se intersectează diagonala AC cu paralela dusă la BD prin punctul care este omoteticul unui punct arbitrar al segmentului $B'D'$, față de centrul z de omotetie și raport de omotetie $\frac{1}{k}$.

Patrulaterul $EFGH$ este paralelogram căci $FG = EH \frac{k}{k+1} AC$ și $EF = GH = \frac{k}{k+1} BD$, iar $\sphericalangle GHE = \sphericalangle \alpha$ (unde α este unghiul diagonalelor AC și BD) ca unghiuri cu laturile paralele.

$$A_{EFGH} = GH \cdot HE \cdot \sin\ \alpha$$

$$A_{ABCD} = A_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2} BD \cdot AC\ \sin\ \alpha.$$

Dar, $GH \cdot HE = \frac{k^2}{(k+1)^2} \cdot BD \cdot AC$, deci, $A_{EFGH} = \frac{2k^2}{(k+1)^2} A_{ABCD}$.

Deci, aria paralelogramului $EFGH$ este $\frac{2k^2}{(k+1)^2}$ din aria bazei prismei oblice patrulatere.

7.21. Fie un paralelogram de laturi consecutive a, b și înălțimile corespunzătoare h și k. Rotind paralelogramul în jurul laturii a se obține corpul de volum V, rotind paralelogramul în jurul lui b se obține corpul de volum V_1. Se cere:

a). Să se calculeze volumul V cu ajutorul lui a și h precum și V_1 cu ajutorul lui b și k și să se interpreteze rezultatul.

b). Să se arate că există relația $\frac{V}{V_1} = \frac{b}{a}$.

c). Dacă notăm cu V volumul unui cilindru, cu S aria lui totală iar cu A aria laterală, să se arate că între aceste elemente există relația

$$8\pi V^2 = A^2 (S - A).$$

Soluție. a). *Teorema a II-a a lui Guldin* ne spune: „Volumul născut de o suprafață plană, care se rotește în jurul unei axe situate în planul unei suprafețe și care nu străbate suprafața este egal cu produsul dintre aria suprafeței și lungimea cercului descris de centrul de greutate al suprafeței în această rotație".

Avem $V = a \cdot h \cdot 2\pi \cdot \frac{h}{2}$.

Produsul $a \cdot h$ este suprafața paralelogramului iar $\frac{h}{2}$ este raza cercului descris de centrul de greutate G. Prin urmare, $V = \pi\, ah^2$.

În același mod găsim că $V_1 = \pi\, bk^2$. În ambele cazuri se vede că V și V_1 sînt proporționale cu baza paralelogramului și cu pătratul înălțimii.

b). Din triunghiul dreptunghic ADD' se vede că $DD' = AD \cos\alpha$ sau $k = a \cos\alpha$; iar din triunghiul dreptunghic DD_1C avem $DD_1 = DC \cos\alpha$ sau $h = b \cos\alpha$. Prin urmare, $V = \pi\, ah^2 = \pi\, a \cdot b^2 \cos^2\alpha$; iar $V_1 = \pi\, bk^2 = \pi\, ba^2 \cos^2\alpha$.

$$\frac{V_1}{V} = \frac{ba^2\cos^2\alpha}{ab^2\cos^2\alpha} = \frac{a}{b}; \quad \text{sau} \quad \frac{V}{V_1} = \frac{b}{a}.$$

c). Fie R și G raza și generatoarea cilindrului. Avem $V = \pi R^2 G$; $S = 2\pi RG + 2\pi R^2$; $A = 2\pi RG$.

Relația $8\pi V^2 = A^2 (S - A)$ devine

$$8\pi (\pi R^2 G)^2 = (2\pi RG)^2 (2\pi RG + 2\pi R^2 - 2\pi RG),$$

sau $8\pi^3 R^4 G^2 = 8\pi^3 R^4 G^2$.

Relația $8\pi V^2 = A^2 (S - A)$ este deci adevărată.

7.22. Se consideră unghiul diedru de mărime φ format de semiplanele P_1 și P_2, mărginite de dreapta Δ. Fie S și T două puncte oarecare ale dreptei Δ. Se secționează acest diedru cu planul P_3 care trece prin S și taie pe P_1 după semidreapta SA_1 și pe P_2 după semidreapta SA_2. Notăm $\sphericalangle(ST, SA_1) = \alpha_1$, $\sphericalangle(ST, SA_2) = \alpha_2$ și $\sphericalangle(SA_1, SA_2) = \theta$. Să se demonstreze relația:

$$\cos\theta = \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

unde $\alpha_{1,2}$ și φ aparțin intervalului $(0, \pi)$.

Soluție. Relația de demonstrat se mai scrie:

$$\cos\theta = \sin^2\frac{\varphi}{2}(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2) +$$

$$+ \left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2) =$$

$$= \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 =$$

$$= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\varphi \sin\alpha_1 \sin\alpha_2.$$

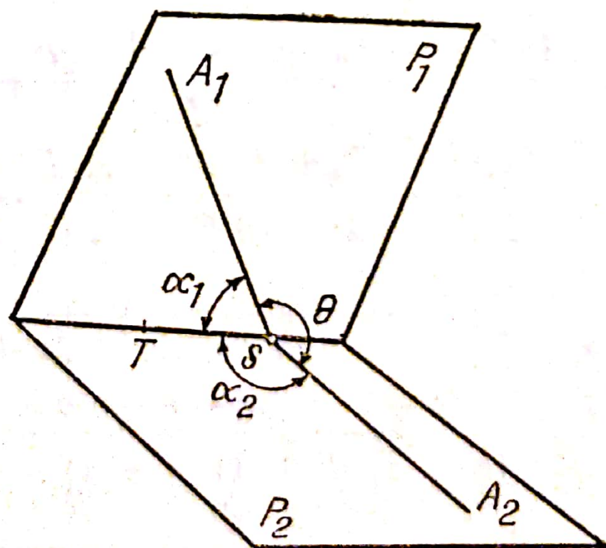


Fig. 7.22

Dar, în triedrul $S \cdot A_1TA_2$ putem exprima unghiul diedru al planului STA_1 (adică P_1) și TSA_2 (adică P_2) în funcție de unghiurile formate de muchiile triedrului, adică:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\theta - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} \quad \text{sau}$$

$$\cos\theta = \cos\varphi \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2.$$

7.23. Fie M un punct în interiorul unui tetraedru $VABC$. Dreptele MA, MB, MC înțeapă fețele VBC, VCA, VAB respectiv în A_1, B_1, C_1; dreptele VA_1, VB_1, VC_1 întîlnesc muchiile BC, CA, AB respectiv în A_2, B_2, C_2.

a). Să se arate că volumul tetraedrului $VA_2B_2C_2$ este cel mult 1/4 din volumul tetraedrului $VABC$.

b). Să se calculeze volumul $V_1A_1B_1C_1$ în funcție de volumul tetraedrului $VABC$, unde V_1 este intersecția lui VG cu fața ABC, iar G este centrul de greutate al tetraedrului $BVABC$.

(G.M.B., 1970, *C. Ionescu-Țiu*).

Soluție. a). Să arătăm mai întîi că 4 aria $A_2B_2C_2 \leqslant$ $\leqslant$ aria ABC. În acest scop notăm $\frac{A_2C}{A_2B} = a$, $\frac{B_2A}{B_2C} = b$, $\frac{C_2B}{C_2A} = c$; aria $A_2B_2C_2 = (A_2B_2C_2)$.

Avem:

$$\frac{(A_2B_2C_2)}{(ABC)} = \frac{(ABC) - (A_2B_2C_2) - (A_2C_2B) - (B_2C_2A)}{(ABC)} =$$

$$= 1 - \frac{B_2C}{AC} \cdot \frac{A_2C}{BC} - \frac{B_2A}{AC} \cdot \frac{C_2A}{AB} - \frac{A_2B}{BC} \cdot \frac{C_2B}{AB} = 1 -$$

$$- \frac{a}{(b+1)(a+1)} - \frac{b}{(b+1)(c+1)} - \frac{c}{(a+1)(c+1)} =$$

$$= \frac{(a+1)(b+1)(c+1) - ac - a - ab - b - bc - c}{(a+1)(b+1)(c+1)} =$$

$$= \frac{1 + abc}{abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1},$$

dar dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sînt concurente şi deci $abc = 1$. Deci

$$\frac{(A_2B_2C_2)}{(ABC)} = \frac{12}{2+\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

deoarece $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$, $b+\frac{1}{b} \geqslant 2$, $c+\frac{1}{c} \geqslant 2$, egalitatea fiind cînd $a = b = c = 1$, adică A_1, B_1, C_1 sînt situate pe medianele triunghiurilor VBC, VCA, VAB şi în acest caz M este centrul de greutate al bazei ABC a tetraedrului dat.

Tetraedrele $VA_2B_2C_2$ şi $VABC$ avînd aceeaşi înălţime, raportul volumelor este egal cu raportul ariilor bazelor $= \frac{1}{4}$.

b). Muchiile A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, A_1V_1, B_1V_1, C_1V_1 sînt paralele respectiv cu AB, BC, CA, VA, VB, VC şi egale cu 1/3 din muchia paralelă, de unde

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

2.24. Trei cercuri sînt situate în plane paralele. Să se arate că două cîte două sînt secţiuni în trei conuri ale căror vîrfuri sînt pe o dreaptă.

(G.M.B., 10626, 1970, *M. Focşeneanu*).

Soluţie. Fie (O_1), (O_2), (O_3) trei cercuri situate în plane paralele şi A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, trei diametre paralele cu o direcţie arbitrară, unde $A_1, B_1 \in (O_1)$, $A_2, B_2 \in (O_2)$, $A_3, B_3 \in (O_3)$.

Notăm $V_1 = A_2A_3 \cap B_2B_3$, $V_2 = A_1A_3 \cap B_1B_3$, $V_3 = A_1A_2 \cap B_1B_2$. Deci, trebuie să arătăm că punctele V_1, V_2, V_3 (vîrfurile celor trei conuri) sînt situate pe o dreaptă.

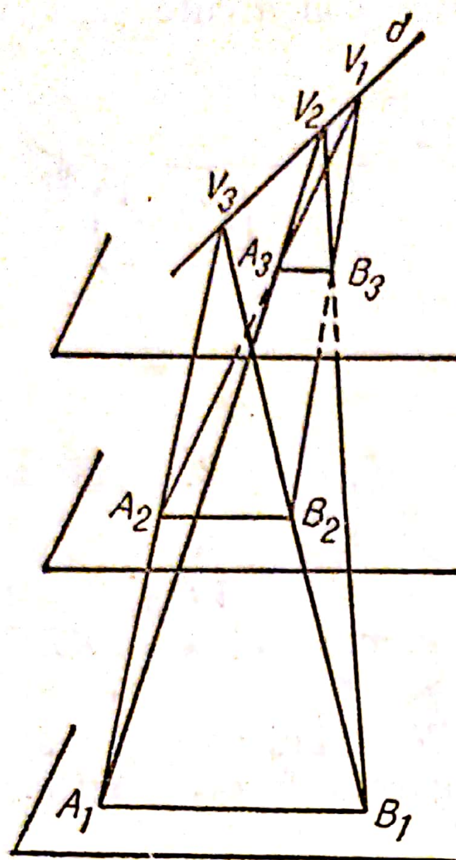


Fig. 7.24

Fie d dreapta de intersecție a planelor $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$.

Deoarece $V_1 \in A_2A_3$ și $V_1 \in B_2B_3$ iar $A_2A_3 \in \text{pl}\,(A_1A_2A_3)$ și $B_2B_3 \in \text{pl.}\,(B_1B_2B_3)$ rezultă că $V_1 \in \text{pl. } (A_1A_2A_3) \cap (B_1B_2B_3)$, adică $V_1 \in d$.

Deoarece $V_2 \in A_1A_3$ și $V_1 \in B_1B_3$, iar $A_1A_3 \in \text{pl.}(A_1A_2A_3)$ și $B_1B_2 \in \text{pl.}(B_1B_2B_3)$ rezultă că $V_2 \in \text{pl.}(A_1A_2A_3) \cap \text{pl. } (B_1B_2B_3)$ adică $V_2 \in d$.

Deoarece $V_3 \in A_1A_2$ și $V_3 \in B_1B_2$ iar $A_1A_2 \in \text{pl. } (A_1A_2A_3)$ și $B_1B_2 \in \text{pl.}(B_1B_2B_3)$ rezultă că $V_3 \in \text{pl.}(A_1A_2A_3) \cap \text{pl.}(B_1B_2B_3)$, adică $V_3 \in d$. Am demonstrat deci că V_1, V_2, $V_3 \in d$.

7.25. Fie tetraedrul $ABCD$. În unghiurile diedre de muchii AB, BC, CD, DA considerăm cîte două plane izogonale oarecare, respectiv P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}, P_{41}, P_{42} și dreptele de intersecție $(D_1) = (P_{12}, P_{21})$; $(D_2) = (P_{22}, P_{31})$; $(D_3) = (P_{32}, P_{41})$; $(D_4) = (P_{42}, P_{11})$. Planele determinate de perechile de drepte BD, (D_1); BD, (D_3); CA, (D_2); CA, (D_4) taie respectiv pe AC în K și K' și pe BD în L și L'. Planul paralel cu AB ce trece prin K' și L' taie pe BC și DA respectiv în M și N. Să se arate că punctele K, L, M, N sînt coplanare.

(G.M.B., 5547).

Soluție. Fie Q_{11}, Q_{12}; Q_{21}, Q_{22}; Q_{31}, Q_{32}; Q_{41}, Q_{42} punctele unde CD, DA, AB, BC înțeapă respectiv planele P_{11}, P_{12}; P_{21}, P_{22}; P_{31}, P_{32}; P_{41}, P_{42}. *Teorema lui Ceva* ne dă:

$$\frac{Q_{12}C}{Q_{12}D} \cdot \frac{Q_{21}P}{Q_{21}A} \cdot \frac{KA}{KC} = -1, \text{ în triunghiul } CDA$$

$$\frac{Q_{22}D}{Q_{22}A}\cdot\frac{Q_{31}A}{Q_{31}B}\cdot\frac{LB}{LD}=-1, \text{ în triunghiul } DAB$$

$$\frac{Q_{32}A}{Q_{32}B}\cdot\frac{Q_{41}B}{Q_{41}C}\cdot\frac{K'C}{K'A}=-1, \text{ în triunghiul } ABC$$

și

$$\frac{Q_{42}B}{Q_{42}C}\cdot\frac{Q_{11}C}{Q_{11}D}\cdot\frac{L'D}{L'B}=-1, \text{ în triunghiul } BCD.$$

Înmulțind,

$$\frac{Q_{12}C}{Q_{12}D}\cdot\frac{Q_{21}D}{Q_{21}A}\cdot\frac{KA}{K}\cdot\frac{Q_{22}D}{Q_{22}A}\cdot\frac{Q_{31}A}{Q_{31}B}\cdot\frac{LB}{LD}\cdot\frac{Q_{32}A}{Q_{32}B}\cdot\frac{Q_{41}B}{Q_{41}C}\cdot\frac{K'C}{K'A}\cdot$$

$$\cdot\frac{Q_{42}B}{Q_{42}C}\cdot\frac{Q_{11}C}{Q_{11}D}\cdot\frac{L'D}{L'B}=1.$$

Dar, se știe că

$$\frac{Q_{11}C}{Q_{11}D}\cdot\frac{Q_{12}C}{Q_{12}D}=\frac{\text{Aria}^2_{ABC}}{\text{Aria}^2_{ABD}};\quad \frac{Q_{21}D}{Q_{21}A}\cdot\frac{Q_{22}D}{Q_{22}A}=\frac{\text{Aria}^2_{BCD}}{\text{Aria}^2_{BCA}}$$

$$\frac{Q_{31}A}{Q_{31}B}\cdot\frac{Q_{32}A}{Q_{32}B}=\frac{\text{Aria}^2_{CDA}}{\text{Aria}^2_{CDB}};\quad \frac{Q_{41}B}{Q_{41}C}\cdot\frac{Q_{42}B}{Q_{42}C}=\frac{\text{Aria}^2_{DAB}}{\text{Aria}^2_{DAC}}.$$

Înlocuind și simplificînd, avem:

$$\frac{KA}{KC}\cdot\frac{LB}{LD}\cdot\frac{K'C}{K'A}\cdot\frac{L'D}{L'B}=1.$$

Evident, $K'M$, AB și $L'N$ fiind paralele, avem:

$$\frac{K'C}{K'A}=\frac{MC}{MB} \quad \text{și} \quad \frac{L'D}{L'B}=\frac{ND}{NA}$$

Înlocuind

$$\frac{KA}{KC}\cdot\frac{MC}{MB}\cdot\frac{LB}{LD}\cdot\frac{ND}{NA}=1$$

deci, conform *teoremei lui Menelaus* pentru patrulaterul strîmb $ACBD$, punctele K, L, M, N sînt coplanare.

7.26. Considerăm un plan P și un punct la o distanță a de acest plan. Notăm cu A piciorul perpendicularei din O pe planul P. Ducem din O două oblice OB și OC, care formează cu planul P un unghi de 60° respectiv 30°, astfel ca triunghiul ABC din P să fie dreptunghic ($\sphericalangle B = 90°$). Notăm cu E și H mijloacele segmentelor OC, AC și cu D piciorul bisectoarei interioare unghiului A în triunghiul ABC.

a). Să se arate că triunghiul ODC este isoscel, iar triunghiul AED este dreptunghic ($\sphericalangle D = 90°$). Să se afle:

b). Aria triunghiului AED.

c). Mărimea unghiului diedru format de planele AED și P.

d). Locul geometric al punctului E dacă a devine variabil, iar A rămîne fix. Dreptele AB și AC rămîn fixe.

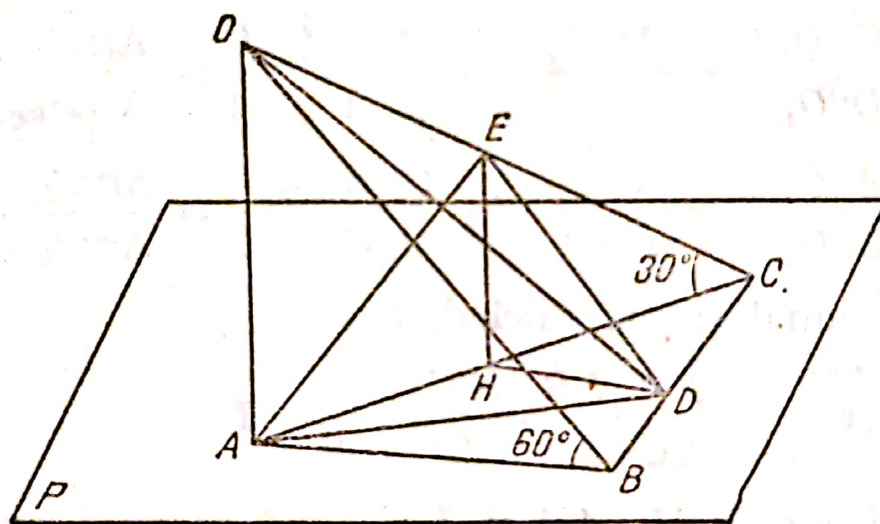


Fig. 7.26

Soluție. a). Triunghiul AOC este dreptunghic în A și are unghiul $ACO = 30°$, deci $OC = 2OA$; $OC = 2a$ iar $AC = \sqrt{OC^2 - OA^2} = \sqrt{h^2 - a^2}$; $AC = a\sqrt{3}$. Triunghiul AOB este dreptunghic în A iar unghiul $ABO = 60°$, deci $OB = 2AB$. Avem $AO^2 + AB^2 = OB^2$ sau $a^2 = -AB^2 + 4AB^2$, de unde rezultă $AB = \frac{a}{\sqrt{3}}$ iar $OB = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Triunghiul ABC este dreptunghic în B deci:

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}.$$

$$BC = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{3}}; \quad BC = 2a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

În triunghiul ABC, AD este bisectoare. Avem deci:

$$AD = \frac{2}{AB+AC}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{AB\cdot AC\cdot\frac{(AB+BC+AC)}{2}\cdot\left(\frac{AB+BC+AC}{2}-BC\right)};$$

$$AD^2 = \frac{4}{(AB+AC)^2}\cdot AB\cdot AC\cdot\frac{AB+BC+AC}{2}\cdot$$

$$\cdot\frac{AB-BC+AC}{2}.$$

$$AD^2 = \frac{AB\cdot AC}{(AB+BC)^2}[(AB+AC)^2 - BC^2].$$

$$AB = \frac{a}{\sqrt{3}}; \; AC = a\sqrt{3}; \; BC = 2a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Făcînd calculele găsim $AD^2 = \frac{a^2}{2}$; $AD = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Din triunghiul dreptunghic AOD avem:

$$OD = \sqrt{AO^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}}; \; OD = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Teorema bisectoarei în triunghiul ABC ne dă: $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}$ iar $DC+DB=BC$. Rezolvăm sistemul

$$\frac{DC}{DB}=\frac{a\sqrt{3}}{\frac{a}{\sqrt{3}}}$$

și $DC+DB=2a\sqrt{\frac{2}{3}}$ și găsim că $DC=a\sqrt{\frac{3}{2}}$ iar $DB=$ $=3a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Prin urmare, $DC=OD=a\frac{3}{2}$; deci triunghiul ODC este isoscel.

Avem $AE=\sqrt{AH^2+EH^2}$; $AH=\frac{AC}{2}$; $EH=\frac{AD}{2}$ deci $AE=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=a$; $AE=a$ iar mai sus am văzut că avem $AD=\frac{a}{\sqrt{2}}$; iar ED este înălțime și mediană în triunghiul isoscel ODC (căci $OE=EC$) deci $ED=\sqrt{DC^2-EC^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{2}-a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Observăm că $AE^2=ED^2+AD^2$; $\Rightarrow$triunghiul AED este dreptunghic în D.

b). Aria triunghiului $AED=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot$ $\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a^2}{4}$.

c). Să determinăm aria triunghiului AHD notată cu S_{AHD}.

Avem $S_{AHD}=S_{ABC}-S_{ABD}-S_{HCD}=\frac{1}{2}AB\cdot BC-$ $-\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BD-S_{HCD}$.

Din triunghiul HED ($\sphericalangle H = 90°$) avem $HD = \sqrt{ED^2 - HE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$; $HD = \frac{a}{2}$; $CD = a\sqrt{\frac{3}{2}}$; $HC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Cunoscînd cele trei laturi găsim că $S_{HCD} = \frac{a^2\sqrt{15}}{16}$. Deci:

$$S_{AHD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot 2a\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} - \frac{a^2\sqrt{15}}{16} =$$

$$= a^2 \cdot \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{15}}{16}.$$

$S_{AED} = \frac{a^2}{4}$. Avem $S_{AHD} = S_{AED} \cdot \cos\alpha$ unde α este unghiul diedru căutat.

$$\cos\alpha = \frac{S_{AHD}}{S_{AED}}.$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 \cdot \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{15}}{16}}{\frac{a^2}{4}} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\alpha = \arccos\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{15}}{4}\right) \approx \arccos 0{,}44598.$$

Folosind tabelele găsim că $\alpha \approx 63°30'$.

d). Dacă a este variabil, $\sphericalangle ACO = 30°$ și $\sphericalangle ABO = 60°$ fiind constante, OC și OB se mișcă rămînînd paralele cu ele înseși, iar AB și AC sînt fixe.

Rezultă că locul geometric al punctului E este segmentul AE mediana triunghiului OAC. Cînd O se confundă cu A, atunci și E, C, B, D se confundă cu A.

7.27. Fie M un punct în interiorul tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$. Dreptele A_1M, A_2M, A_3M, A_4M înțeapă fețele opuse respectiv în punctele B_1, B_2, B_3, B_4.

Să se stabilească relațiile:

$$\sum \frac{MB_1}{A_1B_1} = 1 \quad \text{și} \quad \sum \frac{A_1M}{A_1B_1} = 3.$$

(G.M.F.B., 1178, *Mihail Popescu*).

Soluție. Se notează cu A_1', A_2', A_3', A_4' picioarele înălțimilor tetraedrului considerat și cu M_1, M_2, M_3, M_4 proiecțiile punctului M respectiv pe fețele opuse vîrfurilor A_1, A_2, A_3, A_4. Ținînd seama că suma volumelor tetraedrelor $MA_2A_3A_4$, $MA_1A_3A_4$, $MA_1A_2A_4$, $MA_1A_2A_3$ este egală cu volumul tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$, rezultă:

$$\frac{S(A_2A_3A_4)\cdot MM_1}{3} + \frac{S(A_1A_3A_4)\cdot MM_2}{3} + \frac{S(A_1A_2A_4)\cdot MM_3}{3} + \frac{S(A_1A_2A_3)\cdot MM_4}{3} = \frac{S(A_2A_3A_4)\cdot A_1A_1'}{3}. \quad (1)$$

Deoarece

$$S(A_2A_3A_4)\cdot A_1A_1' = S(A_1A_3A_4)\cdot A_2A_2' = S(A_1A_2A_4)\cdot A_3A_3' = S(A_1A_2A_3)\cdot A_4A_4'$$

relația (1) devine:

$$\sum \frac{MM_1}{A_1A_1'} = 1. \quad (2)$$

Ținînd seama de relația:

$$\frac{MM_1}{A_1A_1'} = \frac{MB_1}{A_1B_1};$$

și de cele analoage, relația (2) se mai poate scrie:

$$\sum \frac{MB_1}{A_1B_1} = 1. \quad (3)$$

Folosind relația $MB_1 = A_1B_1 - A_1M$ și cele analoage, relația (3) devine:

$$\sum \frac{A_1M}{A_1B_1} = 3.$$

Observație: În cazul cînd M este centrul sferei circumscrise tetraedrului considerat, se obține relația:

$$\sum \frac{1}{A_1B_1} = \frac{3}{R}.$$

7.28. Fie G centrul de greutate al tetraedrului oarecare $A_1A_2P_3A_4$. Se notează cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale fețelor opuse respectiv vîrfurilor A_1, A_2, A_3, A_4. Știind că M este un punct în interiorul tetraedrului iar M_1, M_2, M_3, M_4 sînt respectiv simetricele lui M față de G_1, G_2, G_3, G_4, se cere:

a). Să se demonstreze că dreptele A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 sînt concurente într-un punct P;

b). Să se arate că punctele M, G, P sînt coliniare și există relația: $3GM = 5GP$.

(G.M.F.B., 1133, *Mihail Popescu*).

Soluție. a). Fie B și C mijloacele muchiilor A_2A_3 și A_3A_4. Deoarece $M_2M_4 \parallel G_2G_4 \parallel BC$ și $BC \parallel A_2A_4$, rezultă că $M_2M_4 \parallel A_2A_4$.

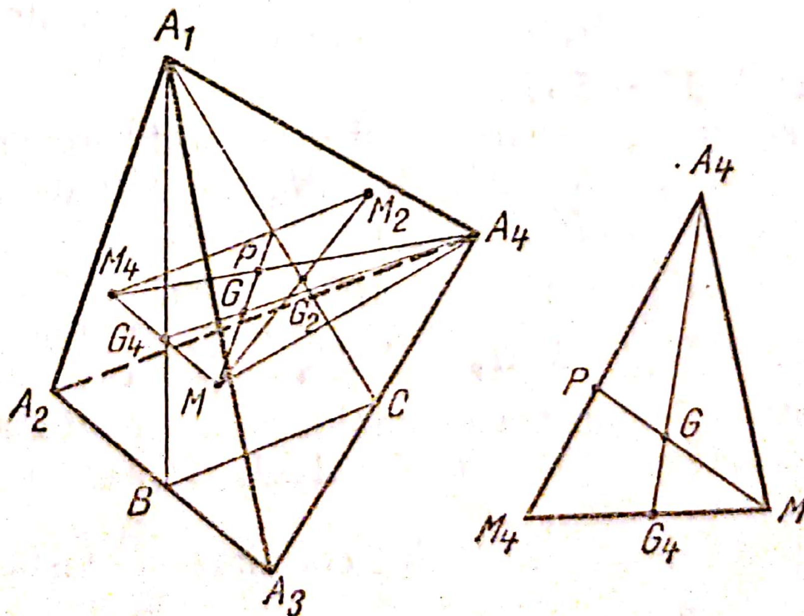


Fig. 7.28

Ținînd seama că:

$$BC = \frac{A_2A_4}{2},\ G_2G_4 = \frac{M_2M_4}{2} \text{ și } \frac{G_2G_4}{BC} = \frac{A_1G_4}{A_1C} = \frac{2}{3};$$

se obține $\frac{M_2M_4}{A_2A_4} = \frac{2}{3}$ și deci $\frac{PM_4}{PA_4} = \frac{2}{3}$ (unde P este intersecția dreptelor A_2M_2, A_4M_4).

Analog se demonstrează că și dreptele A_1M_1 și A_3M_3 intersectează pe A_4M_4 în același punct P.

b). Ținînd seama că:

$$\frac{PM_4}{PA_4} = \frac{2}{3},\ \frac{GA_4}{GG_4} = 3,\ \frac{G_4M}{M_4M} = \frac{1}{2};$$

relația lui Menelaus

$$\frac{PM_4}{PA_4} \cdot \frac{GA_4}{GG_4} \cdot \frac{MG_4}{MM_4} = 1$$

este satisfăcută în triunghiul $A_4G_4M_4$ și deci punctele M, G, P sînt coliniare.

Aplicînd *relația lui Menelaus* în triunghiul MPM_4 tăiat de transversala G_4A_4 se obține:

$$\frac{G_4M_4}{G_4M} \cdot \frac{GM}{GP} \cdot \frac{A_4P}{A_4M_4} = 1$$

și cum

$$\frac{G_4M_4}{G_4M} = 1,\ \frac{A_4P}{A_4M_4} = \frac{3}{5}$$

rezultă: $3GM = 5GP$.

Observație: Se poate da și o generalizare problemei considerînd punctele M_1, M_2, M_3, M_4 situate pe dreptele MG_1, MG_2, MG_3, MG_4 astfel încît:

$$\frac{MG_1}{MM_1} = \frac{MG_2}{MM_2} = \frac{MG_3}{MM_3} = \frac{MG_4}{MM_4} = k,$$

și printr-o demonstrație analoagă, se poate arăta că

— dreptele A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 sînt concurente într-un punct P;

— punctele M, G, P sînt coliniare și există relația:

$$3(1 - k) \cdot GM = (1 + 3k) \cdot GP.$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

8.1. Două cercuri de raze R și r, $(R < 2r)$, sînt tangente de aceeași parte dreptei AD în punctul A. O paralelă dusă la dreapta AD taie linia centrelor în Q, cercul de rază r în B și cercul de rază R în C (B și C fiind de aceeași parte a liniei centrelor).

a). Să se calculeze raportul $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ în funcție de razele R și r.

b). Să se calculeze suma $QB^2 + QC^2$ în funcție de R, r și QA și să se arate că dacă în particular punctul Q coincide cu unul din centrele celor două cercuri, atunci $QB^2 + QC^2 = 2Rr$.

(Institutul de Construcții, București, 1975).

Soluție. a). Fie O_1, O_2 respectiv centrele cercurilor de raze R, r. Teorema catetei, în triunghiurile ABE, ACE_1 dă: $AB^2 = AE \cdot AQ$ și $AC^2 = AE_1 \cdot AQ$. Deci $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{AE}{AE_1} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R}$.

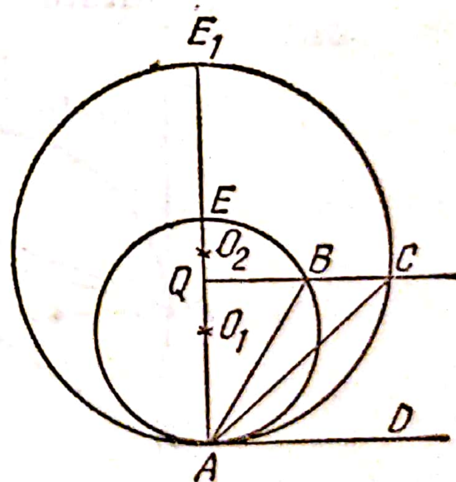


Fig. 8.1

b). Teorema înălțimii în triunghiurile dreptunghice ABE, ACE_1 dă: $QB^2 = QE \cdot QA$; $QC^2 = QE_1 \cdot QA$ și adunîndu-le obținem:

$$QB^2 + QC^2 = QA(QE + QE_1). \tag{1}$$

Dar $QE = 2r - QA$, $QE_1 = 2R - QA$ și deci

$$QB^2 + QC^2 = QA(2r + 2R - 2QA). \tag{2}$$

Dacă Q coincide cu Q_2, atunci $QA = Q_2A = R$ și (2) devine

$$QB^2 + QC^2 = R(2r) = 2Rr.$$

Analog, dacă Q coincide cu O_1, avem $QA = O_1A = r$ și relația este aceeași $QB^2 + QC^2 = 2Rr$.

8.2. Pe segmentul AB de lungime a, se consideră un punct C situat între A și B astfel încît $AC = 2CB$. Pe AC și BC ca diametre se construiesc două semicercuri, unul de o parte și celălalt de partea opusă a dreptei AB. Prin C se duce o secantă oarecare MCN (M pe arcul AC, N pe arcul CB).

a). Să se arate că tangentele în M, N la cele două semicercuri sînt paralele.

b). Fie O mijlocul segmentului AB: perpendiculara din O pe MN intersectează pe MN în P și pe MB în Q. Să se arate că Q este mijlocul lui MB și P este mijlocul lui MN.

c). Se notează $\sphericalangle BCN = \alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Să se afle α în cazul particular în care $AM + MN + NB = a\sqrt{2}$.

(**Institutul Politehnic, București, iulie 1975**).

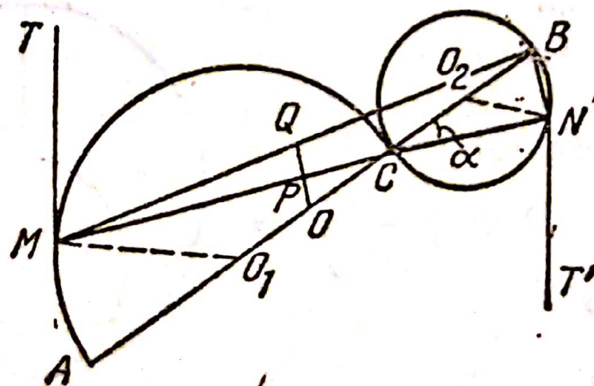


Fig. 8.2

Soluție. a). Fie O', O'' centrele semicercurilor de diametre respectiv AC, CB. Triunghiurile $O'MC$ și $O''NC$ sînt isoscele și cu unghiurile de la bazele lor respectiv egale. Urmează atunci că și unghiurile de la vîrf sînt egale $\sphericalangle MO'C = \sphericalangle CO''N$. Din acestea apoi rezultă $\sphericalangle TMC = \sphericalangle T'NC$ și deci $MT \parallel NT'$.

b). Perpendiculara din O pe MN este paralelă cu AM (ambele perpendiculare pe MN) și OQ este linie mijlocie în $\triangle AMB$, deci Q este mijlocul lui MB. $BN \perp MN$ și deci $QP \parallel BN$ (căci $QP \perp MN$), și rezultă că QP este linie mijlocie în $\triangle MBN$ și astfel P este mijlocul lui MN.

c). Din $AB = a$ și $AC = 2CB$, rezultă imediat $AC = \frac{2a}{3}$, $CB = \frac{a}{3}$. Egalitatea se transformă $AM = AC \sin\alpha = \frac{2a}{3}\sin\alpha$, $MN = MC + CN = \frac{2a}{3}\cos\alpha + \frac{a}{3}\cos\alpha = a\cos\alpha$; $NB = \frac{a}{3}\sin\alpha$ și deci $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$. Pentru rezolvare luăm ca necunoscută $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ și avem:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}+1)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2} - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1$$

rădăcină dublă. Pentru a afla pe α, să calculăm pe $\operatorname{tg}\alpha$.

Avem $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 1$$ și deci $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

8.3. Pe un cerc se dau trei puncte arbitrare A, B, C. Tangenta în C la cerc taie dreapta AB în M. Bisectoarea unghiului CMA taie CA în D și CB în E.

a). Să se arate că $CD = CE$; $\frac{MD}{ME} = \frac{MA}{MC}$.

b). De asemenea $\frac{DC}{DA} \cdot \frac{EC}{EB} = 1$.

c). Să se calculeze în funcţie de latura $b = AC$ şi unghiurile triunghiului ANC, lungimile segmentelor MA, MB, MC.

(Institutul Politehnic, Bucureşti, 1975).

Soluţie. a). Unghiul CMA fiind cu vîrful M în exteriorul cercului, are măsura $\frac{\widehat{AQC} - \widehat{CPB}}{2}$ (Q, P respectiv mijloacele arcelor $\widehat{AC}$, $\widehat{CB}$) şi cum $\widehat{AQC} - \widehat{CPB} > 0$, rezultă că $AC > CB$. Bisectoarea unghiului AMC este dreapta dusă prin P şi Q şi care taie pe BC în E şi pe AC în D. Să arătăm că $CD = CE$. Avem $\sphericalangle CED = \frac{\widehat{PB} + \widehat{QC}}{2}$ şi $\sphericalangle CDE = \frac{\widehat{CP} + \widehat{QA}}{2}$ şi astfel rezultă $\sphericalangle CED = \sphericalangle CDE$, deci $\triangle CDE$ este isoscel cu $CD = CE$ (1).

Din $\triangle MDA \sim \triangle MCE$ (au două unghiuri respectiv egale); $\sphericalangle AMD = \sphericalangle CME$ şi $\sphericalangle DAM = \sphericalangle ECM = \frac{\widehat{CB}}{2} \Rightarrow \frac{MD}{ME} = \frac{MA}{MC} = \frac{AD}{CE}$ (2).

b). Din (2) ţinînd seama de (1) $\frac{DC}{DA} = \frac{MC}{MA}$ (3), iar din $\triangle MCB$, $\frac{EC}{EB} = \frac{MC}{MB}$ (4) (teorema bisectoarei). Înmulţind (3) şi (4) avem

$$\frac{DC}{DA} \cdot \frac{EC}{EB} = \frac{MC^2}{MB \cdot MA} = 1 \text{ căci } MC^2 = MB \cdot MA.$$

c). Notăm a, b, c, A, B, C respectiv laturile şi unghiurile triunghiului ABC. La a) am văzut că $b > a$. Din (3) avem $\frac{DC}{DC + DA} = \frac{MC}{MC + MA}$ şi deci $DC =$

$$= \frac{b\,MC}{MC + MA}. \text{ Din } (4)\ \frac{EC}{EC + EB} = \frac{MC}{MC + MB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EC = \frac{a\,MC}{MC + MB}.$$

Astfel că din $CD = CE$ rezultă

$$\frac{b\,MC}{MC + MA} = \frac{a\,MC}{MC + MB} \Rightarrow (b - a)\,MC =$$
$$= a\,MA - b\,MB.$$

Apoi, mai avem relațiile $MA - MB = AB = c$ și $MC^2 = MA \cdot MB$. Din aceste ultime trei ecuații determinăm pe MA, MB, MC. Din a doua $MB = MA - c$ și înlocuind în precedenta, avem $(b - a)\,MC = a\,MA - b\,MB + bc \Rightarrow (b - a)(MC + MA) = bc$.

$$\Rightarrow MA = \frac{bc}{b - a} - MC,$$

$$MB = \frac{bc}{b - a} - MC - c = \frac{ac}{b - a} - MC.$$

Înlocuind pe MA și MB cu aceste valori în $MC^2 = MA \cdot MB$, obținem

$$MC^2 = \left(\frac{bc}{b - a} - MC\right)\left(\frac{ac}{b - a} - MC\right) \Rightarrow MC = \frac{abc}{b^2 - a^2},$$

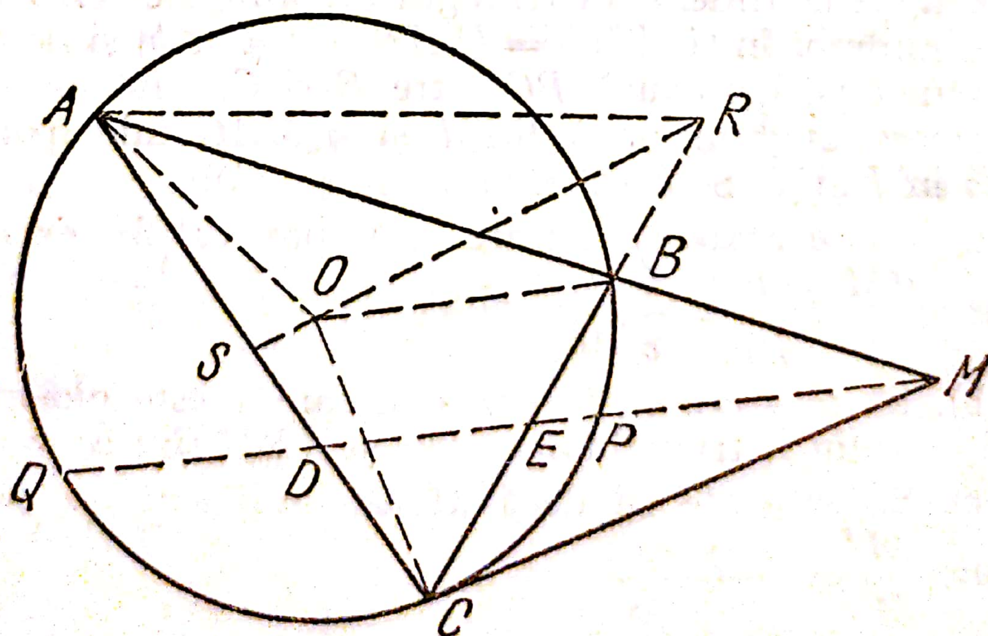


Fig. 8.3

şi înlocuind mai sus

$$MA = \frac{b^2c}{b^2 - a^2}, \; MB = \frac{ac}{b - a} - \frac{abc}{b^2 - a^2} = \frac{a^2c}{b^2 - a^2}$$

şi astfel avem pe MA, MB, MC în funcţie de laturile triunghiului ABC. Ca să le exprimăm în funcţie de latura b şi unghiurile acestui triunghi, aplicăm teorema sinusului $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ şi de aici $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$ şi $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$. Înlocuind pe a, c în MA, MB, MC vom obţine

$$MA = \frac{b \cdot \sin B \sin C}{\sin^2 B - \sin^2 A} = \frac{b \cdot \sin B \sin C}{\sin (B + A) \sin (B - A)} =$$

$$= \frac{b \cdot \sin B}{\sin (B - A)},$$

$$MB = \frac{a \cdot \sin A \cdot \sin C}{\sin C \cdot \sin (B - A)} = \frac{a \cdot \sin A}{\sin (B - A)} =$$

$$\frac{b \cdot \sin^2 A}{\sin B \cdot \sin (B - A)}; \quad MC = \frac{b \cdot \sin A}{\sin (B - A)}.$$

8.4. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul drept în A şi $AC = b$, $AB = c$ $(c < b)$ şi fie M un punct pe ipotenuză BC între B şi C. Bisectoarele interioare unghiurilor $\sphericalangle BAM$ şi $\sphericalangle MAC$ taie ipotenuza în I şi J. Se cere:

a). Să se arate că oricare ar fi punctul M, există relaţia $\frac{IM}{JM} : \frac{IB}{JC} = \frac{b}{c}$.

b). Să se arate că în cazul în care I este piciorul înălţimii din A triunghiurile AIJ şi ABM sînt isoscele.

c). Să se arate că dacă M este mijlocul lui BC, atunci $\frac{MI}{MJ} = \frac{a + 2b}{a + 2c}$.

(Institutul Politehnic, Bucureşti, 1975)

Soluție. a). În triunghiurile BAM, MAC se aplică teorema bisectoarei interioare și avem: $\frac{IM}{IB} = \frac{AM}{AB}$, $\frac{JM}{JC} = \frac{AM}{AC}$ și de aici

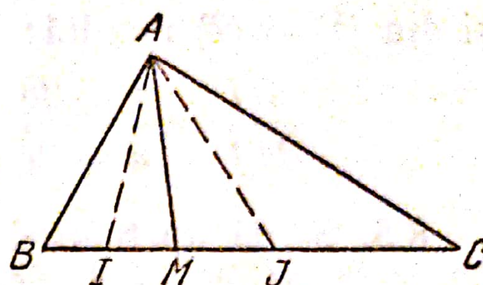


Fig. 8.4

$$\frac{IM}{IB} : \frac{JM}{JC} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \text{ sau } \frac{IM}{JM} : \frac{IB}{JC} = \frac{b}{c}.$$

b). Dacă $b > c$ rezultă $IC > IB$. În adevăr, din relațiile: $b^2 = BC \cdot IC$, $c^2 = BC \cdot IB \Rightarrow \frac{b^2}{c^2} = \frac{IC}{IB}$ și prin ipoteză $\left(\frac{b}{c}\right)^2 > 1$, avem: $IC > IB$, adică M se găsește între I și C. Fie J piciorul bisectoarei $\sphericalangle MAC$. Avem $\sphericalangle BAM + \sphericalangle MAC = 90° \Rightarrow \frac{\sphericalangle BAM}{2} + \frac{\sphericalangle MAC}{2} = 45°$, $\sphericalangle PAM + \sphericalangle MAJ = \sphericalangle IAJ = 45°$ și deci $\sphericalangle AJI = 45°$. Astfel că $\triangle AIJ$ este dreptunghic ($\sphericalangle I = 90°$) și isoscel. Triunghiul ABM este isoscel, că AI în acest triunghi este înălțime și bisectoare.

c). Fie $BC = a$ și avem $AM = \frac{a}{2}$. Din $\triangle ABM$, $\frac{MI}{IB} = \frac{AM}{AB} = \frac{a}{2c}$, de unde $\frac{MI}{MI + IB} = \frac{a}{a + 2c} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{MI}{MB} = \frac{a}{a + 2c}. \quad (1)$$

Analog,

$$\frac{MJ}{CJ} = \frac{AM}{AC} = \frac{a}{2b} \Rightarrow \frac{MJ}{CM} = \frac{a}{a + 2b} \quad (2)$$

34*

și din (1) și (2) rezultă:

$$\frac{MI}{MJ} = \frac{a + 2b}{a + 2c} \quad \text{(căci } CM = MB\text{)}.$$

8.5. Se dă un triunghi ABC dreptunghic în A, așa fel încît $AC = 2AB$. Se împarte ipotenuza BC în 5 părți egale prin punctele D, E, F, G începînd de la B spre C. Să se arate că:

a). MF este perpendicular pe BC, M fiind mijlocul lui AC.

b). $MF = \frac{1}{5} BC$.

c). $CM^2 = CG \cdot CB$.

d). Punctele B, E, M se află pe un cerc cu centrul în A.

(Institutul Politehnic, Cluj-Napoca 1975)

Soluție. a). $MF \perp BC$. Să notăm $a = BC$ ipotenuza și $AB = c$, $AC = b$. Avem $b^2 = 4c^2$, iar *teorema lui Pitagora* dă: $a^2 = 4c^2 + c^2 = 5c^2 \Rightarrow a = c\sqrt{5}$, $b = 2c$ și astfel luăm ca unitate de măsură pentru laturile triunghiului pe c. Să ducem prin M mijlocul lui AC, paralela MO la AB ($O \in BC$). Deci O este la mijlocul lui BC, adică la mijlocul lui EF.

Avem

$$MO = \frac{c}{2};\ OF = \frac{EF}{2} = \frac{c\sqrt{5} : 5}{2} = \frac{c\sqrt{5}}{10};$$

$$OC = \frac{a}{2} = \frac{c\sqrt{5}}{2}. \text{ Deci } \frac{MO}{OF} = \sqrt{5}$$

și $\frac{OC}{MO} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{c}{2}} = \frac{c\sqrt{5}}{c} = \sqrt{5}$ și astfel avem relația

$\frac{MO}{OF} = \frac{OC}{MO}$ și deci $\triangle MOC \sim \triangle MOF$ iar de aici rezultă $\sphericalangle CMO = \sphericalangle MFO = 90°$, adică $MF \perp OC$ sau $MF \perp BC$.

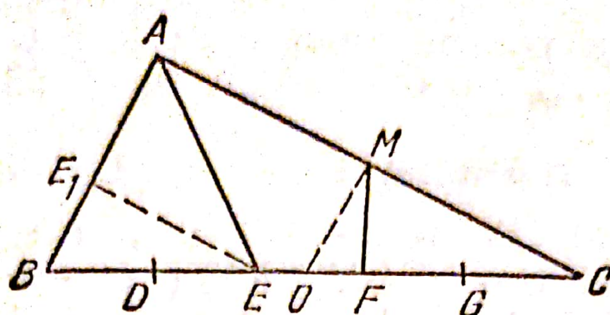


Fig. 8.5

b). În $\triangle CMO$ avem, după teorema înălțimii, $MF^2 = OF \cdot CF = \frac{c\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{2c\sqrt{5}}{5} = \frac{c^2}{5} \Rightarrow MF = \frac{c\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{5} BC.$

c). $CM^2 = OG \cdot CB$. Avem $OG \cdot CB = \frac{c\sqrt{5}}{5} \cdot c\sqrt{5} = c^2 = CM^2.$

d). $AB = c$, $AM = c$. Fie $EE_1 \perp AB$ $(E_1 \in AB)$ și din $\triangle EE_1B \sim \triangle ABC$, $\frac{EE_1}{b} = \frac{2}{5} \Rightarrow EE_1 = \frac{4c}{5}$, iar din triunghiul dreptunghic EE_1B $(E_1 = 90°)$ avem: $E_1B^2 = BE^2 - EE_1^2 = \left(\frac{2c\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \frac{16c^2}{25} = \frac{4c^2}{25} \Rightarrow E_1B = \frac{2c}{5}$; iar $AE_1 = c - \frac{2c}{5} = \frac{3c}{5}$ și din triunghiul AE_1E avem $AE^2 = \frac{9c^2}{25} + \frac{16c^2}{25} = c^2$, $AE = c \Rightarrow AB = AE = AM.$

8.6. Pe segmentul $AB = 4a$, luăm segmentele $AO_1 = O_1C = CO_2 = O_2B = a$. Se consideră cercurile cu centrele în O_1 și O_2 de rază a, și cercul cu centrul în C și de rază $2a$. Din A ducem o tangentă la cercul O_2, punctul de tangență fiind T. Această tangentă taie cercurile O_1 respectiv C în R și respectiv S.

a). Să se arate că $RT = TS = \frac{1}{2} AR.$

b). Se duc perpendicularele în B și C pe AB. Ele taie dreapta AT în P respectiv în Q. Să se arate că $PT = 2QT$.

(Institutul Politehnic, Cluj-Napoca, 1975)

Soluție. a). Avem: $CR \perp AT$, $BS \perp AS$. Deci $CRSB$ este un trapez ($CR \parallel BS$) și O_2 este mijlocul lui CB, iar $O_2T \perp AS$ și deci O_2T este paralelă cu bazele

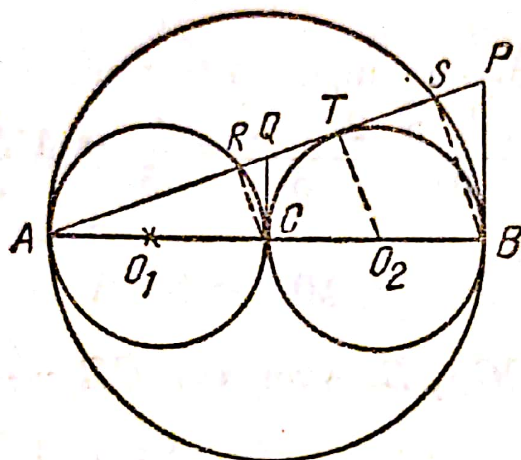


Fig. 8.6

trapezului CR, BS. Rezultă că O_2T este linie mijlocie în trapezul $CRSB$ și deci $RT = TS$. Din $\triangle ACR \sim \triangle AO_2T$, avem:

$$\frac{AT}{AR} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2} \text{ sau } \frac{AT}{AR} = \frac{AT - AR}{AR} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{RT}{AR} = \frac{1}{2},$$

$$RT = \frac{1}{2} AR. \text{ Deci } RT = TS = \frac{1}{2} AR.$$

b). Din $\triangle ABS \sim \triangle ACR \Rightarrow \dfrac{BS}{CR} = \dfrac{4a}{2a} = 2$ și din

$$\triangle BPS \sim \triangle CQR, \ \frac{BS}{CR} = \frac{BP}{CQ} = \frac{4a}{2a} = 2 \Rightarrow BP = 2CQ.$$

Dar $BP = PT$ și $QO = QT$ ca tangente dintr-un punct exterior la cerc. Deci (1) devine $PT = 2QT$.

8.7. Se dă un unghi xOy și în interiorul lui două puncte oarecare A, B. Să se găsească un punct M pe Ox și alt punct N pe Oy, astfel ca drumul $AMNB$ să fie cel mai scurt posibil.

(Institutul de Arhitectură, București, 1975).

Soluție. Se cunoaște problema: fie A, B două puncte de aceeași parte a unei axe xy; să se determine un punct $M \in xy$, față de xy. Dreapta $A'B$ taie pe xy în punctul M căutat, căci $AM + MB = A'M + MB = A'B$ segment fix. Pentru oricare punct $M' \in xy$, avem $AM' + M'B = A'B$ (din $\triangle A'N'B$) și $AM' = A'M'$.

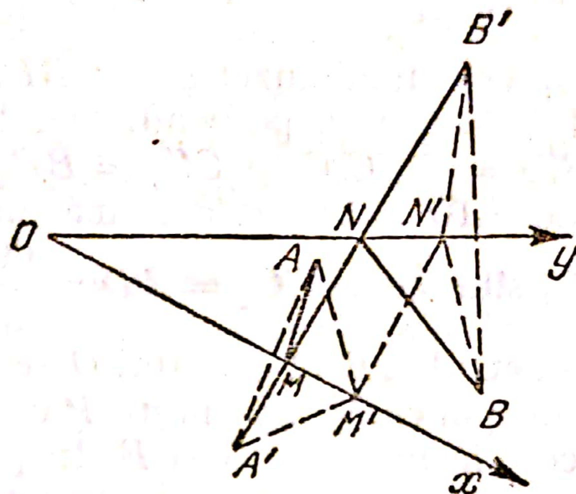


Fig. 8.7

În problema dată procedăm analog. Fie A, B punctele în interiorul unghiului xOy. Luăm A', B' respectiv simetricele lui A față de Ox și a lui B față de Oy. Dreapta $A'B'$ taie pe Ox în M și pe Oy în N, care sînt punctele căutate. În adevăr $AM + MN + NB = A'M + MN + NB' = A'B'$ segment fix. Pentru oricare alte două puncte $M' \in Ox$, $N' \in Oy$, avem: $AM' + M'N' + N'B = A'M' + M'N' + N'B' > A'B'$ (linia frîntă $A'M'N'B'$, care înconjoară segmentul $A'B'$, avînd aceeași origină A' și aceeași extremitate B', este mai lungă decît segmentul $A'B'$).

8.8. Fie triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu catetele $AB = 12$ și $AC = 5$. Se cere:

a). Înălțimea AD dusă din A pe ipotenuza BC.

b). Aria triunghiului ADC.

c). Să se afle lungimile perpendicularelor duse din B și C pe mediana trasată din A pe ipotenuză.

(Institutul Politehnic din Timișoara, iulie 1975)

Soluție. a). Ipotenuza $BC = 13$ și înălțimea $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{60}{13}$.

b). Aria $(ADC) = \frac{AD \cdot DC}{2} = \frac{60}{26} \cdot CD$; $AC^2 = BC \cdot CD$; $CD = \frac{25}{13}$ și aria $(ADC) = \frac{750}{169}$.

c). Fie O mijlocul ipotenuzei BC și BB_1, CC_1 $(B_1 \in AO, C_1 \in AO)$ lungimile perpendicularelor respectiv pe AO. $\triangle BB_1O = \triangle CC_1O$ și $CC_1 = BB_1$. Triunghiul AOC este isoscel $(AO = OC)$ și deci înălțimile duse de la baza sa (AC) sînt egale $CC_1 = AD = \frac{60}{13} = BB_1$.

8.9. Pe diametrul AB al cercului O se ia un punct P, iar pe cerc un punct M. Se unește P cu M și se duc tangentele la cerc în punctele A și B. În punctul M se duce perpendiculara pe PM care intersectează în C și D tangentele din A și B.

a). Să se arate că $MP^2 = MC \cdot MD$.

b). Tangenta în punctul M care intersectează tangentele AC și BD respectiv în punctele C' și D'. Să se arate că: $C'D' = AC' + BD'$.

c). Fie I punctul de intersecție al dreptei AD' cu perpendiculara MN pe AB. Să se arate că $MI = NI$.

(Institutul Politehnic, Brașov).

Soluție. a). Patrulaterele $CAPM$, $MPBD$ sînt inscriptibile și deci $\sphericalangle CPM = \sphericalangle CAM = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} = \sphericalangle ABM = \sphericalangle MDP$ și $\sphericalangle PCM = \sphericalangle PAM$.

Dar $\sphericalangle PAM + \sphericalangle ABM = 90°$ și deci $\sphericalangle PCM + \sphericalangle MDP = 90°$ ceea ce înseamnă că triunghiul CPD este dreptunghic în P și teorema înălțimii dă $MP^2 = MC \cdot MD$.

b). Avem imediat $C'D' = MC' + MD' = AC' + BD'$.

c). Din $\triangle AIN \sim \triangle ABD'$ avem: $\frac{NI}{BD'} = \frac{AI}{AD'}$ (1), iar din triunghiul $AC'D'$, $MI \parallel AC'$ după Tales re-

zultă $\frac{AI}{AD'} = \frac{C'M}{CD'}$ și cum $BD' = MD'$, relația (1) devine $\frac{NI}{MD'} = \frac{C'M}{C'D'}$ (2) apoi din $\triangle AC'D' \sim \triangle MID'$ avem: $\frac{MI}{AC'} = \frac{MD'}{C'D'}$, și cum $AC' = C'M$, $\frac{MI}{C'M} = \frac{MD'}{C'D'}$ (3) și comparînd (2) cu (3) obținem $MI = NI$.

8.10. Pe cercul cu centrul O, de diametru fix AB se iau punctele M și C situate de o parte și de alta a diametrului. Fie N mijlocul lui MC și P proiecția lui N pe AM.

Să se afle locul geometric al punctului P cînd M descrie semicercul pe care nu se află, punctul C fiind fix.

(Institutul Politehnic, București).

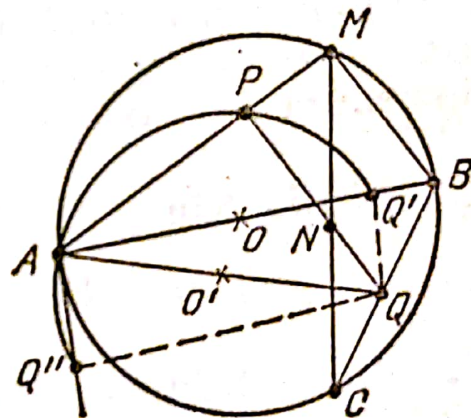


Fig. 8.10

Soluție. Deoarece $NP \perp AM$ și $BM \perp AM$ rezultă $NP \parallel BM$. Astfel, PN este linie mijlocie în triunghiul MCB, adică trece prin mijlocul Q al lui BC. Deoarece segmentul AQ este fix, iar $\sphericalangle APQ = \pi/2$, rezultă că P aparține unui arc din cercul de diametru AQ. Dacă $M \equiv B$, atunci $P \equiv Q'$ (proiecția lui Q pe AB). Dacă $M \equiv A$, atunci $P \equiv Q''$ (proiecția lui Q pe tangenta la cercul dat în punctul A). Deoarece $\sphericalangle Q''AQ' = \pi/2$, rezultă că P aparține semicercului $Q''AQ'$.

Raționamentul reciproc este ușor de urmărit și astfel locul geometric căutat este semicercul $Q''AQ'$.

8.11. Fie cercul dat O și un triunghi oarecare ABC Pscris în el. Pe tangenta în C la cercul dat se ia un punct la și se notează cu M și N proiecțiile lui P respectiv pe înturile AC și BC. Se cere:

a). Să se arate că MN și AB sînt perpendiculare.

b). Considerînd punctele B, C, P fixe, iar A mobil pe cercul dat, să se afle locul geometric al intersecției I a dreptelor AB și MN, cînd A descrie cercul dat.

c). Să se arate că avem relația: $NB^2 \cdot PC^2 = PM^2 \cdot NB^2 + IB^2 \cdot PC^2$.

(Institutul Politehnic, București, 1971).

Soluție. a). Fie $I = AB \cap MN$; patrulaterul $MCNP$ este inscriptibil și deci $\sphericalangle CNM = \sphericalangle MPC$ (1) și $\sphericalangle MPC + \sphericalangle MCP = 90°$ dar $\sphericalangle MCP = \sphericalangle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, astfel că relația precedentă devine:

$$\sphericalangle CMN + \sphericalangle ABC = 90° \qquad (2)$$

care arată că $\triangle BIN$ este dreptunghic în I, adică $IN \perp AB$.

b). Punctele B, C, P, N fixe și numai A variază pe cercul O. Triunghiul BIN fiind dreptunghic în I și ipotenuza BN fixă, locul lui I este cercul de diametru BN.

c). Din triunghiul dreptunghic MPC avem:

$$PC^2 = MP^2 + MC^2, \qquad (3)$$

iar din $\triangle MPC \sim \triangle BIN \Rightarrow \frac{PC}{BN} = \frac{MP}{IN} = \frac{MC}{BI}$. (4)

Apoi, din relația (3) avem:

$PC^2 \cdot BN^2 = BN^2 \cdot MP^2 + MC^2 \cdot BN^2$ și din (4) rezultă $MC^2 \cdot BN^2 = PC^2 \cdot BI^2$ și astfel $PC^2 \cdot BN^2 = BN^2 \cdot MP^2 + PC^2 \cdot BI^2$ relația cerută.

8.12. Se dau două semidrepte perpendiculare Ox și Oy, un punct fix A pe Ox și un punct fix B pe Oy astfel încît $OA = OB = a$. Un punct P se mișcă pe segmentul OB, iar un punct P' se mișcă pe semidreapta By astfel încît $\sphericalangle OAP = \sphericalangle OP'A = \theta$.

Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului APP'.

(Concurs admitere, I.P.B., 1971).

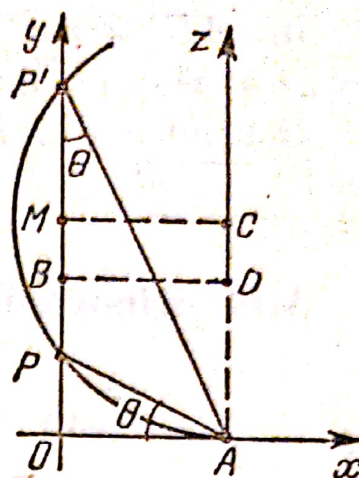


Fig. 8.12

Soluție. Segmentul OA este tangent în A la cercul APP' deoarece punctele O și A sînt fixe, iar $\sphericalangle OAP = \sphericalangle OP'A = \theta$.

Dacă M este mijlocul segmentului PP', atunci centrul C al cercului APP' este punctul de intersecție al perpendicularei ridicate pe Oy în M cu perpendiculara Az ridicată în A pe Ox. Dreapta Az este fixă și $CM \leqslant CA$. Rezultă $CA \geqslant a$ și deci aparține semidreptei Dz, unde $AD = a$.

Reciproc, fie $C \in Dz$. Prin C ducem $CM \perp Oy$ și pe Oy luăm $MP = MP'$, P fiind segmentul MO. Unim pe A cu P și cu P'. Segmentul OA este tangent la cercul APP' în A deoarece $CA \perp OA$. Rezultă $\sphericalangle OAP = \sphericalangle OP'A$ și deci C satisface problema.

Rezultă că locul geometric al punctului C este semidreapta Dz, unde $AD = a$.

8.13. Două plane perpendiculare P și Q se taie după dreapta (d). Se ia un punct A în planul P și un punct B în planul Q. Se notează cu M mijlocul segmentului AB și cu A', B' proiecțiile punctelor A, B pe (d).

a). Să se arate că $MA' = MB'$.

b). Fiind date $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$, să se calculeze lungimea segmentului AB și să se arate că suma pătratelor ariilor triunghiurilor $AA'B'$ și $BA'B'$ este de patru ori mai mare ca pătratul ariei triunghiului $MA'B'$.

(Institutul Politehnic, București).

Soluție. a). Deoarece $AA' \perp Q$ rezultă $AA' \perp A'B$ deci triunghiul $AA'B$ este dreptunghic iar $A'M$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei, avem $A'M = \frac{AB}{2}$. De asemenea, $BB' \perp AB'$, deci triunghiul $BB'A$ este dreptunghic și mediana $B'M = \frac{AB}{2}$.

Rezultă că $A'M = B'M$.

b). $AB^2 = AA'^2 + A'B^2 = AA'^2 + A'B'^2 + BB'^2 = a^2 + b^2 + c^2$, deci $AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Înălțimea din M a triunghiului $MA'B'$ este $h = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

Ariile triunghiurilor vor fi:

$$S_{AA'B} = \frac{a \cdot c}{2}; \quad S_{BA'B'} = \frac{b \cdot c}{2};$$

$$S_{MA'B'} = \frac{c \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{4}.$$

Rezultă:

$$S^2_{AA'B'} + S^2_{BB'A'} = 4S^2_{MA'B'}.$$

8.14. Se consideră un triunghi oarecare ABC în care se duce o paralelă $B'C'$ la BC (B' pe AC, C' pe AB); dreptele BB' și CC' se taie în D și prin D se duce paralela EF tot la BC (E se află pe AB iar F pe AC).

a). Să se demonstreze că AD este mediana dusă din vîrful A în triunghiul ABC.

b). Să se arate că avem relația:

$$\frac{2}{EF} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{B'C'}.$$

c). Să se arate că dacă notăm $\frac{EC'}{EB} = \frac{m}{n}$ și cu S_1, S_2 ariile triunghiurilor $DB'C'$, DBC, atunci:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

(Institutul Politehnic, București, 1970)

Soluție. a). Din $\triangle EDC' \sim \triangle BC'C \Rightarrow \frac{ED}{BC} = \frac{EC'}{BC'}$ (1)

Din $\triangle DFB' \sim \triangle BB'C \Rightarrow \frac{DF}{BC} = \frac{B'F}{B'C}$. (2)

Dar $\frac{EC'}{BC'} = \frac{B'F}{B'C}$ și deci din (1), (2)

$$\frac{ED}{BC} = \frac{DF}{BC} \Rightarrow ED = DF. \qquad (3)$$

Prelungind pe AD, taie pe BC în M. Din $\triangle ADF \sim \sim \triangle AMC$

$$\frac{DF}{MC} = \frac{AD}{AM} \qquad (4)$$

și din $\triangle AED \sim \triangle ABM$, $\frac{ED}{BM} = \frac{AD}{AM}$. (5)

Deci, din (4) și (5) $\frac{DF}{MC} = \frac{ED}{BM}$ și ținînd seama de (3) avem $MC = MB$ adică M este mijlocul lui BC, deci AM este mediană în triunghiul ABC.

b). Din $\triangle EDC' \sim \triangle BCC'$, $\frac{ED}{BC} = \frac{EC'}{BC'}$ și din $\triangle EBD \sim \triangle B'C'B$

$$\frac{ED}{B'C'} = \frac{BE}{BC'}$$

și adunînd aceste egalități, avem:

$$ED \cdot \left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{B'C'}\right) = 1.$$

Analog $DF\left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{B'C'}\right) = 1$ și adunînd acestea

$$EF \cdot \left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{B'C'}\right) = 2 \Rightarrow \frac{2}{EF} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{B'C'}.$$

c). $\triangle DB'C' \sim \triangle BCD$ și deci

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{C'D}{DC}\right)^2 = \left(\frac{EC'}{EB}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

8.15. Se dă un cerc cu centrul în O și diametrul $OA = 2a$. Se prelungește diametrul OA cu $AM = a$. Din M se duce la cerc tangenta MP, în care T este punctul de contact. Tangenta MT se intersectează în P cu tangenta dusă în O. Se cere:

a). Să se arate că triunghiul ACT este echilateral.

b). Să se calculeze segmentele OP, TM și aria triunghiului OTM în funcție de a.

(Institutul Politehnic, București).

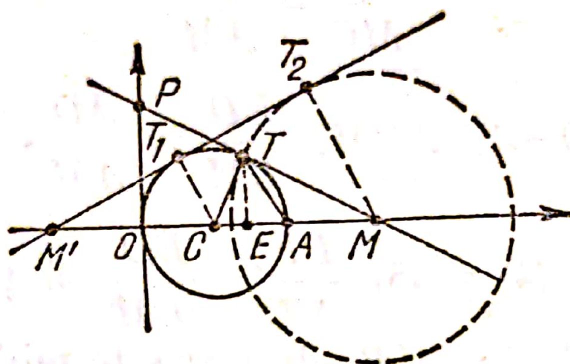


Fig. 8.15

Soluție. a). Triunghiul ACT este isoscel căci $AC = TC = a$. În triunghiul MCT dreptunghic, AT fiind mediană are ca valoare jumătatea ipotenuzei, adică $AT = a$, deci triunghiul ACT este echilateral avînd toate laturile egale.

b). Din triunghiul dreptunghic CTM se obține $TM = a\sqrt{3}$, iar din asemănarea triunghiurilor MCT și MPO deducem $OP = a\sqrt{3}$.

Aria triunghiului OMT se obține din relația:

$$S = \frac{1}{2} OM \cdot TE = \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3} \text{ unități pătrate, } E \text{ se}$$

află pe OM.

8.16. Prin mijlocul M al corzii AB al unui cerc se duc alte două coarde arbitrare CD și EF, punctele C și E fiind pe același arc AB. Paralela prin E la AB taie a doua oară cercul în punctul $G \cdot CF$ și ED taie AB în punctele U și V.

a). Să se demonstreze că patrulaterul $CGUM$ este inscriptibil.

b). Să se arate că triunghiurile GUM și EMV sînt egale.

c). Dreptele CE și FD taie pe AB în P respectiv Q. Să se demonstreze că patrulaterul $QGUF$ este inscriptibil.

d). Să se arate că $PM = MQ$.

(Institutul Politehnic, București, 1970).

Soluție. a). Deoarece $EG \parallel AB$ și patrulaterul $EGBA$ este inscriptibil, rezultă că $EGBA$ este trapez isoscel deci și $\widehat{AE} = \widehat{GB}$ (arce corespunzătoare la două coarde egale). Din egalitatea triunghiurilor EAM și GMB deducem că $EM = MG$ adică $\sphericalangle MEG = \sphericalangle EGM$. Însă, $\sphericalangle MEG = \sphericalangle GMU$ deoarece $\sphericalangle MEG = \sphericalangle EGM$ ca unghiuri de la baza triunghiului isoscel MEG și $\sphericalangle EGM = \sphericalangle GMU$ ca unghiuri alterne interne. Avem:

$$\sphericalangle CGU + \sphericalangle GMU = \frac{\text{măs } \widehat{GDF}}{2} + \frac{\text{măs } \widehat{EBG}}{2} =$$

$$= \frac{360°}{2} = 180°.$$

Deci, rezultă că patrulaterul $CGUM$ este inscriptibil.

b). Deoarece $EM = GM$, $\sphericalangle EMV = \sphericalangle GMU$ și $\sphericalangle VEM = \frac{\text{măs } \widehat{DHF}}{2}$ iar $\sphericalangle MGU = \sphericalangle DCF = \frac{\text{măs } \widehat{DHF}}{2}$ rezultă că $\triangle EMV = \triangle GUM$.

Am notat cu H intersecția lui GM cu cercul.

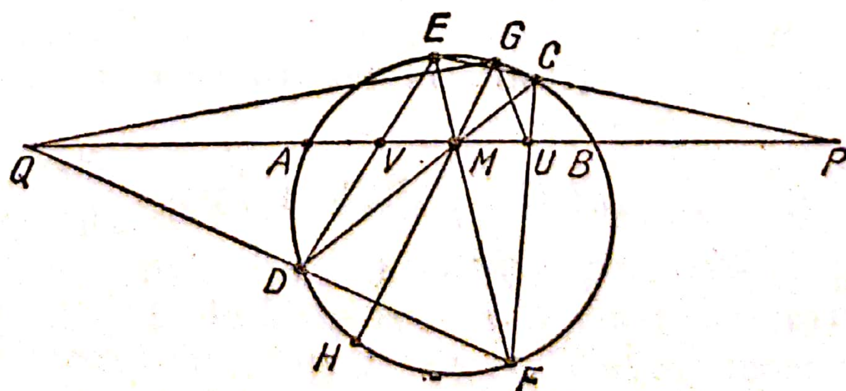


Fig. 8.16

c). Unim G cu F şi avem: $\sphericalangle GUM = \sphericalangle GCM$ (din patrulaterul inscriptibil $GCUM$) dar $\sphericalangle GFD =$
$$= \sphericalangle GCM = \frac{\text{măs } \widehat{GAD}}{2}.$$

Rezultă că:

$$\sphericalangle GUM = \sphericalangle GUQ = \sphericalangle CFD$$

deci patrulaterul este inscriptibil.

d). $\sphericalangle EMP = \sphericalangle GMQ$; $EM = MG$ şi $\sphericalangle EPM =$
$$= \frac{\text{măs } (\widehat{AE} - \widehat{BC})}{2} = \frac{\text{măs } (\widehat{GB} - \widehat{BC})}{2} = \frac{\text{măs } \widehat{GC}}{2} =$$
$$= \sphericalangle GFC = \sphericalangle CQM.$$
(ultimul semn egal rezultă din patrulaterul inscriptibli $QGUF$).

Rezultă că $\triangle QMG = \triangle EMP$ adică $QM = MP$.

8.17. În patrulaterul $ABCD$ fie O intersecţia diagonalelor AC şi BD astfel încît $AO = 2OC$ şi $OD = 2BO$.

a). Să se arate că $ABCD$ este un trapez.

b). Să se exprime aria $(ABCD)$ în funcţie de aria (BOC).

c). Dacă în patrulaterul $ABCD$, diagonalele sînt perpendiculare, avem: $AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$.

d). Să se arate că avînd îndeplinite condiţiile de la punctul c) există un singur patrulater $ABCD$ inscriptibil.

(Institutul Politehnic, Bucureşti, 1970)

Soluţie. a). $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, deoarece $\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{OB} = 2$ şi $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC$ şi de aici rezultă: $\sphericalangle ADO = \sphericalangle OBC$; $\sphericalangle DAO = \sphericalangle OCB$ şi deci $AD \parallel BC$ adică patrulaterul $ABCD$ este trapez cu bazele AD şi BC.

b). Avem aria $(ABCD) =$ aria $(BOC) +$ aria $(AOB) +$ + aria (AOD) + aria (DOC) dar

$$\text{aria } (AOB) = \frac{AO \cdot BB_1}{2} = \frac{2OC \cdot BB_1}{2} = 2 \text{ aria } (BOC);$$

$$BB_1 \perp AC.$$

$$\frac{\text{aria } (AOD)}{\text{aria } (BOC)} = 4 \text{ și deci aria } (AOD) = 4 \text{ aria } (BOC).$$

$$\text{aria } (DOC) = \frac{OC \cdot DD_1}{2} = \frac{\text{aria } (AOD)}{2} = 2 \text{ aria } (BOC).$$

Deci, înlocuind obținem:

$$\text{aria } (ABCD) = 9 \text{ aria } (BOC).$$

c). Din triunghiurile dreptunghice ce se formează, avem:

$$AD^2 = DO^2 + AO^2 = 4OB^2 + 4OC^2 = 4BC^2$$

$$\text{și deci } AD^2 + BC^2 = 5BC^2 \quad (1)$$

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 4OC^2 + OB^2;$$

$$DC^2 = DO^2 + OC^2 = 4OB^2 + OC^2$$

și adunînd $AB^2 + DC^2 = 5(OB^2 + OC^2) = 5BC^2$ (2)

și din (1) și (2) rezultă relația cerută.

d). Ca patrulaterul $ABCD$, în condițiile de la c), să fie inscriptibil, trebuie ca:

$$\sphericalangle OBC = \sphericalangle OAD. \quad (3)$$

Dar $ABCD$ fiind trapez avem $\sphericalangle OBC = \sphericalangle ODA$ (4) și din (3), (4), rezultă $\sphericalangle OAD = \sphericalangle ODA = 45°$, deoarece triunghiul AOD este dreptunghic în O. Fiind isoscel, $OD = OA$ și tot așa $OB = OC$, adică diagonalele sînt egale $AC = BD$. Deci $ABCD$ este un trapez isoscel. Avem evident un singur patrulater inscriptibil în condițiile date, deoarece pe AD ca ipotenuză putem construi un singur triunghi isoscel AOD, dreptunghic.

8.18. Pe semidreptele Ox, Oy, Oz, nesituate în același plan, se consideră respectiv punctele A, B, C astfel ca $OA = \lambda a$, $OB = \lambda b$, $OC = \lambda c$, unde a, b, c sînt con-

stante iar λ este variabil. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABC cînd λ variază.

(Institutul Politehnic, București)

Soluție. Din faptul că punctele A, B, C trebuie să fie, respectiv, pe Ox, Oy, Oz rezultă că $abc \neq 0$, iar $\lambda \neq 0$. Pentru $\lambda = \lambda_0$ fixăm punctele A, B, C respectiv în P, Q, R. Avem:

$$\frac{OA}{a} = \frac{OB}{b} = \frac{OC}{c}, \quad \frac{OP}{a} = \frac{OQ}{b} = \frac{OR}{c} = \lambda_0 \text{ și deci}$$

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OB}{OQ} = \frac{OC}{OR}$$

ceea ce implică $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$, $CA \parallel RP$. Fie C' mijlocul lui AB și R' mijlocul lui PQ. Evident, punctele O, C', R' sînt coliniare și avem:

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OC'}{OR'} = \frac{OC}{OR}.$$

Rezultă $CC' \parallel RR'$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și G_1 centrul de greutate al triunghiului fix PQR. Avem:

$$\frac{OC'}{OR'} = \frac{OG}{OG_1} = \frac{GC'}{G_1R'} = \frac{CC'}{RR'}$$

și deci OG este coliniar cu OG_1. Astfel, G aparține dreptei ce trece prin O și G_1.

Reciproc, fie $G \in OG_1$. Prin G ducem un plan paralel cu planul PQR care taie pe Ox, Oy, Oz respectiv în A, B, C. Dreptele AG, BG, CG sînt respectiv paralele cu medianele triunghiului PQR. De aceea G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Astfel, locul geometric căutat este dreapta OG_1.

8.19. Se dă triunghiul oarecare ABC și A', B', C' picioarele înălțimilor duse din A, B, C. Perpendicularele din A' pe AC respectiv pe AB taie dreapta $B'C'$ în punctele B'' respectiv C''. Să se arate că:

a). B'' și C'' sînt simetrice punctului A' față de laturile AC, respectiv AB.

b). Se consideră punctele arbitrare $M \in AB$ și $N \in AC$. Să se arate că perimetrul $\triangle A'B'C'$ este mai mic decît perimetrul $\triangle A'MN$.

c). Fie $I = AA' \cap B''C''$. Să se demonstreze relația:

$$IB' \cdot IC'' = IC' \cdot IB'' = IA \cdot IA'.$$

(Institutul Politehnic,
Facultatea de electronică, 1971).

Soluție. a). Fie H ortocentrul triunghiului. Patrulaterul $BC'B'C$ este inscriptibil, deoarece $\sphericalangle BC'C = \sphericalangle BB'C = 90°$ și de aici rezultă $\sphericalangle B = \sphericalangle AB'C' = \sphericalangle CB'B''$ (1). Patrulaterul $A'HB'C$ este inscriptibil, căci $\sphericalangle HA'C + \sphericalangle HB'C = 180°$ și de aici $\sphericalangle HCA' = \sphericalangle HB'A'$. Dar $\sphericalangle HCA'$ are complement $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle HB'A$ are complement pe $\sphericalangle A'B'C$ și deci

$\sphericalangle B = \sphericalangle A'B'C$ (2), iar din (1) și (2) rezultă

$$\sphericalangle A'B'C = \sphericalangle CB'B''. \tag{3}$$

Din (3) rezultă că $\triangle A'B'B''$ este isoscel, $B'C$ fiind bisectoare și înălțime ($A'B' = B'B''$) și deci B'' este simetricul lui A' față de AC. Analog se demonstrează că C'' este simetricul lui A' față de AB.

b). Avînd în vedere cele de la a), $A'B' + B'C' + C'A' = B'B'' + B'C' + C'B'' = C''B''$; AB, AC fiind respectiv mediatoarele segmentelor $A'C''$, $A'B''$, avem:

$$A'M = C''M, \; A'N = B''N.$$

Dar $C''B'' < C''M + MN + NB'' = A'M + MN + A'N$.

Analog se demonstrează, dacă M, N sînt sub $C''B''$ sau unul de o parte și altul de cealaltă parte.

c). Cercul de diametru AB trece prin punctele A, B, A', B', C'' deoarece unghiurile din A', B', sînt drepte iar C'' simetricul lui A' față de diametrul AB. Puterea lui $I = AA' \cap B''C''$ față de acest cerc ne dă $IA \cdot IA' = IB' \cdot IC''$.

Analog, cercul de diametru AC, trece prin punctele A, C, A', C', B'' şi puterea lui I faţă de acest cerc ne dă: $IA \cdot IA' = IC' \cdot IB''$ şi deci $IB' \cdot IC'' = IC' \cdot IB'' = IA \cdot IA'$.

8.20. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul $A = 90°$ şi $AC = 2AB = 2a$. Se notează cu M mijlocul lui AC şi se cere:

a). Să se împartă BC în cinci părţi egale prin punctele D, E, F, G aşa încît $BD = DE = EF = FG = GC$.

b). Să se arate că triunghiurile MFC şi BAC sînt asemenea.

c). Să se calculeze aria patrulaterului $AEFM$.

(Institutul Politehnic, Bucureşti).

Soluţie. a). Avem

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + (2a^2)} = a\sqrt{5}.$$

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a \cdot 2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

în care am notat cu D piciorul perpendicularei din A pe BC.

Din triunghiul dreptunghic ABD deducem:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2a\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

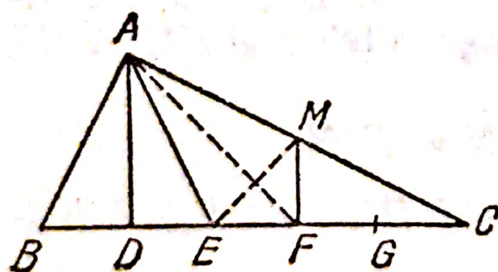


Fig. 8.20

Cum $BC = a\sqrt{5}$ urmează că BD este a cincea parte din BC adică, $BD = \frac{BC}{5}$. Luînd BD în compas, împărţim BC în 5 părţi egale.

b). Pentru ca triunghiurile BAC şi MFC să fie asemenea trebuie să existe proporţionalitatea

$$\frac{FC}{AC} = \frac{MC}{BC} \quad \text{sau} \quad \frac{2a\sqrt{5}}{10a} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Identitatea de mai sus fiind adevărată, urmează că triunghiurile BAC și MFC sînt asemenea.

c). Avînd în vedere că perpendiculara AD este mediatoarea segmentului BE (din construcție) rezultă că triunghiul BAE este isoscel.

Avem: $AB = AE = a$; $AM = a$; $EF = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Deci patrulaterul $AEFM$ este ortodiagonal.

$$S = \frac{1}{2} AF \cdot EM; \quad EM = \sqrt{\frac{10a^2}{25}} = a\sqrt{\frac{2}{5}};$$

$$AF = a\sqrt{\frac{8}{5}}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot a\sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2a^2}{5}.$$

8.21. Un triunghi dreptunghic ABC are unghiul drept în A, cateta $AC = b$ și ipotenuza $BC = 2b$. Se duce un cerc cu centrul în A și raza $R = AC$ care taie ipotenuza BC în D. Se cere:

a). Să se calculeze segmentele CD și DB.

b). Să se arate că triunghiurile ACD și ADB au aceeași arie și să se determine această arie.

c). Să se calculeze raportul razelor cercurilor înscrise în triunghiurile ACD și ADB.

(Facultatea de Chimie-Metalurgie din I.P., București).

Soluție. a). În triunghiul dreptunghic ABC, avem $BC = 2AC$. Rezultă că $\sphericalangle ACD = 60°$. Dar $AC = AD$, deci triunghiul ACD este echilateral și avem $AD = CD = DB = b$.

b). Triunghiurile ACD și ABD au bazele BD și CD egale, iar înălțimea corespunzătoare este aceeași; calculînd aria triunghiului echilateral ACD, găsim $S = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$.

c). Raza cercului înscris într-un triunghi este dată de $r = \frac{S}{p}$, unde S este aria triunghiului, iar p semiperimetrul. Notînd cu r_1 şi r_2 razele cercurilor înscrise în triunghiurile ACD şi ADB se obţine:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

8.22. Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu centrul în O cu laturile AB, BC (unde $AB > BC$) şi se construiesc în exterior semicercurile S_1, S_2, S_3 cu diametrele respectiv BC, CD, DA. O dreaptă arbitrară dusă prin B întîlneşte semicercul S_1 în M, iar paralela dusă prin D la BM întîlneşte semicercul S_3 în N şi semicercul S_2 în P. Se notează $\sphericalangle MBC = \alpha$. Să se găsească locul geometric al intersecţiei perpendicularelor duse din N şi P respectiv pe laturile AD şi CD ale dreptunghiului.

(Institutul Politehnic, Bucureşti, 1972)

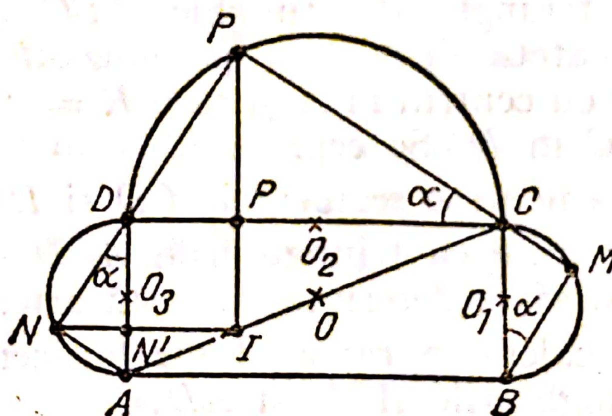


Fig. 8.22

Soluţie. Deoarece $\sphericalangle NDA = \alpha$ rezultă $\sphericalangle PDC = \frac{\pi}{2} - \alpha$ şi $\sphericalangle PCD = \alpha$.

Fie P' proiecţia lui P pe CD şi N' proiecţia lui N pe DA. Punctul al cărui loc se cere este $I = PP' \cap NN'$.

Dacă $N \equiv A$, atunci $I \equiv A$. Dacă N' este mijlocul lui DA, atunci P' este mijlocul lui CD şi deci $I \equiv O$. Dacă $N \equiv D$, atunci $I \equiv C$. Să arătăm că I aparţine

segmentului AC, adică că dreptele PP' și NN' se taie pe AC.
Fie $I' = AC \cap NN'$ și $I = AC \cap PP'$. Avem:

$$\frac{IA}{IC} = \frac{P'D}{P'C} = \left(\frac{PD}{PC}\right)^2 = \text{tg}^2\,\alpha$$

$$\frac{IA}{I'C} = \frac{N'A}{N'D} = \left(\frac{NA}{ND}\right)^2 = \text{tg}^2\,\alpha$$

Rezultă

$$\frac{I'A}{I'C} = \frac{IA}{IC'} \quad \text{adică } I' = I \in AC.$$

Reciproc, fie $I \in AC$. Prin I ducem $IN \perp AD$, $IP \perp DC$. Unim pe N cu P și pe C cu P. Dreapta PC taie cercul S_1 în M. Unim pe M cu B. Găsim $\sphericalangle MBC = \sphericalangle NDA$ și deci I convine problemei.

Rezultă că locul lui I este diagonala AC.

8.23. Să se găsească locul geometric al punctelor din plan (spațiu) pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe să fie constant.

(Institutul Politehnic, București, 1972).

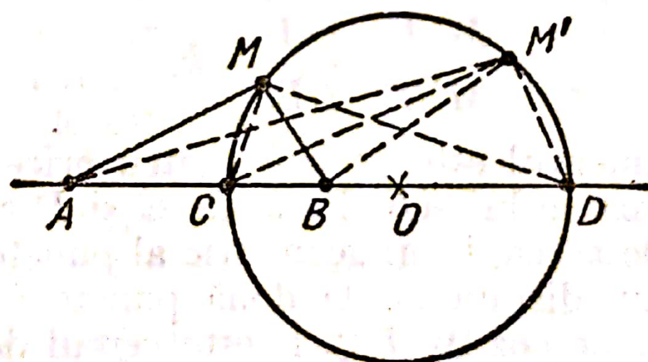


Fig. 8.23

Soluția 1. Fie A și B două puncte fixe distincte. Căutăm locul punctelor M pentru care $\frac{MA}{MB} = k$, unde k este o constantă pozitivă.

Ne situăm în plan. Pentru $k = 1$, atunci orice punct M pentru care $\frac{MA}{MB} = 1$ aparține mediatoarei seg-

mentului AB și reciproc. De aceea, în acest caz locul geometric este mediatoarea lui AB.

Fie $k \neq 1$ și M un punct care nu aparține dreptei AB astfel încît $\frac{MA}{MB} = k$. Bisectoarea interioară a unghiului AMB taie pe AB în C. Deoarece $k \neq 1$ implică $MA \neq MB$, triunghiul AMB nu este isoscel. De aceea și bisectoarea exterioară a unghiului AMB taie pe AB în D. Din proprietățile bisectoarelor avem:

$$\frac{CA}{CD} = \frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} = k.$$

Astfel, C și D sînt punctele fixe de pe dreapta AB care împart segmentul AB în raportul k. Deoarece $\sphericalangle CMD = \frac{\pi}{2}$ rezultă că M aparține cercului de diametru CD.

Reciproc, fie M' un punct al cercului de diametru CD, unde C și D sînt punctele fixe de pe dreapta AB care împart pe AB în raportul k. Deoarece $M'C \perp M'D$ rezultă că $M'C$ și $M'D$ sînt bisectoarele unghiului din M', adică

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{CA}{CB} = k.$$

Raționamentul este același pentru orice punct M' care nu aparține lui AB. Punctele C și D convin prin definiție. De aceea, locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe A și B este un număr pozitiv $k \neq 1$, este cercul de diametru CD, punctele C și D împărțind pe AB în raportul dat.

Ne situăm în spațiu. Argumente analoage arată că pentru $k = 1$ locul geometric este planul mediator al segmentului AB, iar pentru $k \neq 1$ locul geometric este o sferă de diametru CD.

8.24. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc. Perpendiculara în B pe AB taie pe AC în M. Să se găsească locul geometric al lui M cînd latura BC este fixă și punctul A descrie cercul.

(Institutul Politehnic, București, 1973).

Soluție. a). Dacă BC trece prin centrul cercului, atunci punctul M nu există. În continuare excludem acest caz.

b). Fie CC' un diametru al cercului circumscris triunghiului ABC. Dacă A aparține arcului $C'AC$, atunci $\sphericalangle AMB = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle A$ și deci M aparține unui

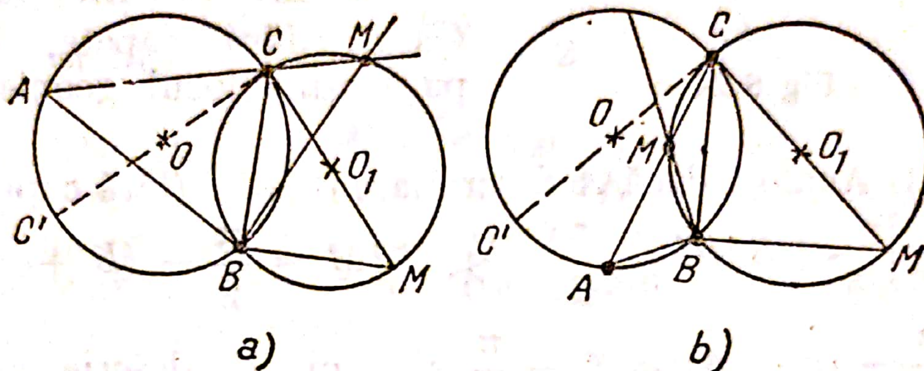


Fig. 8.24 a, b

arc de cerc capabil de unghiul $\frac{\pi}{2} - \sphericalangle A$. Dacă $A \equiv C'$, atunci $M \equiv C$. Dacă $A \equiv C$, triunghiul ABC degenerează într-o dreaptă și $M \equiv M_1$ unde M_1 este intersecția dintre perpendiculara în B pe AB și tangenta în C la cercul cu centrul în O. Punctul M_1 nu face parte din locul geometric. Arcul căruia aparține M face parte din cercul de diametru CM_1.

Reciproc, fie M un punct oarecare al arcului CMM_1, $M \neq M_1$. Dreapta MC taie cercul cu centrul în O în punctul A. Unim pe M cu B și pe B cu A. Avem

$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMB = \sphericalangle CM_1B = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle BCM_1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - A \text{ și deci } MB \perp AB.$$

Cu alte cuvinte, cercul CMM_1, fără capătul M_1 face parte din locul geometric căutat.

c). Analog, dacă A descrie arcul $C'AB$ (fără capete) atunci $\sphericalangle BMC = \frac{\pi}{2} + A$ (unghi exterior în triunghiul ABM) și deci M descrie arcul CMB (fără ca-

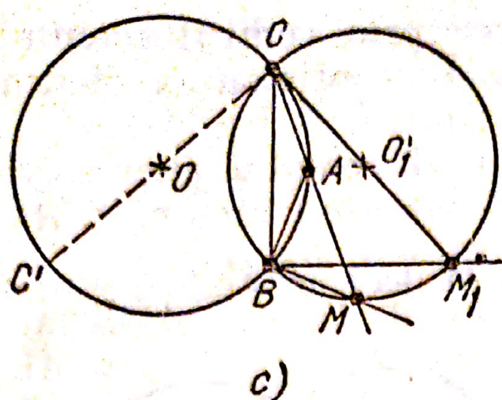


Fig 8.24 c

pete) din cercul de diametru CM_1. Dacă $A \equiv B$, atunci $M \equiv B$; acest punct nu face parte din locul geometric deoarece în acest caz triunghiul ABC degenerează într-o dreaptă.

Cu alte cuvinte, arcul CMB, fără capete, face parte din locul geometric căutat.

d). Analog, dacă A descrie arcul BAC (fără capete), atunci $\sphericalangle BMC = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle BAM = \frac{\pi}{2} - (B + C) = \frac{\pi}{2} - (\pi - A) = A - \frac{\pi}{2}$ și deci M descrie arcul BMM_1 (fără capete), din cercul de diametru CM_1.

În concluzie, locul geometric este cercul cu centrul în O_1 mai puțin punctele B și M_1.

8.25. Într-un triunghi dreptunghic ABC, se notează cu O mijlocul ipotenuzei BC. Fie d perpendiculara în A pe OA. Proiecțiile punctelor B și C pe d se notează respectiv cu B' și C'.

a). Să se arate că $BB' + CC' = BC$; $BB' \cdot CC' = \frac{1}{4} B'C'^2$.

b). Să se calculeze raportul dintre aria trapezului $BCC'B'$ și aria triunghiului ABC.

c). Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor ABB' și AOC' se intersectează într-un punct situat pe BC.

(Institutul Politehnic, București, 1973).

Soluție. a). În trapezul $BB'C'C$, AO este linie mijlocie și deci $BB' + CC' = 2AO = 2OB = BC$ și $AB' = AC = \frac{1}{2} B'C'$. $\triangle ABB' \sim \triangle ACC'$, căci sînt dreptunghice și $\sphericalangle ABB' = \sphericalangle CAC'$ cu laturi perpendicu-

lare și ascuțite. Deci $\frac{BB'}{AC'} = \frac{AB'}{CC'} \Rightarrow BB' \cdot CC' = AB'^2 =$ $= \frac{1}{4} B'C'^2$.

b). Fie $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Se observă că: $\triangle AAB' = \triangle ABD$ și $\triangle ACC' = \triangle ACD$. Deci aria $(BB'C'C) = 2$ (aria ABD + aria ACD) $= 2$ aria (ABC) astfel că raportul $\frac{\text{Aria } (BB'C'C)}{\text{aria } (ABC)} = 2$.

c). Patrulaterul $ADBB'$ este inscriptibil și deci cercul circumscris triunghiului ABB' trece prin punctul D. Analog, patrulaterul $ADCC'$ este inscriptibil și astfel cercul circumscris triunghiului ACC' trece de asemenea prin $D \in BC$.

8.26. Se consideră un triunghi echilateral ABC și un punct O pe paralela dusă prin A la BC. Cercul cu centrul în O, tangent la BC într-un punct T situat între B și C, taie laturile AB și AC respectiv în M și N (M între A și B iar N între A și C). Fie de asemenea P punctul în care latura AC taie a doua oară cercul.

a). Să se arate că triunghiul APM este isoscel și să se calculeze în grade arcul MN.

b). Să se arate că patrulaterul $AOMN$ este inscriptibil.

c). Notînd cu raza cercului, cu x segmentul OA, se cere să se calculeze lungimile segmentelor AM și AN în funcție de R și x. (Se va nota $\sphericalangle AMN = \alpha$).

(Institutul Politehnic, București, 1974).

Soluție. a). Deoarece axa de simetrie RS a cercului cu centrul în punctul O situat între proiecțiile lui B și C pe RS, este paralelă cu BC, rezultă că

$$\sphericalangle RAP = \sphericalangle BCA = 60°,$$
$$\sphericalangle MAR = \sphericalangle ABC = 60°$$

și deci

$$AP = AM.$$

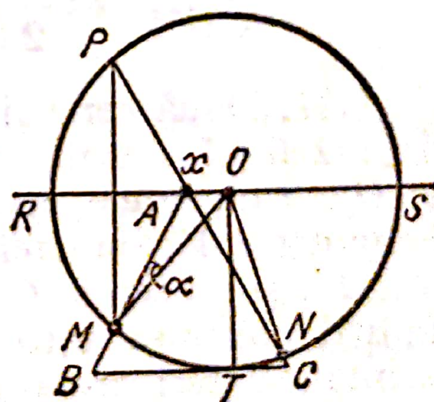


Fig. 8.26

Ținînd seama că $MP \parallel RS$ deducem $\measuredangle AMN = \measuredangle APM = 30°$. De aceea, măs $\widehat{MN} = 60°$.

b). Din relația măs $\widehat{MN} = 60°$ rezultă $\measuredangle NAM = \measuredangle NOM = 60°$, adică patrulaterul $AONM$ este inscriptibil.

c). Aplicînd teorema sinusurilor în $\triangle AMO$:

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin 120°} = \frac{AM}{\sin (60° - \alpha)}.$$

Din prima egalitate deducem

$$\sin \alpha = \frac{x\sqrt{3}}{2R}$$

și deci

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{4R^2 - 3x^2}}{2R}.$$

$$AM = \frac{R \sin (60° - \alpha)}{\sin 120°} = \frac{R\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{4R^2 - 3x^2} - x).$$

Analog, ținînd seama că $\measuredangle ANO = \alpha$, din $\triangle ANO$ găsim:

$$AN = \frac{1}{2}(\sqrt{4R^2 - 3x^2} + x).$$

8.27. Două cercuri tangente exterior în punctul A, au razele $R = 9$ m, $r = 3$ m și centrele respective O_1 și O_2. Tangentele comune exterioare se intersectează în punctul V; punctele de tangență cu cercul O_1 fiind T_1, T'_1 și cu cercul O_2, T_2 și T'_2. Să se calculeze: aria figurii cuprinsă între cele două cercuri și tangentele comune exterioare celor două cercuri date.

(Institutul de Arhitectură, București, 1970)

Soluție. Tangentele comune exterioare se întîlnesc pe linia centrelor. Deci $V \in O_1O_2$. Avem două arii din cele cerute în enunț, una deasupra lui O_1O_2 și cealaltă dedesubt și egale deoarece O_1O_2 este axă de simetrie a figurii. Notăm cu A aria de deasupra. Pentru calculul ei trebuie să cunoaștem tangenta $T_1T_2 = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$, $\sphericalangle AO_1T_1 = \alpha$. Din $\Delta O_1T_1V \sim \Delta O_2T_2V$ avem:

$$\frac{O_1T_1}{O_2T_2} = \frac{O_1V}{O_2V} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{O_1V}{O_2V} = \frac{12 + O_2V}{O_2V} \Rightarrow O_2V = 6$$

și deci $O_1V = 18$, apoi $\cos\alpha = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ și $\alpha = \frac{\pi}{3}$; iar

$$\sphericalangle O_1O_2T_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

$A =$ aria $(O_1T_1T_2O_2)$ — [aria sect. (AO_1T_1) + aria sect. (AO_2T_2)] aria $(O_1T_1T_2O_2) = \frac{(9+3)6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$.

aria sect. (AO_1T_1) + aria sect. $(AO_2T_2) = \frac{27\pi}{2} + 3\pi = \frac{33\pi}{2}$.

și astfel $A = 36\sqrt{3} - \frac{33\pi}{2} = \frac{72\sqrt{3} - 33\pi}{2}$.

8.28. Se dă un triunghi ABC cu laturile $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ și un punct P pe BC, astfel ca $BP = k \cdot PC$.

a). Să se arate că segmentul AP este de forma:

$$AP = \frac{1}{1+k} \cdot \sqrt{(1+k)(c^2 + kb^2) - a^2k}.$$

b). Să se determine k astfel ca AP să fie înălțime în ΔABC.

(Institutul de Construcții, București, 1971).

Soluție. a). Din $\frac{BP}{PC} = k$ și $BP + PC = a$, obținem: $BP = \frac{ak}{1+k}$, $PC = \frac{a}{1+k}$. Scriem *relația lui Stewart* pentru fasciculul (AB, AP, AC); $c^2 \cdot PC - AP^2 \cdot a + b^2 \cdot BP = a \cdot BP \cdot PC$ și înlocuind valorile lui BP și PC se obține:

$$AP^2 = \frac{c^2 + b^2k}{1+k} - \frac{a^2k}{(1+k)^2},$$

deci $AP = \frac{1}{1+k} \cdot \sqrt{(1+k)(c^2+b^2k) - a^2k}$.

c). Dacă $AP \perp BC$, trebuie să avem:

$$AP^2 = c^2 - BP^2 \quad \text{și} \quad AP^2 = b^2 - PC^2$$

sau $c^2 - BP^2 = b^2 - PC^2$.

$$c^2 - b^2 = (BP + PC) \cdot (BP - PC) = a^2 \frac{k-1}{k+1}$$

și de aici

$$k = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 - c^2 + b^2}.$$

Dacă înlocuim această valoare a lui k în AP, se obține înălțimea h_a corespunzătoare laturii a în funcție de laturi

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad 2p = a + b + c.$$

8.29. Fie ABC un triunghi, M piciorul înălțimii din A pe BC și N intersecția înălțimii AM cu cercul circumscris triunghiului iar P proiecția lui N pe AC.

a). Să se arate că dreapta MP este paralelă cu tangenta în A la cercul circumscris triunghiului.

b). Fie T proiecția lui B pe tangenta la cerc în A. Să se arate că $TA = MP$.

(Institutul de Construcții, București, 1969).

Soluție. a). Din patrulaterele inscriptibile $ABNC$ și $NMPC$ avem $180° - \sphericalangle TAP = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ANC = \sphericalangle MPA$ deci $MP \parallel AT$.

b). Din patrulaterul inscriptibil $ATBM$, $\sphericalangle TMB = \sphericalangle TAB = \sphericalangle ACB$ deci $TM \parallel AC$; atunci $ATMP$ este paralelogram și $TA = MP$.

8.30. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, catetele fiind $AC = b$ și $AB = c$. Se duce înălțimea AA', apoi se proiectează punctul A' în F și E respectiv pe AB și AC. Perpendicularele în B și C pe ipotenuză intersectează pe $A'F$ și $A'E$ respectiv în P și Q. Se cere:

a). Să se demonstreze că punctele P, A și Q sînt în linie dreaptă.

b). Să se evalueze în funcție de b și c raportul dintre aria trapezului $BCPQ$ și aria triunghiului ABC.

(Institutul de Construcții, București)

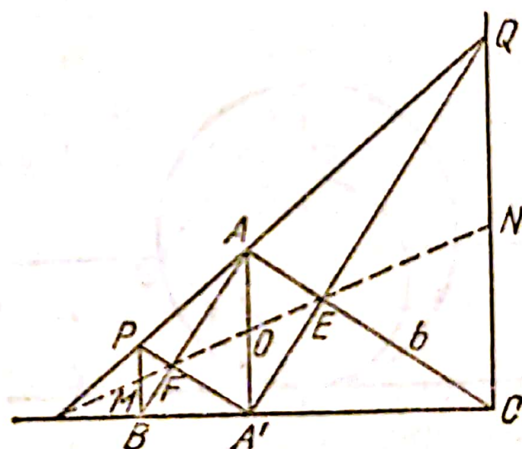


Fig. 8.30

Soluție. a). Fie M, O, N respectiv mijloacele segmentelor PB, AA' și QC. Se cunoaște că M, F, O și O, E, N sînt coliniare. Patrulaterul $FA'EA$ fiind dreptunghi, rezultă că punctele M, F, O, E, N sînt coliniare, deci și punctele P, A, Q sînt coliniare.

b). Avem: aria $PBCQ = \dfrac{(PB + QC)BC}{2}$ în care

$$PB = \frac{BA'^2}{AA'};\quad QC = \frac{CA'^2}{AA'};\quad BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} =$$

$= \sqrt{b^2 + c^2}$ și aria $ABC = \dfrac{BC \cdot AA'}{2}$, în care $AA'^2 =$
$= \dfrac{b^2c^2}{b^2 + c^2}$. Făcînd raportul ariilor obținem:

$$\frac{\text{Aria } PBCQ}{\text{Aria } ABC} = \frac{PQ + QC}{AA'} =$$
$$= \frac{(BA' + CA')^2 - 2 \cdot BA' \cdot CA'}{AA'^2} = \frac{BC^2 - 2 \cdot AA'^2}{AA'^2} =$$
$$= \frac{(b^2 + c^2)^2 - 2b^2c^2}{b^2c^2} = \frac{b^4 + c^4}{b^2c^2}.$$

8.31. Să se afle laturile unui triunghi isoscel, știind că aria triunghiului este egală cu a^2, iar aria totală a conului obținut prin rotirea triunghiului în jurul înălțimii dusă din vîrf pe baza triunghiului este πb^2.

(Institutul Politehnic, Galați, 1970).

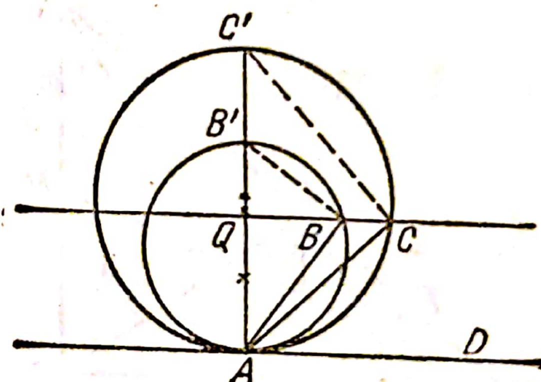


Fig. 8.31

Soluție. a). Din enunț avem sistemul:

$$x\sqrt{y^2 - x^2} = a^2$$

$x(x + y) = b^2$; $2x$, y fiind respectiv baza și latura egală a triunghiului isoscel. Ridicînd prima la pătrat și ținînd seama de a doua, avem: $x(y - x) = \dfrac{a^4}{b^2}$, astfel că sistemul devine:

$$\begin{cases} x(x + y) = b^2 \\ x(y - x) = \dfrac{a^4}{b^2} \end{cases}$$

care prin scădere ne dă:

$$2x^2 = b^2 - \frac{a^4}{b^2} = \frac{b^4 - a^4}{b^2} \Rightarrow x = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{b^4 - a^4}{2}},$$

iar prin adunare

$$2xy = \frac{a^4 + b^4}{b^2} \Rightarrow y = \frac{(a^4 + b^4)\sqrt{2}}{2b\sqrt{b^4 - a^4}}.$$

Deci baza triunghiului isoscel

$$2x = \frac{1}{b}\sqrt{2(b^4 - a^4)}$$

și latura egală

$$y = b\frac{a^4 + b^4}{\sqrt{2(b^4 - a^4)}}.$$

Problema este posibilă dacă $b > a$.

8.32. Se consideră un triunghi înscris într-un cerc de rază r. Să presupunem că una dintre laturile triunghiului este egală cu $r/2$ iar a doua egală cu $r\sqrt{3}$. Să se găsească lungimea celei de a treia laturi a triunghiului.

(Facultatea matematică-mecanică, București, 1973).

Soluție. Fie $AC = r\sqrt{3}$ latura triunghiului echilateral înscris în cerc, care subîntinde arcul $AC = 120°$. Latura $AB = r/2$ poate fi cu extremitatea B în afara arcului AC sau pe arcul AC. Deci avem două cazuri:

a). Cazul B în afara arcului $AC = 120°$; avem $BC = 120° + x$, unde arc $AB = x$. Deci coarda $BC = 2r \sin \frac{120° + x}{2} = 2r \sin\left(60° + \frac{x}{2}\right)$ și $AB = 2r \sin \frac{x}{2} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$ și $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$; iar

$$BC = 2r\left(\sin 60° \cdot \cos \frac{x}{2} + \cos 60° \cdot \sin \frac{x}{2}\right) = \frac{r}{4}(3\sqrt{5} + 1).$$

b). Cazul B pe arcul $\overset{\frown}{AC} = 120°$, dă: $BC = 2r \cdot \sin\left(60° - \frac{x}{2}\right) = \frac{r}{4}(3\sqrt{5} - 1)$.

8.33. Se dă segmentul AB. Prin A și B ducem perpendicularele Ax și By pe AB. O dreaptă care trece prin punctul I, mijlocul segmentului AB, taie dreapta Ax în P și dreapta By în N. Perpendiculara prin I pe dreapta PN taie dreptele Ax, By în M și Q.

a). Să se arate că $MN = MA + NB$.

b). Dacă L este punctul pe MN așa fel încît $LM = MA$, să se arate că triunghiul ALB este dreptunghic în L.

c). Să se arate că dreapta MN este tangentă la un cerc fix, cînd dreapta PN se rotește în jurul punctului I.

d). Să se afle locul geometric al punctului J, simetricul punctului I, în raport cu dreapta MN.

(Facultatea matematică-mecanică, București, 1968).

Soluție. a). Avem $AM = BQ$, $AP = NB$, deci $MNPQ$ este un paralelogram; deoarece are diagonalele perpendiculare, acest paralelogram este un romb; atunci $MN = MP = MA + NB$.

b). Diagonalele rombului sînt și bisectoarele unghiurilor; am luat $ML = AM$, deci triunghiul AML este isoscel, adică $AL \perp MI$. Deoarece $MN = AM + NB$ avem și $NL = NB$, deci și $BL \perp IN$. Cum $\sphericalangle MIN$ este drept, rezultă că și $\sphericalangle ALB$ este drept.

c). Triunghiul ALB fiind dreptunghic, mijlocul I al ipotenuzei este centrul cercului ALB, iar $\sphericalangle MLI$, simetric cu $\sphericalangle MAI$ este drept. Deci MN, perpendiculară pe raza IL este tangentă cercului de diametru AB.

d). Deoarece L descrie cercul de diametru AB, J descrie un cerc concentric, de rază dublă.

8.34. Se dă un segment de dreaptă AB și pe acest segment un punct P oarecare. De aceeași parte a segmentului AB construim semicercurile de diametre AP și PB. Construim tangenta lor comună MN, M fiind pe semicercul de diametru AP.

a). Să se demonstreze că tangenta în P la cele două cercuri se intersectează cu segmentul MN într-un punct Q la mijlocul acestuia.

b). Dreptele AM și BN se intersectează în I. Să se afle locul geometric al punctului I cînd punctul P se mișcă pe AB.

c). Segmentul AB fiind dat și egal cu a, să se determine printr-o construcție grafică punctul P, astfel ca tangenta comună MN să aibă o lungime dată l. Care este valoarea maximă pe care o poate avea l?

(Facultatea Matematică-Mecanică, București, 1968).

Soluție. a). Tangentele dintr-un punct la același cerc fiind egale, avem $QM = QP = QN$. Rezultă că M, P, N sînt pe un cerc de centru Q, deci unghiul MPN este drept.

b). Avem relațiile de unghiuri $MAP = MPQ$, $NBP = NPQ$, deci $MAP + NBP = 1$ dr., sau $AIB = 1$ dr. I descrie deci cercul de diametru AB.

c). Figura $IMPN$ fiind dreptunghi, $IP = MN = l$. Problema revine la a determina pe arcul de cerc de diametru AB, punctul I. Purtăm pe perpendiculara în A pe AB un segment $AC = l$. Paralela prin C la AB taie semicercul în I și I'. Fiind cunoscut I este determinat P, deci toată figura. Cele două soluții sînt evident, simetrice față de mediatoarea lui AB. Maximumul lui l este evident, $\frac{a}{2}$.

8.35. Fie un trapez $ABCD$. Cercul construit pe baza mare AB ca diametru taie laturile neparalele BC în AD în punctul E, respectiv F. Laturile neparalele ale trapezului se întîlnesc în punctul O. Să se arate că:

a). $\frac{OE}{OF} = \frac{OD}{OC}$.

b). Cercurile care au ca diametre diagonalele AC și BD ale trapezului trec prin punctele E, respectiv F.

c). Coarda comună celor două cercuri considerate la punctul b) este perpendiculară pe laturile paralele ale trapezului și trece prin punctul O.

(Facultatea Matematică-Mecanică, București, 1969).

Soluție. a). Avem $AB \parallel DC$. Scriem puterea punctului O față de același cerc $OE \cdot OB = OF \cdot OA$ deci $\frac{OE}{OF} = \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}$.

b). $\sphericalangle AEC = \sphericalangle AEB$ este drept. Deci cercul de diametru AC trece prin E.

c). Fie M și N mijloacele diagonalelor AC și BD. Coarda comună a cercurilor considerate este perpendiculară pe linia centrelor MN, deci pe laturile paralele ale trapezului. Punctul O aparține coardei comune dacă are puteri egale față de cele două cercuri. Dar aceste puteri sînt $OE \cdot OC$ și $OF \cdot OD$ care sînt egale conform relației a).

8.36. Se consideră un triunghi ABC înscris în cercul de centru O și B', respectiv C', mijloacele arcelor AC respectiv AB. Fie de asemenea I centrul cercului înscris triunghiului ABC. Se notează cu O_1 intersecția paralelelor duse din B', respectiv C' la OC', respectiv OB'. Să se arate că $AB' = IB'$ și $O_1A = OI$.

(Facultatea Matematică-Mecanică, București, 1971.)

Soluție. BB', CC' sînt bisectoare ale triunghiului, astfel că $BB' \cap CC' = I$. Fie $AI \cap (C) = A'$; AI este bisectoarea unghiului A și deci A' este mijlocul arcului BC. Să considerăm $\triangle AIB'$ în care $\sphericalangle B'AI =$
$= \frac{\widehat{B'C} + \widehat{CA'}}{2} = \sphericalangle B'IA$ și deci triunghiul este isoscel și $AB' = IB'$. Patrulaterul $C'OB'O_1$ este romb de latură R (raza cercului) și deci diagonalele lui $C'B' \perp OO_1$ sînt bisectoare ale unghiurilor rombului, astfel că $\sphericalangle O_1B'C' =$
$= \sphericalangle C'B'O$ (a). Pe de altă parte $\sphericalangle AB'C' = \sphericalangle C'B'B'$ (b), căci $\widehat{AC'} = \widehat{C'B}$. Scăzînd din (a) pe (b) avem $\sphericalangle O_1B'A = \sphericalangle BB'O$ (c); $\triangle O_1B'A = \triangle OIB'$, deoa-

rece $AB' = IB'$, $O_1B' = OB' = R$ și unghiurile cuprinse între ele sînt respectiv egale, (c). Din egalitatea acestor triunghiuri rezultă $O_1A = OI$.

8.37. Se consideră două cercuri C_1, C_2. Se cere locul geometric al centrelor cercurilor care taie pe C_1, respectiv C_2 în cîte două puncte diametral opuse.

(Facultatea Matematică-Mecanică, București, 1971).

Soluția I. Presupunem problema rezolvată: fie M_1N_1, M_2N_2 respectiv diametrele celor două cercuri (C_1, C_2) după care cercul de centru O le taie. Deoarece secanta comună a două cercuri secante este perpendiculară pe linia centrelor rezultă:

$M_1N_1 \perp O_1O$, $M_2N_2 \perp O_2O$ și deci $ON_1^2 = OO_1^2 + r_1^2$, $ON_2^2 = OO_2^2 + r_2^2$. Dar $ON_1 = ON_2$, astfel că $OO_1^2 + r_1^2 = OO_2^2 + r_2^2$, adică

$$OO_1^2 - OO_2^2 = r_2^2 - r_1^2 = \text{const.}$$

Deoarece punctele O_1 și O_2 sînt fixe rezultă că locul punctului O este o dreaptă perpendiculară pe segmentul O_1O_2.

Soluția a II-a. Fie $I = M_1N_1 \cap M_2N_2$. Patrulaterul OO_1IO_2 este inscriptibil, căci $\sphericalangle OO_1I + \sphericalangle OO_2I = 90° + 90° = 180°$. Centrul ω al cercului circumscris acestui patrulater satisface condiția $\omega O_1 = \omega O_2 = \frac{OI}{2}$ adică se află pe mediatoarea segmentului O_1O_2.

Punctul I se află pe axa radicală a cercurilor C_1, C_2, care știm că este perpendiculară pe linia centrelor, adică paralelă cu mediatoarea segmentului O_1O_2. Triunghiul OO_1I dreptunghic în $O_1, \omega \in OI$ și $\omega O = \omega' I$. Punctele ω și I descriu drepte paralele; atunci și O descrie o paralelă cu ele, deoarece $\frac{\omega O}{\omega I} = 1$.

8.38. Se consideră două cercuri O și O' care se intersectează în punctele A și B. O dreaptă care trece prin A întîlnește cercul O în P și cercul O' în P'; fie I intersecția mediatoarei segmentului PP' cu dreapta AB. Dreptele IP și IP' mai taie cercurile O și O' în punctele Q și Q'.

a). Să se arate că $IQ = IQ'$ și să se demonstreze că dreptele QQ' și PP' sînt paralele.

b). Dreapta QQ' mai intersectează cercul O în punctul R și cercul O' în R'. Să se arate că

$$PQ = AR = AR' = P'Q';\ Q'R = AP';\ QR' = AP.$$

c). Să se determine locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului BPP' cînd secanta PP' se rotește în jurul punctului A.

d). Să se determine și locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul BPP'.

(Facultatea de Matematică-Mecanică).

Soluție. a). Punctul I fiind pe axul radical și pe mediatoarea segmentului PP' avem:

$$IQ \cdot IP = IQ \cdot IP' \text{ și } IP = IP';\ \text{deci } IQ = IQ' \quad (1)$$

Egalitatea (1) conduce la $PQ = Q'P'$ (diferențe de segmente egale)

$$\text{Deci: } \frac{IQ}{PI} = \frac{IQ'}{Q'P'} \Rightarrow QQ' \parallel PP'. \quad (3)$$

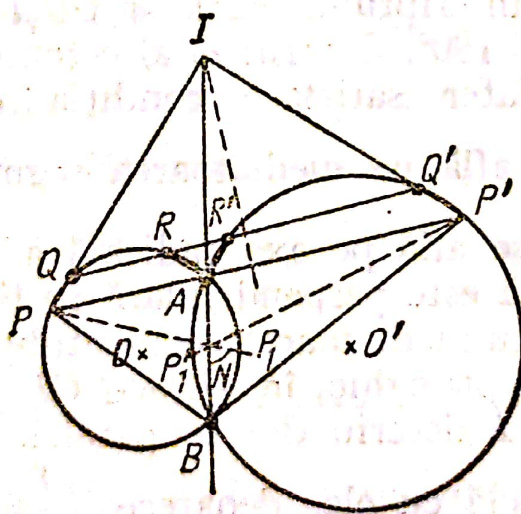


Fig. 8.38

b). Din (3) rezultă că $PQRA$ și $AR'Q'P'$ sînt trapeze isoscele și ținînd seama de (2) avem imediat: $PQ = AR = AR' = P'Q'$. (4)

Triunghiul RAR' este isoscel (4) deci $\sphericalangle ARR' = \sphericalangle AR'R$; dar $RQ' \parallel AP'$ de unde $\sphericalangle AR'R =$

$= \sphericalangle R'AP'$ și $\sphericalangle R'RA = \sphericalangle RAP$ și ținînd seama de (b), avem $\sphericalangle RAP = \sphericalangle Q'P'A$ de unde $RA \parallel Q'P'$; deci $Q'R = AP'$ (laturi opuse în paralelogram). Același raționament la patrulaterul $QR'AP$ ne conduce la $QR' = AP$.

c). Mediatoarele laturilor BP și BP' trec prin O și O', fixe (centrele cercurilor date). Unghiul mediatoarelor avînd laturile perpendiculare pe laturile unghiului PBP' este sau egal sau suplementar cu acesta. Dar $\sphericalangle PBP' = 180° - (\sphericalangle BPP' + \sphericalangle BP'P) = k$.

Deci locul geometric este format din arcele capabile de unghiul mediatoarelor, simetrice față de linia centrelor OO'.

d). Bisectoarele unghiurilor P și P' trec prin mijloacele P_1 și P'_1 ale arcelor AB din cercul O și respectiv O'. Punctele P_1 și P' fiind fixe și unghiul $P_1NP'_1$ al bisectoarelor fiind constant, $\left(\sphericalangle P_1NP'_1 = 90° + + \sphericalangle \frac{PBP'}{2}\right)$, rezultă că locul geometric este format din arcele capabile de acest unghi — simetrice față de $P_1P'_1$.

8.39. Fiind dat triunghiul oarecare ABC, fie B', C', picioarele înălțimilor duse din B și C iar B_1 și C_1 proiecțiile punctelor B și C pe dreapta $B'C'$; dacă B_a și C_a sînt proiecțiile punctelor B' și C' pe latura BC a triunghiului, să se arate că:

a). B_1C_a este paralelă cu AC și C_1B_a este paralelă cu AB;

b). C_aC_1 este paralelă cu BB' și B_aB_1 este paralelă cu CC'.

c). Punctele B_a, C_a sînt pe cercul al cărui centru este la mijlocul segmentului C_1B_1 și trece prin B_1 și C_1.

(Facultatea de Matematică-Mecanică, București).

Soluție. a). Din patrulaterul inscriptibil $C'B_1BC_a$, $\sphericalangle C'B_1B = \sphericalangle BC_aC' = 90°$, rezultă $\sphericalangle C'B_1C_a = = \sphericalangle C'BC_a$.

Din patrulaterul inscriptibil $C'BCB'$, $\sphericalangle BB'C = = \sphericalangle CC'B = 90°$ rezultă $\sphericalangle C'BC + \sphericalangle C'B'C = 180°$,

dar și $\sphericalangle C_1B'C + \sphericalangle C'B'C = 180°$, deci $\sphericalangle C'BC = \sphericalangle C_1B'C$. Rezultă $\sphericalangle C'B_1C_a = \sphericalangle C_1B'C$, deci B_1C_a și $B'C$ sînt paralele.

Analog avem: $\sphericalangle B'C_1B_a = \sphericalangle B'CB_a$ din patrulaterul inscriptibil $B'B_aCC_1$; $\sphericalangle B'CB = \sphericalangle B_1C'B$, avînd acelaşi suplement, de unde $\sphericalangle B'C_1B_a = \sphericalangle B_1C'B$, deci C_1B_a și AB sînt paralele.

b). $\sphericalangle C'C_1C = \sphericalangle C'CC_a$; $\sphericalangle C'CB = \sphericalangle C'B'B$, de unde $C'C_1C_a = \sphericalangle C'B'B$, deci C_1C_a și BB' sînt paralele.

Analog, $\sphericalangle B'B_1B_a = \sphericalangle C'BB_a$ și $\sphericalangle C'BC = \sphericalangle B'C'C$, de unde $\sphericalangle B'B_1B_a = \sphericalangle B'C'C$, deci B_aB_1 și CC' sînt paralele.

Deoarece BB' și AC sînt perpendiculare, rezultă că B_1C_a și C_aC_1 sînt perpendiculare.

Analog se mai arată că B_1B_a și B_aC_1 sînt perpendiculare și prin urmare, punctele C_a și B_a se află pe cercul cu diametrul B_1C_1.

8.40. Considerăm triunghiul ABC în care $AB = AC$. Notăm $AB = l$, $BC = 2a$. Ducem cercul tangent laturilor AB, AC în vîrfurile B și C.

a). Să se calculeze raza acestui cerc.

b). Fie O centrul cercului. Dreapta AO taie cercul în D (interior triunghiului) și în D'. Paralele din D și D' la latura BC taie latura AB în E și E'. Să se arate că

$$\frac{1}{BE} = \frac{1}{a} + \frac{1}{l}, \quad \frac{1}{BE'} = \frac{1}{a} - \frac{1}{l}.$$

c). Fie T un punct mobil pe arcul BDC al cercului. Tangenta în T taie laturile AB respectiv AC în U și V. Să se arate că

$$\sphericalangle UOV = \frac{1}{2} \sphericalangle BOC.$$

d). Să se arate că dreptele AT, BV, CU sînt concurente.

e). Notînd $BU = u$, $CV = v$, să se arate că

$$\frac{uv}{1 - u - v} = \text{const.}$$

(Facultatea Matematică, București, 1960, *N. Mihăileanu*).

Soluție. a). Fie I mijlocul bazei BC, r raza cercului. În triunghiul dreptunghic ABO, BI este înălțime, deci $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{l^2} + \frac{1}{r^2}$ de unde rezultă r.

b). Avem $DE = BE = x$ și din triunghiurile asemenea ABI, ADE,

$$\frac{x}{a} = \frac{l - x}{l} = \frac{l}{a + l}$$

de unde rezultă prima relație b) și analog a doua.

c). Avem relațiile unghiulare $BOU = UOT$, $COV = VOT$ de unde rezultă relația c).

d). Fie S intersecția dreptelor BC, UV. Punctele S, B, C fiind coliniare, polarele lor sînt concurente, deci polara punctului S trece prin A, intersecția tangentelor în B și C. Punctele S, U, V fiind coliniare, polarele lor sînt concurente; aceste polare sînt dreptele AT, BV, CU din enunț.

e). Avem relația de arii

$$(OBU) + (OCV) + (UOV) + (AUV) = (BOCA),$$

dar $(BOU) + (COV) = (OUV)$; luînd pe jumătate, avem:

$$(OBU) + (OCV) + \frac{1}{2}(AUV) = (OAB) \text{ sau}$$

$$2ur + 2vr + (l - u)(l - v) \sin A = 2lr,$$

de unde rezultă relația din enunț, constanta fiind $\frac{2r}{\sin A} - l$; dar $r = \frac{al}{\sqrt{l^2 - a^2}}$ $\sin A = \frac{2a\sqrt{l^2 - a^2}}{l^2}$

deci constanta este $\frac{a^2 l}{l^2 - a^2}$.

8.41. Fie triunghiul ABC și cercul circumscris O.

a). Să se determine pe arcul BC, care nu conține pe A, un punct A' astfel încît luînd intersecțiile A_b, A_c ale tangentei în A' la cercul O cu laturile AB, AC respectiv, triunghiul A_bA_cA să fie isoscel cu vîrful în A.

b). Se consideră, analog, punctele B' și C' și triunghiurile isoscele BB_aB_b, CC_aC_b; să se calculeze unghiurile triunghiului $A'B'C'$ în funcție de unghiurile A, B, C, ale triunghiului dat.

c). Să se calculeze, de asemenea, unghiurile triunghiului $A''B''C''$ format de intersecțiile dreptelor A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b.

d). Punctele B și C fiind fixe și A mobil pe cercul O, să se determine locul geometric al punctului A''.

(Facultatea Matematică-Mecanică, București).

Soluție. a). Avem:

$$\text{măs} \sphericalangle A_b = \text{măs} \frac{\widehat{ACA'} - \widehat{BA'}}{2} =$$

$$= \text{măs } B + \text{măs } \frac{\widehat{CA'} - \widehat{BA'}}{2};$$

$$\text{măs} \sphericalangle A_c = \text{măs } C + \text{măs } \frac{\widehat{BA'} - \widehat{CA'}}{2}.$$

Unghiurile A_b, A_c sînt egale, dacă măs $(\widehat{BA'} - \widehat{CA'}) =$ măs $(B - C)$. Notăm $\sphericalangle A'AC = \alpha$; deci măs $\widehat{CA'} = 2$ măs α, măs $\widehat{BA'} = 2$ măs $(A - \alpha)$. Atunci $\sphericalangle A'AC = \dfrac{2A - B + C}{2}$, ceea ce rezolvă punctul a).

b). Avem analog $\sphericalangle B'BA = \dfrac{2B - C + A}{4}$, $\sphericalangle C'CB = \dfrac{2C - A + B}{4}$ și $\sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle B'A'A + \sphericalangle AA'C + \sphericalangle AA'C = \sphericalangle B'BA + C - \sphericalangle C'CB = 45° + \dfrac{A}{4}$ și analog pentru celelalte unghiuri.

c). Avem: măs $\sphericalangle B''A''C''$ = măs $\sphericalangle C'A''B' = 180°$ − măs arc $\widehat{B'C'} = 180° - 2\sphericalangle B'A'C'$ deci $\sphericalangle B''A''C'' = 90° - \dfrac{A}{2}$ și analog pentru celelalte unghiuri.

d). În condițiile date, $\sphericalangle B'A''C'$ este constant, deci A'' descrie un cerc concentric.

Observație. Putem să construim punctul A' astfel: Purtăm pe latura AB segmentul $AC_1 = AC$ și ducem perpendiculara din O pe CC_1 care taie cercul în A', cu tangenta paralelă cu CC_1.

8.4.2. Se consideră un punct A' pe latura BC a unui triunghi ABC. Paralela prin A' la latura AC întîlnește latura AB în punctul C' și paralela prin A' la latura AB întîlnește latura AC în punctul B'.

a). Să se exprime aria paralelogramului $A'B'AC'$ în funcție de aria triunghiului $BA'C'$ și de aria triunghiului $CA'B'$.

b). Pentru ce poziție a punctului A' aria acestui paralelogram este maximă?

(Facultatea de Matematică-Mecanică, București, 1973).

Soluție. a). Poziția punctului A' pe latura BC este dată de raportul

$$\frac{BA'}{A'C} = k \Rightarrow \frac{BA'}{BC} = \frac{k}{k+1}; \quad \frac{A'C}{BC} = \frac{1}{k+1}; \quad k > 0$$

$$\text{aria } (A'B'AC') = \text{aria } (ABC) - \text{aria } (BA'C') - \text{aria } (CA'B') \tag{1}$$

$\triangle(BA'C') \sim \triangle(ABC) \sim \triangle(CA'B')$. Din $\triangle(BA'C') \sim \triangle(ABC)$ avem:

$$\frac{\text{aria }(ABC)}{\text{aria }(BA'C')} = \frac{BC^2}{BA'^2} = \frac{(k+1)^2}{k^2}.$$

Din $\triangle(CA'B') \sim \triangle(ABC)$,

$$\Rightarrow \frac{\text{aria }(ABC)}{\text{aria }(CA'B')} = \frac{BC^2}{A'C^2} = (k+1)^2;$$

iar din $\triangle(BA'C') \sim \triangle(CA'B') \Rightarrow \frac{\text{aria }(CA'B')}{\text{aria }(BA'C')} =$

$$= \frac{CA'^2}{BA'^2} = \frac{1}{k^2}.$$

Ținînd seama de (1) și de aceste relații putem exprima aria paralelogramului în funcție de aria $(BA'C')$ și de aria $(CA'B')$. Avem astfel:

$$\text{aria }(A'B'AC') = \frac{(k+1)^2}{k^2}\text{aria }(BA'C') -$$

$$- \text{aria }(BA'C') - \frac{1}{k^2}\text{aria }(BA'C') = \frac{2}{k}\text{aria }(BA'C'). \quad (2)$$

$$\text{aria }(A'B'AC') = (k+1)^2 \text{ aria }(CA'B') -$$
$$- k^2 \text{aria }(CA'B') - \text{aria }(CA'B') = 2k \text{ aria }(CA'B'). \quad (3)$$

Înmulțind relațiile (2) și (3) obținem:

$$\text{aria }(AB'AC') = 2\sqrt{\text{aria }(BA'C') \cdot \text{aria }(CA'B')},$$

relația cerută.

b). aria $(CA'B') = \frac{1}{(k+1)^2}$ aria (ABC) și (3) devine:

$$\text{aria }(A'B'AC') = \frac{2k}{(k+1)^2}\text{aria }(ABC).$$

De aici rezultă că maximumul ariei $(A'B'AC')$ are loc atunci cînd $\frac{2k}{(k+1)^2}$ este maxim - aria (ABC)

constantă. Avem $\frac{2k}{(k+1)^2} = \frac{2}{k + \frac{1}{k} + 2}$ care este maximă cînd $k + \frac{1}{k}$ este minim. Fiind termeni pozitivi variabili al căror produs $k + \frac{1}{k} = 1$ (constant); este minimă suma pentru $k = \frac{1}{k} \Rightarrow k = 1$, adică A' la mijlocul lui BC.

Maximumul ariei $(A'B'AC') = \frac{1}{2}$ aria (ABC).

8.43. Se consideră un triunghi ABC.

a). Să se exprime unghiul x format de înălțimea și mediana care pleacă din A cu ajutorul unghiurilor triunghiului.

b). Să se determine dreapta care trece prin A și împarte perimetrul triunghiului în două părți egale.

c). Să se arate că această dreaptă este mediană în triunghi dacă și numai dacă acesta este isoscel.

(Facultatea de Matematică-Mecanică, București).

Soluție. a). Fie AA_1 înălțimea din A și AM mediana (A_1, $M \in BC$) și $x = \sphericalangle A_1AM$. Fie $C < B$. Aplicăm în $\triangle ABM$ relația sinusurilor.

$$\frac{AM}{\sin B} = \frac{BM}{\sin(90° - B + x)} = \frac{c}{\cos x} \Rightarrow \frac{a}{2\cos(B - x)} =$$

$$= \frac{c}{\cos x} \text{ și cum } \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} \text{ avem } \frac{\sin A}{\sin C} =$$

$$= \frac{2(\cos B \cos x + \sin B \sin x)}{\cos x} = 2\cos B +$$

$$+ 2\sin B \cdot \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sin A - 2\sin C \cdot \cos B}{2\sin C \cdot \sin B}$$

și $\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$

și deci $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin B \cdot \cos C - \sin C \cdot \cos B}{2 \sin C \cdot \sin B}$ și în fine

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B}{2}.$$

Analog $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C}{2}$ dacă $B < C$.

b). Fie M punctul unde dreapta cerută intersectează pe BC. Notăm $BM = y$ și prin ipoteză $c + y = b + a - y \Rightarrow y = \dfrac{a + b - c}{2}$ și dacă notăm $a + b + c = 2p$, avem $y = p - c$.

Poziția lui M pe BC. Fie M', N, P punctele de tangență ale cercului exînscris laturii BC, respectiv pe BC și pe prelungirile laturilor AC, AB. Notăm $BM' = y'$. Avem $AP = AN$ sau $c + y' = b + a - y' \Rightarrow y' = p - c$. Deci M este punctul de tangență pe latura BC a cercului exînscris acestei laturi.

c). Ca AM să fie mediană a triunghiului ABC, trebuie ca $y = a/2$ și deci $p - c = a/2 \Rightarrow b = c$ și triunghiul ABC este isoscel. Reciproc, dacă $b = c$, atunci $y = a/2$.

8.44. Se dau două cercuri cu centrele în O și O' care se întîlnesc în două puncte A și B. Se consideră diametrul $MON \parallel O'A$ și diametrul $M'O'N' \parallel OA$ (punctele M', M, A sînt de aceeași parte a dreptei OO').

a). Să se arate că triunghiurile MOA și $M'O'A'$ sînt asemenea iar triunghiurile NOA și $N'O'A'$ sînt asemenea.

b). Să se stabilească că dreptele AM și AM' sînt confundate; AN și AN' sînt confundate.

(Facultatea matematică-fizică, București, 1956).

Soluție. a). $\sphericalangle MOA = \sphericalangle M'O'A'$ avînd laturile paralele. Deci, triunghiurile isoscele MOA și $M'O'A'$ sînt asemenea. La fel, $\sphericalangle NOA = \sphericalangle N'O'A'$ ca unghiuri opuse în paralelogramul $AOPO'$. Deci și triunghiurile isoscele NOA și $N'O'A'$ sînt asemenea.

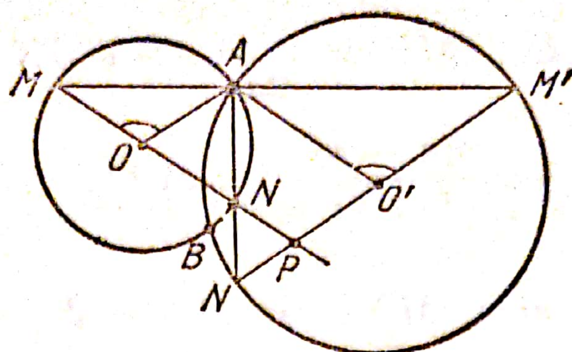


Fig. 8.44

b). Ţinînd seama de cele arătate la punctul a), avem: $\sphericalangle MAO = \sphericalangle AM'O'$. Fiind $OA \parallel M'O'$, rezultă că M, A, M' sînt coliniare.

La fel, $\sphericalangle AN'O' = \sphericalangle NAO$ şi fiind $OA \parallel N'O'$, rezultă că N', N, A sînt coliniare.

8.45. Se dă dreptunghiul $ABCD$, în care se notează $AB = a$, $AD = b$. Pe latura AB se ia segmentul $AM = x$. Paralela dusă prin M la diagonala BD taie latura AD în N; paralela prin N la diagonala AC taie latura DC în P iar paralela prin P la diagonala BD taie pe BC în Q.

Să se calculeze aria paralelogramului în funcţie de a, b, c. Să se determine x astfel ca această arie să fie 1/8 din aria dreptunghiului.

(Institutul Politehnic, Cluj, 1970).

Soluţie. Că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram, rezultă din

$$\frac{AN}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD} \text{ şi deci } AM = CP;$$

$$\text{iar } \triangle AMN = \triangle CPQ$$

şi de unde $MN = PQ$ şi deoarece $MN \parallel PQ$ patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram. Mai rezultă că şi $\triangle NDP = \triangle MBQ$. Deci

$$\text{aria } (MNPQ) = \text{aria } (ABCL) - 2\,(\text{aria } AMN + \text{aria } MBQ)$$

dar aria $(AMN) = \frac{bx^2}{2a}$, căci $AN = \frac{bx}{a}$;

aria $(MLQ) = \frac{b(a-x)^2}{2a}$, căci $MQ = \frac{b(a-x)}{a}$.

Astfel că aria $(MNPQ) = \frac{b}{a}(-2x^2 + 2ax)$.

Pentru determinarea lui x, avem ecuația:

$$-2x^2 + 2ax = \frac{1}{8}a^2 \Rightarrow 16x^2 - 16ax + a^2 = 0$$

care ne dă:

$$x_1 = \frac{2a + a\sqrt{3}}{4} \quad \text{și} \quad x_2 = \frac{2a - a\sqrt{3}}{4}.$$

Ambele corespund și cele două paralelograme corespunzătoare sînt egale, fiind simetrice în raport cu axele de simetrie ale dreptunghiului.

8.46. Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul de centru O și rază R cu unghiurile B și C egale respectiv cu $60°$ și $45°$.

a). Să se arate că mijlocul I al laturii AC, centrul O și proiecția D a lui A pe BC sînt coliniare.

b). Proiectînd pe B în E pe AC, să se arate că $DE = R$.

(Facultatea de matematică, Cluj, 1973)

Soluție. a). Avem: $\widehat{AC} = 120°$, $\widehat{AB} = 90°$, $\widehat{BC} = 150°$ și de aici rezultă $\sphericalangle BAD = 30°$ și $\sphericalangle DAC = 45° = \sphericalangle DCA$.

Deci $\triangle DAC$ este isoscel și deci $DI \perp AC$ și $OI \perp AC$. Dar într-un punct pe o dreaptă putem duce o singură perpendiculară și deci I, O, D sînt coliniare.

b). $BE = EC = \frac{BC\sqrt{2}}{2}$ și $AD = DC = \frac{AC\sqrt{2}}{2}$, deoarece $\triangle BEC$ și $\triangle ADC$ sînt triunghiuri dreptunghice isoscele.

Patrulaterul $ABDE$ este inscriptibil, deoarece $\sphericalangle AEB = \sphericalangle BDA = 90°$ și deci $\triangle DEC \sim \triangle ABC$, astfel că:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}; \text{ dar } AB = R\sqrt{2} \text{ și } EC = \frac{BC\sqrt{2}}{2}$$

și înlocuind obținem $DE = R$.

8.47. Fie sfertul de cerc OAB, mărginit de razele $OA = OB = 2$ cm și punctul M variabil pe arcul AB. Tangenta în M la arc intersectează în N tangenta în A la același arc și în P prelungirea razei OB. Se notează cu t unghiul AOM.

Să se exprime în funcție de t laturile patrulaterului $OANP$ și să se verifice că oricare ar fi t, avem $OP = NP$.

(Institutul Politehnic, Iași).

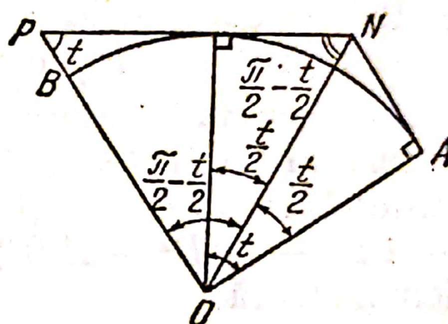


Fig. 8.47

Soluție. Ținînd seama că $NA = NM$ (tangente din N la cerc) și $\sphericalangle ONM = \sphericalangle NOP = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ rezultă:

$$ON = 2; \quad AN = 2\,\text{tg}\,\frac{t}{2}; \; PN = PM + MN =$$

$$= PM + NA = 2\,\text{ctg}\,t + 2\,\text{tg}\,\frac{t}{2}.$$

$$PN = 2\left(\text{ctg}\,t + \text{tg}\,\frac{t}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{\sin t} = OP.$$

8.48. Se dă un cerc cu diametrul AB. În A se duce tangenta la cerc și pe ea se iau două puncte M și N, de o parte și de alta a lui A. Se duce dreapta BM care taie cercul în P și dreapta BN care taie cercul în Q.

a). Să se arate că unghiurile BMA și PQB sînt egale.

b). Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

c). Să se arate că $MP \cdot MB - NQ \cdot NB = MB^2 - NB^2$.

(Institutul Politehnic, Iași, 1971)

Soluție. a). $\sphericalangle BMA$ are complement pe unghiul MBA, iar $\sphericalangle PQB$ are complement pe $\sphericalangle AQP$. Dar $\sphericalangle MBA = \sphericalangle AQP = \frac{\widehat{AP}}{2}$ și deci avînd complemente egale, $\sphericalangle BMA = \sphericalangle PQB$.

b) $\sphericalangle NQP + \sphericalangle PQB = \sphericalangle NQP + \sphericalangle NMP = 180°$ și unghiurile opuse sînt suplementare, astfel că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

c). Aplicînd puterea unui punct față de un cerc, avem: $MP \cdot MB = AM^2$, $NQ \cdot NB = AN^2$ și scăzîndu-le: $MP \cdot MB - NQ \cdot NB = AM^2 - AN^2 = MB^2 - AB^2 - (NB^2 - AB^2) = MB^2 - NB^2$ și relația este demonstrată.

8.49. Într-un cerc cu centrul O se duce un diametru fix AB. Fie C un punct variabil pe cerc.

a). Să se afle locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul ABC cînd C descrie cercul dat.

b). Bisectoarele exterioare unghiurilor A și B ale triunghiului ABC întîlnesc cercul a doua oară, respectiv în punctele M și N. Să se arate că segmentul MN are ca mărime latura pătratului înscris în cercul dat.

c). În ce poziție a punctului C, MN este paralelă cu AB? Poate fi MN perpendiculară pe AB?

(Institutul Politehnic, Iași, 1971).

Soluție. a). Fie I punctul de intersecție al bisectoarelor interioare AA', BB' (A', $B' \in$ cercului). Avem $\sphericalangle AIB = 180° - \frac{A+B}{2} = 135°$. Deci locul lui I este arcul de cerc ce trece prin A și B capabil de un unghi de 135° și dacă C este de cealaltă parte a lui AB este simetricul acelui arc față de AB.

b). Avem $\sphericalangle AIB = \frac{180° + \widehat{A'C'B'}}{2} \Rightarrow 135° =$

$= \frac{180° + \widehat{A'CB'}}{2} \Rightarrow \widehat{A'CB'} = 90°$ și deci $A'B'$ este latura pătratului înscris în cercul O, $\sphericalangle B'BN = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow B'N$ diametru și analog $A'M$ diametru, astfel că dreptunghiul $MNA'B'$ care are și diagonalele perpendiculare, căci $\sphericalangle A'OB' = 90°$ este pătrat și prin urmare MN este latura pătratului înscris în cercul dat.

c). Ca MN să fie paralelă cu AB, trebuie ca și $A'B'$ să fie paralelă cu AB, adică arc AB' = arc $BA' \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle B$ și deci triunghiul dreptunghic ACB să fie isoscel $AC = BC$, adică C să fie la intersecția perpendicularei în O pe AB cu cercul. Ca $MN \perp AB$, trebuie ca și $A'B' \perp AB$. Fie $P = AB \cap A'B'$ și trebuie ca $\sphericalangle APB' =$

$= 90°$. Dar $\sphericalangle APB' = \frac{\widehat{AB'} - \widehat{BA'}}{2} = 90° \Rightarrow \frac{\widehat{AB'}}{2} =$

$= 90° + \frac{\widehat{BA'}}{2} \Rightarrow \frac{\sphericalangle B}{2} = 90° + \frac{\sphericalangle A}{2} \Rightarrow \sphericalangle B = 180° +$ $+ \sphericalangle A$; egalitate imposibilă, astfel că MN nu poate fi perpendiculară pe AB.

8.50. Două cercuri de rază a și b ($b > a$) au centrele A, B pe dreapta (Δ) și sînt tangente exterior. Fie (Δ_1) o tangentă comună celor două cercuri, în punctele M și N. Să se determine raza unui al treilea cerc, cu centrul pe dreapta (Δ), tangent exterior cercului cu centrul în B și totodată tangent și la dreapta (Δ_1).

(Institutul Politehnic, Iași, 1973).

Soluție. Fie $C \in (\Delta)$ centrul cercului de rază x care îndeplinește condițiile cerute, iar $P \in (\Delta_1)$ punctul de tangență. Ducem prin A paralela $AN_1 = (N_1 \in BN)$ la dreapta (Δ_1) și prin B paralela BP_1 $(P_1 \in CP)$ la (Δ_1). Din $\triangle AN_1B \sim \triangle BP_1C$, avem:

$$\frac{AN_1}{BP_1} = \frac{AB}{BC} = \frac{a+b}{b+x}.$$

$$AN_1 = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2} = 2\sqrt{ab} \text{ și analog}$$
$$BP_1 = 2\sqrt{bx}$$

Astfel că x este dat de ecuația: $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{bx}} = \dfrac{a+b}{b+x} \Rightarrow$
$\Rightarrow ax^2 - (a^2 + b^2)x + ab^2 = 0$, cu soluțiile $x = a$, $x = \dfrac{b^2}{a}$.

Prima corespunde cercului de centru A, iar a doua este raza cercului căutat tangent cercului de centru B și raza b.

Observație. Segmentul x se obține construind a patra proporțională x dată $\dfrac{x}{b} = \dfrac{b}{a}$.

8.51. Tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC întîlnește latura BC în D. Se consideră o paralelă variabilă MN la AD astfel încît M este pe dreapta AB și N pe dreapta AC.

a). Să se calculeze segmentele DA, DB, DC în funcție de laturile triunghiului ABC.

b). Să se arate că patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil.

c). Să se arate că locul geometric al mijlocului segmentului MN, cînd variază paralela MN, este o dreaptă ce trece prin A.

d). Să se arate că locul geometric de la punctul precedent conține un punct E situat pe BC astfel încît $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

e). Să se dovedească egalitatea unghiurilor BAE și CAA', unde A' este mijlocul lui BC.

f). Presupunînd $\sphericalangle BAC = 90°$ și $AB < AC$ să se exprime aria suprafeței obținută prin rotirea în jurul dreptei DC a segmentului DA și a arcului de cerc AC în funcție de $AB = c$ și $AC = b$.

(Universitatea „Al. I. Cuza", Iași, iulie 1975).

Fig. 8.51

Soluție. a). Din asemănarea triunghiurilor ABD și CDA avem:

$\frac{DA}{DC}=\frac{DB}{DA}=\frac{AB}{AC}$. Notăm $AB=c$, $AC=b$, $BC=$

$$=a\cdot\frac{DA}{DB+a}=\frac{DB}{DA}=\frac{c}{b}\Rightarrow DB=\frac{c}{b}\cdot DA.\ \text{Deci:}$$

$$DA=\frac{abc}{b^2-c^2};\ DB=\frac{ac^2}{b^2-c^2};\ DC=\frac{ab^2}{b^2-c^2}.$$

b). $\sphericalangle TAC=\sphericalangle ANM=\sphericalangle ABC$. În patrulaterul $MNCD$ avem $\sphericalangle MBC=\sphericalangle MNC$ și deci patrulaterul este inscriptibil.

c). Ducem $CB'\parallel AT\parallel MN$ și notăm cu Q mijlocul lui MN care este pe mediana AP a triunghiului ACB'.

d). Ducem $BB''\parallel NM$. Triunghiurile ECP și EBL sînt asemenea.

$$\frac{EC}{EB}=\frac{PC}{BL}=\frac{2\,PC}{2\,BL}=\frac{B'C}{BB''}.$$

Dar $BB''\parallel AD$ în triunghiul ADC și $BB''\parallel B'C$ în triunghiul $AB'C$.

$$\frac{B'C}{BB''}=\frac{AC}{AB''}=\frac{DC}{DB}\ \text{deci}\ \frac{EC}{EB}=\frac{DC}{DB}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{EB}{EC}=\frac{ac^2}{b^2-c^2}:\frac{ab^2}{b^2-c^2}=\frac{c^2}{b^2}=\frac{AB^2}{AC^2}.$$

e). AA' este mediană în triunghiul ABC, iar P este mediană în triunghiul $AB'C$.

Triunghiurile ABC și $AB'C$ sînt asemenea avînd $\sphericalangle A$ comun, $\sphericalangle AB'C = \sphericalangle ACB$.

Medianele formează triunghiurile asemenea CAA' și $B'AP$, deci $\sphericalangle CAA' = \sphericalangle BAE$.

f). Dacă $\sphericalangle BAC = 90°$, atunci $b^2 = a \cdot HC$ și $a \cdot AH = bc$; $a = 2R$. Aria generată este aceea a unui con și a unei calote sferice.

$$\text{Aria } A = \pi \cdot AH \cdot DA + 2\pi R \cdot CH = \pi \cdot \frac{bc}{a} \cdot \frac{abc}{b^2 - c^2} +$$

$$+ 2\pi \frac{a}{2} \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{\pi b^4}{b^2 - c^2}.$$

8.52. Se consideră un paralelogram $ABCD$. Să se arate că:

a). Segmentul mărginit de 2 puncte situate pe laturi paralele și care trece prin punctul O de intersecție al diagonalelor, este împărțit de acesta în două părți egale.

b). Notăm $AB = a$ și fie $BC = a - 2$. Să se exprime suma pătratelor diagonalelor în funcție de a.

c). Să se determine a, astfel ca paralelogramul să devină un dreptunghi cu diagonale egale cu 10.

d). Să se afle distanțele dintre laturile paralele în funcție de a în cazul cînd un unghi obtuz al paralelogramului este dublul unui unghi ascuțit al paralelogramului.

(Institutul Pedagogic de 3 ani, Suceava).

Soluție. a). Fie MN ($M \in CD$ și $N \in AB$) segmentul cerut. Din $\triangle AON = \triangle MOC$, rezultă că $MO = ON$.

b). Se știe că suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor laturilor. Deci

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2) = 4a^2 - 8a + 8.$$

c). Din condiția $AC = BD = 10$, avem:

$$200 = 4a^2 - 8a + 8$$

sau $a^2 - 2a - 48 = 0$ rezultă $a = 8$.

d). $2\sphericalangle DAB = \sphericalangle ADC \Rightarrow 3\sphericalangle DAB = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle DAB = 60°$.

Fie DD_1 distanța de la D la AB. Avem:

$$AD_1 = \frac{AD}{2} = \frac{a-2}{2} \text{ și deci } DD_1 =$$

$$= \sqrt{(a-2)^2 - \frac{(a-2)^2}{4}} = \frac{(a-2)}{2}\sqrt{3},$$

iar DD_2, distanța de la D la BC, se obține imediat:

$$DD_2 = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

8.53. Un trapez are lungimea bazei mari a, și a bazei mici b.

a). Să se afle lungimea segmentului paralel cu bazele și care împarte trapezul în două părți avînd ariile egale.

b). Să se exprime aria trapezului, știind că înălțimea este media proporțională între cele două baze.

(Institutul Politehnic, Timișoara.

Soluție. a). Fie $MN = x$ lungimea segmentului paralel cu bazele și y, z respectiv înălțimile celor două trapeze formate. Atunci conform enunțului avem:

$$\frac{(a+x)y}{2} = \frac{(b+x)z}{2} = \frac{(a+b)h}{4} \quad (h \text{ înălțimea trapezului dat})$$

$$y + z = h.$$

Din primele două ecuații scoatem:

$$y = \frac{(a+b)h}{2(a+x)},\ z = \frac{(a+b)h}{2(b+x)} \text{ care înlocuite în ecuația treia ne dă:}$$

$$\frac{(a+b)h}{2(a+x)} + \frac{(a+b)h}{2(b+x)} = h$$

și de aici

$$2x^2 = a^2 + b^2; \quad x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$ lungimea segmentului căutat.

b). $h = \sqrt{ab}$ și deci aria $S = \dfrac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$.

8.54. Se dă un triunghi ABC. Perpendicularele duse în B și C pe laturile AB, respectiv AC, intersectează laturile AC, AB în D respectiv E.

a). Să se arate că triunghiurile ABC și ADE sînt asemenea.

b). Fie M mijlocul lui DE. Să se arate că dreptele MB și MC sînt tangente la cercul circumscris triunghiului ABC.

c). Ce condiție trebuie să îndeplinească triunghiul ABC pentru ca $DE = 2BC$?

(Institutul pedagogic, Tg. Mureș, 1973).

Soluție. a). Patrulaterul $BCDE$ este inscriptibil, deoarece $\sphericalangle EBD = \sphericalangle ECD = 90°$. Rezultă de aici că triunghiurile ABC, ADE au respectiv unghiurile egale: $\sphericalangle A$ comun, $\sphericalangle B = \sphericalangle D$ avînd același suplement, $\sphericalangle EBC$, și analog $\sphericalangle C = \sphericalangle E$. Astfel că $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Deci dreptele BC, ED sînt antiparalele în raport cu $\sphericalangle A$. Cercul de diametru ED, este circumscris patrulaterului $BCDE$.

b). Avem: $NC = MD = MB = ME$. Din triunghiul isoscel MCD rezultă $\sphericalangle MCD = \sphericalangle D = \sphericalangle B$. Considerăm unghiurile $\sphericalangle C$, $\sphericalangle BCM$, $\sphericalangle MCD$ formate în jurul lui C și de aceeași parte a dreptei AD. Avem:

$$\sphericalangle C + \sphericalangle BCM + \sphericalangle MCD = 180° \text{ sau}$$
$$\sphericalangle C + \sphericalangle BCM + \sphericalangle B = 180°.$$

Deci, $\sphericalangle BCM = \sphericalangle A$. Analog $\sphericalangle CBM = \sphericalangle A$.

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Dreapta MO este mediatoarea segmentului BC și totodată bisectoarea unghiurilor $\sphericalangle BMC$ și $\sphericalangle BOC$.

Dar din $\triangle BMC$ isoscel ($BM = MC$) rezultă $\sphericalangle BMC = 180° - 2\sphericalangle A$, și deci $\sphericalangle OMC = 90° - \sphericalangle A$. Pe de altă parte, $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle A$ și de aici $\sphericalangle MOC = \sphericalangle A$. Astfel că $\sphericalangle OMC + \sphericalangle MOC = 90°$ și $\triangle MCO$ este dreptunghic, adică $MC \perp OC$ și deci MC tangentă în C cercului circumscris $\triangle ABC$. Analog, $MB \perp OB$, adică MB tangentă în B aceluiași cerc.

c). Din $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, rezultă: $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Dacă $DE = 2BC$, avem $2 = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow$ $\Rightarrow AD = 2AB$; $AE = 2AC$. Dar $\triangle ABD$ este dreptunghic în B și cum $AD = 2AB$, rezultă că $\sphericalangle BDA = 30°$ iar $\sphericalangle A = 60°$ și analog $\sphericalangle CEA = 30°$. Deci condiția ce trebuie să satisfacă triunghiul ABC este ca $\sphericalangle A = 60°$.

8.55. Se consideră un pătrat $ABCD$ de latură a. Pe latura AB și în exteriorul lui $ABCD$ se construiește triunghiul echilateral ABM. Din A și B se duc perpendicularele respective pe DM și CM care se taie în punctul P.

a). Să se arate că patrulaterul $BMPC$ este romb.

b). Să se calculeze aria acestui romb.

(Institutul Politehnic, Timișoara).

Soluție. a). Punctul M fiind egal depărtat de punctele A și B ale pătratului este egal depărtat și de punctele C și D. Deci, perpendicularele din A și B, respectiv pe MD și MC sînt egale. Avem: $AP = BP$. Deducem că MP este paralelă cu BC (deci perpendicular pe AB). Cum diagonalele MC și BP sînt perpendiculare, iar $MB = BC = a$ rezultă că patrulaterul $BMPC$ este romb.

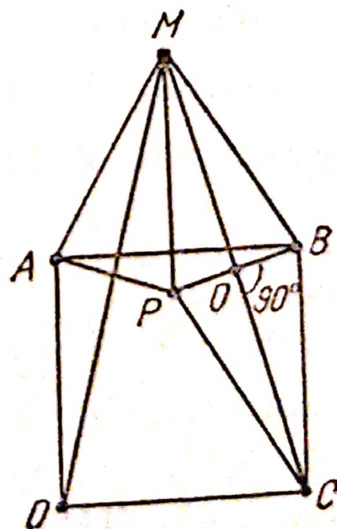


Fig. 8.55

b). Din triunghiul isoscel BMC în care avem: $MB = BC = a$ și $\sphericalangle MBC = 60° + 90° = 150°$, rezultă:

$$MC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot a\cdot \cos 150°} = a\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Din triunghiul isoscel MPB în care avem: $MB = MP = a$ şi $\sphericalangle PMB = 30°$, rezultă:

$$BP = \sqrt{a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 30°} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Aria rombului fiind egală cu jumătate din produsul diagonalelor, avem:

$$S = \frac{1}{2} \cdot MC \cdot BP = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot a\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{a^2}{2}.$$

8.56. În planul determinat de două drepte paralele Δ_1 și Δ_2 se consideră un punct fix A ce nu aparține acestor drepte. Prin A se duc două drepte oarecare d_1 și d_2. Se notează $B = \Delta_1 \cap d_1$, $Q = \Delta_1 \cap d_2$, $R_5 = \Delta_2 \cap d_1$, $C = \Delta_2 \cap d_2$.

a). Să se arate că dacă are loc una din propozițiile: lungimea BQ este constantă (1); lungimea segmentului CR este constantă (2) și aria triunghiului ABC este constantă (3), atunci au loc și celelalte două din aceste propoziții.

b). Cînd dreptele d_1 și d_2 se rotesc în jurul lui A, să se afle locul geometric al punctului $M = (BC) \cap (QR)$.

c). Să se arate că dreapta AM trece prin mijlocul segmentului BQ.

d). În ipoteza $BQ = a$ (const) să se arate că dreapta (BC) trece printr-un punct *fix*.

(Facultatea de Matematică-Mecanică, Timișoara, 1971)

Soluție. a). Fie că propoziția (1) este adevărată, atunci din $\triangle ABQ \sim \triangle ARC$ avem $\frac{RC}{BQ} = \frac{AA_2}{AA_1}$ (I); AA_2, AA_1 distanțele de la A respectiv la Δ_2, Δ_1 care prin ipoteză sînt constante și deci din (1) rezultă RC constantă adică justețea propoziției (2); aria $(ABC) =$ aria (ABQ) — aria (BCQ) sau aria $(ABC) = \frac{BQ \cdot AA_1}{2} - \frac{BQ \cdot d}{2}$ (II) d, distanța dintre cele două paralele

care prin ipoteză este constantă și (II) ne arată că și propoziția (3) este adevărată.

Analog, dacă propoziția (2) RC este constant este adevărată, atunci din (I) avem BQ constant, adică justețea lui (1), iar din (II) justețea lui (3). Tot astfel dacă propoziția (3) este adevărată din (II) rezultă BQ constant adică (1) adevărată și prin (I) urmează apoi că și (2) este adevărată. Deci (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).

b). Din (I) avem: $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{BQ}{RC}$ (a) și din $\triangle MBQ \sim$ $\sim \triangle RMC \Rightarrow \frac{BQ}{RC} = \frac{BM}{MC}$ (b) și fie $MM_1 \perp \Delta_1 (M_1 \in \Delta_1)$ și $MM_2 \perp \Delta_2$, $(M_2 \in \Delta_2)$; avem $\triangle BMM_1 \sim \triangle MM_2C$ și deci $\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{BM}{MC}$ (c).

Din (a), (b), (c) rezultă

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{AA_1}{AA_2} \quad \text{sau} \quad \frac{MM_1}{d} = \frac{AA_1}{AA_1 + AA_2} = \text{const.}$$

și deci MM_1 constant astfel că locul lui M este o paralelă la (Δ_1), (Δ_2).

c). Ducem prin M, $PS \parallel BQ$ $(P \in BR,\ S \in CQ)$. Din $\triangle BPM \sim \triangle BRC$, $\triangle QMS \sim \triangle QRC$ avem: $\frac{PM}{BC} = \frac{BM}{BC}$; $\frac{MS}{RC} = \frac{QM}{QR}$, iar din $\triangle BMQ \sim \triangle MRC \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{QM}{QR}$ de unde urmează că $PM = MS$ (proprietate cunoscută: dacă prin punctul de intersecție al diagonalelor unui trapez ducem un segment paralel la baze și mărginit de laturile neparalele, atunci punctul de intersecție al diagonalelor este mijlocul segmentului). Fie $N = AM \cap BQ$. Din $\triangle AMP \sim \triangle ABN$ și $\triangle AMS \sim \triangle ANQ$ avem:

$$\frac{PM}{BN} = \frac{AM}{AN}; \quad \frac{MS}{NQ} = \frac{AM}{AN}$$

și de aici imediat $BN = NQ$, adică N mijlocul segmentului BQ. Și tot așa $L = RC \cap AM$ este mijlocul lui RC.

d). Să ducem prin A o paralelă la Δ_1, Δ_2. Dreapta BC taie această paralelă în F. Din $\triangle BCQ \sim \triangle ACF$ avem: $\frac{AF}{BQ} = \frac{AC}{CQ} = \frac{AA_2}{CC_1}$ = const. (A_2, C_1 respectiv picioarele perpendicularelor din A și C pe Δ_2 și Δ_1). Dacă BQ este constantă, atunci rezultă că AF constant și cum A este fix, atunci și F este fix.

Observație. Am luat punctul fix A în interiorul paralelelor, evident se poate studia, analog, și cazul cînd A îl luăm între cele două paralele.

8.57. Se dă o prismă dreaptă cu baza un pătrat $ABCD$. Prin vîrful A se duce un plan α care taie suprafața laterală a prismei după un romb. Să se calculeze unghiul diedru format de planul P cu planul bazei prismei date în funcție de unghiul ascuțit x al rombului R.

(Facultatea de Matematică-Mecanică, București).

Soluție. Planul π taie muchiile din B, C, D respectiv în M, P, N astfel că $AM \perp NP$, $AN \perp MP$. Ca $AMPN$ să fie romb trebuie ca $AM = AN$. De aici rezultă că $\triangle ADN = \triangle ABM$ și deci $BM = DN$, adică $MN \perp BD$. Ducem prin M în fața ce trece prin BC, $MP' \parallel BC$ ($P' \in CP$) și din $\triangle ABM = \triangle MP'P$ rezultă $CP = 2BM$. Din acestea rezultă următoarea construcție a rombului R: luăm pe muchiile prismei ce trec prin B și D, $BM = DN$, iar pe muchia ce trece prin C, $CP = 2BM$.

Diagonalele pătratului $ABCD$ sînt perpendiculare și se taie în O, și tot așa diagonalele rombului $AMPN$ sînt perpendiculare și se taie în O', $MN \parallel BD \Rightarrow$ $\Rightarrow MN \parallel ABCD$. Deci planul π intersectează baza după dreapta (d) ce trece prin A și (d) $MN \parallel BD$. Diagonalele pătratului și rombului fiind perpendiculare între ele, rezultă că $AP \perp (d)$, $AC \perp (d)$ și deci unghiul plan corespunzător unghiului diedru $(\pi, ABCD)$ este $\sphericalangle PAC = \alpha$. Fie $x = \sphericalangle NAM$ iar $\sphericalangle O'AM = \frac{x}{2}$.

Avem $O'A = O'M \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{BD}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \Rightarrow AP = BD :$

$:\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ și $\cos\alpha = \frac{AC}{AP} = \frac{AC}{BD\operatorname{ctg}\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, căci

$AC = BD$. Deci, $\cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Altă metodă. Aplicăm formula cunoscută:

aria $(ABCD)$ = aria $(AMPN)\cdot\cos\alpha$ sau $AB^2 =$

$= \frac{AP\cdot MN}{2}\cos\alpha$ și cum $MN = BD$, $AP = BD\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$

rezultă

$$2AB^2 = BD^2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

8.58. Se consideră un triunghi ABC în care se presupun cunoscute $AB = c$, $AC = b$ și înălțimea $AD = h$ $(h < b,\ h < c)$. Se rotește triunghiul ADC în jurul lui AD pînă ce ocupă poziția ADC astfel încît $\sphericalangle CDC_1 = \alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

a). Să se calculeze BC_1 și CC_1 în funcție de b, c, h, α.

b). În ipoteza că $\alpha = \frac{\pi}{3}$ și $b = c$, să se calculeze unghiurile triunghiului BCC_1.

c). Să se calculeze distanța de la D la planul ACC_1.

(Institutul Politehnic, București, 1975).

Soluție. a). $BD = \sqrt{c^2 - h^2}$, $DC = \sqrt{b^2 - h^2} = DC_1$ și din $\triangle BDC_1$ avem:

$$BC_1^2 = BD^2 + DC_1^2 - 2BD\cdot DC_1\cos(180° - \alpha) =$$
$$= b^2 + c^2 - 2h^2 + 2\sqrt{(c^2 - h^2)(b^2 - h^2)}\cos\alpha.$$

$$BC_1 = \sqrt{b^2 + c^2 - 2h^2 + 2\sqrt{(c^2 - h^2)(b^2 - h^2)}\cdot\cos\alpha}$$

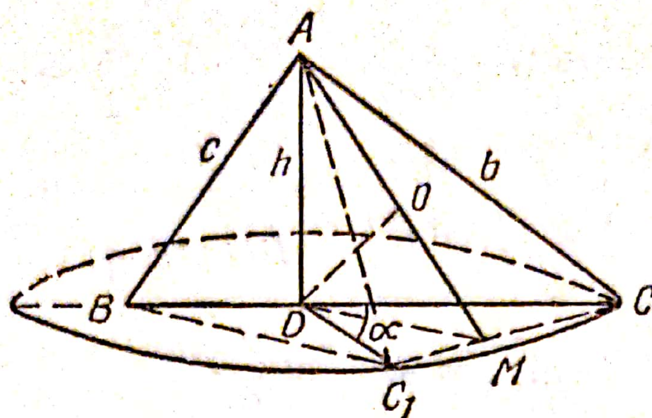


Fig. 8.58

$$CC_1^2 = 2(b^2 - h^2) - 2(b^2 - h^2)\cos\alpha = 4(b^2 - h^2)\cdot$$

$$\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\ ;\ CC_1 = 2\sqrt{b^2 - h^2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

b). $\triangle ABC$ este isoscel și deci $BD = DC = \sqrt{b^2 - h^2} = DC_1$. Cum $\alpha = 60°$ rezultă că $\triangle DCC_1$ este echilateral și deci $\sphericalangle BCC_1 = 60°$.

Din triunghiul isoscel BDC_1 cu unghiul din vîrf $\sphericalangle BDC_1 = 120°$ rezultă că $\sphericalangle CBC_1 = 30°$. Triunghiul BCC_1 este dreptunghic cu $\sphericalangle C_1 = 90°$.

c). Fie M mijlocul bazei C_1C comune triunghiurilor isoscele $\triangle DC_1C$, $\triangle AC_1C$. Avem $DM \perp C_1C$ și $AM \perp C_1C$. Perpendiculara din D pe AM, DO ($O \in AM$) este distanța de la D la planul AC_1C (reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare).

Triunghiul ADM dreptunghic în D, dă: $DO = \dfrac{AD \cdot DM}{AM}$. (1)

Din triunghiul isoscel DC_1C avem: $DM = \sqrt{(b^2 - h^2)\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{b^2 - h^2}\cos\frac{\alpha}{2}$ și din $\triangle AMD$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{h^2 + (b^2 - h^2)\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{h^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

În fine

$$DO = \frac{h\sqrt{b^2 - h^2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{h^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

8.59. O piramidă regulată triunghiulară $SABC$ are latura bazei a și fețele laterale triunghiuri dreptunghice în S.

a). Să se calculeze volumul piramidei.

b). Fie DE segmentul ce unește mijloacele a două muchii AS și BC opuse. Să se calculeze DE și unghiurile α, β pe care le face DE, respectiv cu cele două muchii.

(Institutul de Construcții, București).

Soluție. a). $AB = BC = CA = a$; $SA = SB = SC = x$ și fețele laterale dreptunghice în S, egale și isoscele. Din $\triangle ASB$ avem $2x^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Raza cercului circumscris bazei ABC (triunghi echilateral de latură a) este: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ iar înălțimea piramidei $SO = \sqrt{x^2 - OB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Aria bazei $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Deci volumul $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

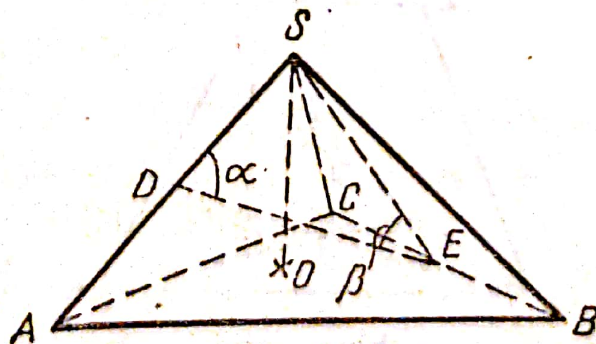


Fig. 8.59

b). Deoarece $DS \perp SC$ și $DS \perp SB$, rezultă $DS \perp (SCB)$ și cum E este mijlocul lui BC rezultă că $SE \subset (SCB)$ și astfel $DS \perp SE$. Așa fiind avem: $DE^2 = DS^2 + SE^2$. Dar din $\triangle CSB(\sphericalangle S = 90°)$, $SE = \frac{a}{2}$ și $DS = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ și deci $DE^2 = \frac{3a^2}{8}$; $DE = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ $\text{tg}\,\alpha = \frac{SE}{DS} = \sqrt{2}$ și $BC \perp DS$; $BC \perp DE$, $\beta = 90°$.

8.60. O tablă în formă de hexagon regulat $ABCDEF$ are latura de 10 cm. Se unesc prin drepte mijloacele L, M, N ale laturilor AB, CD, EF apoi se îndoaie tabla după laturile triunghiului LMN, astfel încît LA, CM, EN să coincidă respectiv cu LV, MD, NF obținîndu-se o cutie în formă de trunchi de piramidă. Se cere volumul acestei cutii.

(Institutul de Arhitectură, București, 1975).

Soluție. Trunchiul de piramidă obținut este regulat, cu bazele triunghiurile echilaterale LMN: $LM = MN = NI = 15$ cm baza mare, iar $L'M'N'$; $L'M' = M'N' = N'L' = 10$ cm baza mică, iar muchiile laterale $LL' = MM' = NN' = 5$ cm. Fețele laterale trapeze isoscele egale cu unghiurile de baze mari de cîte 60°.

Volumul cutiei. Aplicăm formula: $V = \frac{y}{3}(S + s + \sqrt{Ss})$. (1)

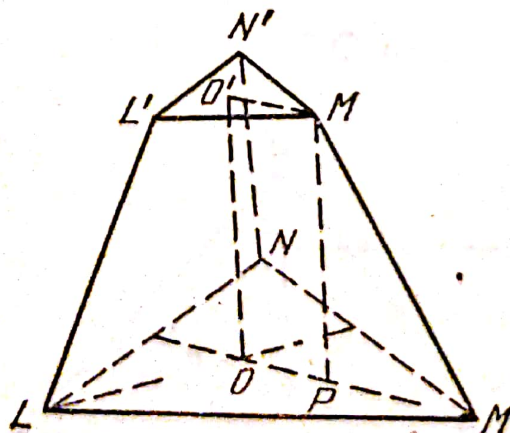


Fig. 8.60

Fie O, O' centrele bazelor, atunci $OO' = I$ (înălțimea trunchiului). Razele bazelor: $OM = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$, $O'M' = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. În planul $OMM'O'$ ducem prin M' paralela la OO', care taie pe OM în P. Din triunghiul dreptunghic în P, MPP', avem: $M'P^2 = OO'^2 = I^2 = \sqrt{25 - PM^2}$. Dar $PM = OM - OP = 5\sqrt{3} - \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ și deci

$$I = \sqrt{25 - \frac{75}{9}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}.$$

Apoi $S = \frac{225\sqrt{3}}{4}$, $s = \frac{100\sqrt{3}}{4}$ și înlocuind în (1) obținem:

$$V = \frac{5\sqrt{6}}{9}\left(\frac{225\sqrt{3}}{4} + \frac{100\sqrt{3}}{4} + \frac{150\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{5\sqrt{18}}{9}\cdot\frac{475}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{475}{4} = \frac{2375\sqrt{2}}{12}\ \text{cm}^3.$$

8.61. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată avînd latura bazei „a" iar muchia laterală „b". Prin mijloacele muchiilor AB și BC se duce un plan paralel cu muchia VB. Se cere:

a). natura secțiunii și lungimile diagonalelor secțiunii;

b). aria secțiunii;

c). volumul piramidei.

(Institutul de Mine din Petroșani, 1975).

Soluție. a). Fie M și N respectiv mijloacele muchiilor AB și BC. Planul dus prin MN și paralel cu muchia VB taie fața VBC după o paralelă la VB, adică după linia mijlocie NP (P la mijlocul lui VC) și analog taie fața AVB după linia mijlocie MQ

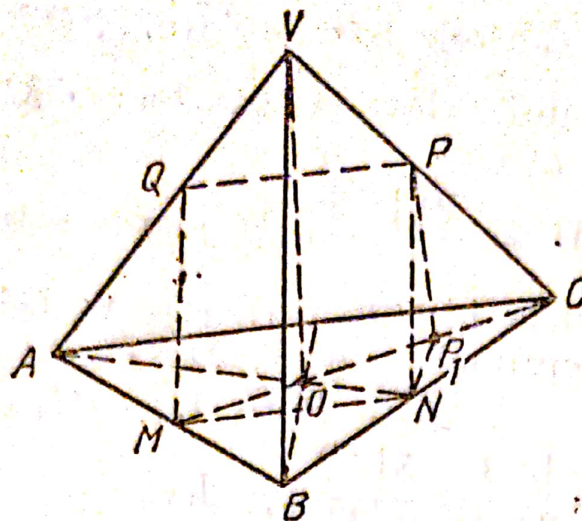


Fig. 8.61

(Q mijlocul lui VA), iar fața VAC după QP. Deci secțiunea este paralelogramul $MNPQ$.

Natura secțiunii. ABC fiind triunghi echilateral, $AN \cap CM = O$ este centrul triunghiului ($AN \perp BC$, $CM \perp AB$), și piramida $VABC$ fiind regulată $VA = VB = VC = b$, rezultă $VO \perp ABC$ înălțimea piramidei. În triunghiul VOC perpendiculara $PP_1 \perp OC (P_1 \in OC)$ fiind paralelă cu VO este perpendiculară pe planul ABC și P_1 la mijlocul lui OC. Dar $BO \perp MN$ și $NP_1 \| BO$, rezultă că $P_1N \perp MN$ și după teorema celor trei perpendiculare mai rezultă că $PN \perp MN$. Astfel că secțiunea $MNPQ$ este dreptunghi de dimensiuni $MN = \frac{a}{2}$ și $NP = \frac{b}{2}$. Diagonalele dreptunghiului sînt egale și $MP = NQ = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

b). Aria secțiunii $= \frac{ab}{4}$.

c). Volumul piramidei. Aria bazei $(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, iar înălțimea piramidei rezultă din triunghiul dreptunghic VOC, $VO = \sqrt{b^2 - OC^2}$, OC fiind raza cer-

cului circumscris triunghiului echilateral ABC de latură a, este dată de $OC = \frac{a}{\sqrt{3}}$ și astfel $VO =$ $= \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}}$. Deci volumul piramidei este

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}} = \frac{a^2}{12} \cdot \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Cantitatea de sub radical este pozitivă, căci $3b^2 -$ $- a^2 = (b\sqrt{3} + a)(b\sqrt{3} - a)$. Factorul întîi pozitiv, al doilea de asemenea, căci $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$ este raza cercului circumscris bazei și muchia b ca să existe piramida regulată, trebuie ca $b > \frac{a}{\sqrt{3}}$.

8.62. Se dă o piramidă regulată patrulateră $SABCD$ cu muchia la bază avînd lungimea a și muchia laterală avînd lungimea b. Pe dreapta CD se ia un punct M astfel ca $MD = 2DC$, $MC = 3DC$. Prin M, B și mijlocul muchiei laterale SC, se duce planul determinat de aceste 3 puncte.

Se cere:

a). Lungimile laturilor poligonului de secțiune în piramidă cu acest plan.

b). Raportul în care planul de secțiune împarte volumul piramidei.

(Institutul Politehnic „Tr. Vuia", Timișoara 1973).

Soluție. a). Fie N mijlocul lui SC. Planul MBN intersectează fața SBC după segmentul BN. Fie $P =$ $= MN \cap SD$, astfel că fața SCD este intersectată după NP; $Q = MB \cap AD$ și deci baza este intersectată după QB și fața SAD după PQ. Fața SAB este intersectată după un segment ce trece prin B și în afara piramidei. Deci piramida este intersectată după patrulaterul $QBNP$.

Lungimile laturilor poligonului de secțiune. Din $\triangle AQB \sim \triangle MQD$ avem: $\frac{AQ}{QS} = \frac{AB}{MD} = \frac{1}{2} \Rightarrow AQ = \frac{a}{3}$, $BQ = \frac{a}{3}\sqrt{10}$. NB este mediană în $\triangle SBC$, astfel că:

$$BN^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - b^2}{4} \Rightarrow BN = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + b^2}.$$

Fie O centrul bazei $ABCD$, S_1 mijlocul lui DC și $NN_1 \perp DC_1$, $(N_1 \in DC)$. Avem: $NN_1 = \frac{SS_1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$ (piramida există dacă există

$$SO = \sqrt{b^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 2a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2b^2 - a^2}$$

adică $2b^2 - a^2 > 0 \Rightarrow a < b\sqrt{2}$ și în acest caz evident $4b^2 - a^2 > 0$).

$MN_1 = 2a + a/2 + a/4 = 11 \cdot a/4$. Din triunghiul dreptunghic MN_1N avem:

$$MN = \sqrt{\frac{30a^2 + b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{30a^2 + b^2}.$$

În triunghiul MNS_1, $DP \parallel NS_1$ și deci

$\frac{MN}{PN} = \frac{MS_1}{DS_1} = 5$ și de unde $PN = \frac{1}{10}\sqrt{30a^2 + b^2}$.

Din $\triangle MDP \sim \triangle MNS_1$ rezultă $\frac{DP}{S_1N} = \frac{MD}{MS_1} = \frac{4}{5} \Rightarrow DP = \frac{4}{5} \cdot \frac{b}{2} = \frac{2b}{5}$, iar $DQ = a - AQ = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$.

Determinarea lui PQ. În triunghiul isoscel SAD, $(SA = SD = b)$ avem:

$$PQ^2 = QS^2 + DP^2 - 2QD \cdot DP \cos D = \frac{4a^2}{9} + \frac{4b^2}{25} -$$

$$- \frac{8ab}{15} \cdot \frac{a}{2b} = \frac{4}{225}(10a^2 + 9b^2)$$

$$\text{sau } PQ = \frac{2}{15}\sqrt{10a^2 + 9b^2}.$$

b). Fie V, V_1, V_2 respectiv volumul piramidei, volumul din piramidă sub planul de secțiune și deasupra lui. Avem $V = \frac{1}{3}a^2OS$, V_1 este diferența volumelor piramidelor triunghiulare cu vîrful în M și bazele respectiv triunghiurile BCN, DPQ:

$$V_1 = \text{vol }(MBCN) - \text{vol }(MDPQ) = \text{vol }(NMBC) -$$
$$- \text{vol }(MPQD) = \frac{1}{3}\text{ aria }(MBC) \cdot \frac{SO}{2} - \frac{1}{3}\text{ aria }(MQD) \cdot$$
$$\cdot PP_1. \qquad (1)$$

Dar aria $(MBC) = \frac{3a^2}{2}$; aria $(MQD) = \frac{MD^2 - DQ^2}{2} =$
$= \frac{2a^2}{3}$; $PP_1 \parallel SO$, $(P_1 \in OD)$ astfel că din $\triangle DPP_1 \sim$
$\sim \triangle DOS \Rightarrow \frac{PP_1}{OS} = \frac{DP}{DS} = \frac{2}{5}$ și deci $PP_1 = \frac{2OS}{5}$.

Înlocuind în (1) se obține:

$V_1 = \frac{29a^2 \cdot OS}{180}$, iar $V_2 = V - V_1 = \frac{31a^2 \cdot OS}{180}$ și deci raportul

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{29}{31}.$$

8.63. Un trapez cu baza mare l și avînd unul din unghiurile formate de baza mare cu laturile nepara-

lele egal cu α, este baza unei piramide P. Presupunem că unghiul diedru al piramidei care are drept muchie baza mare a trapezului este drept. De asemenea, presupunem că fiecare din muchiile laterale ale piramidei face cu baza acesteia un unghi egal cu β. Să se calculeze volumul piramidei P în funcție de l, α, β.

(Facultatea de Matematică-Mecanică, București)

Soluție. Fie $ABCD$ trapezul, $AB = l$ și V vîrful piramidei P. Ținînd seama de ipoteza unghiului diedru drept, rezultă că înălțimea piramidei este $VV_1 \perp AB$; $(V_1 \in AB)$. Apoi ipoteza asupra muchiilor laterale ne dă: $AV_1 = VV_1 \cdot \text{ctg}\, \beta$, $V_1B = VV_1 \cdot \text{ctg}\, \beta$ și deci $AV_1 + V_1B = 2\, VV_1\, \text{ctg}\, \beta \Rightarrow VV_1 = \dfrac{l\, \text{tg}\, \beta}{2}$ și V_1 este mijlocul lui AB. Din triunghiurile dreptunghice: VV_1C, VV_1D avem: $V_1C = VV_1 \cdot \text{ctg}\, \beta$, $V_1D = VV_1 \cdot \text{ctg}\, \beta$; $\Rightarrow$ $\Rightarrow V_1C = V_1D = \dfrac{l}{2}$ rezultă apoi că V_1 este centrul cercului circumscris trapezului $ABCD$ care este astfel isoscel. Fie triunghiul ABD, care este dreptunghic în D și DD_1 înălțimea trapezului. Avem $BD = l \sin \alpha$; $DD_1 = BD \cos \alpha = l \sin \alpha \cos \alpha$. Deci $AD_1 = DD_1\, \text{ctg}\, \alpha = l \cos^2 \alpha$ și baza mică a trapezului $CD = l - 2AD_1 = l - 2l \cos^2 \alpha$.

Volumul V al piramidei

$$V = \frac{\text{aria}\,(ABCD) \cdot VV_1}{3}. \tag{1}$$

Dar $\text{aria}\,(ABCD) = \dfrac{(l + l - 2\, l \cos^2 \alpha) l \sin \alpha \cos \alpha}{2} = l^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha$ și deci

$$V = \frac{l^3 \sin^3 \alpha \cos \alpha\, \text{tg}\, \beta}{6}.$$

8.64. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei a și fețele laterale triunghiuri dreptunghice.



a). Să se calculeze volumul piramidei.

b). Fie DE segmentul ce unește mijloacele a două muchii opuse. Să se calculeze DE și unghiurile α, β pe care DE le face respectiv cu cele două muchii.

(Institutul de Construcții, București, 1975)

Soluție. a). Fie S vîrful piramidei fața laterală SBC triunghi dreptunghic isoscel. $SB = a/\sqrt{2}$, aria $SBC = a^2/4$ și $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. Deoarece $AS \perp SB$ și $AS \perp SC \Rightarrow AS \perp \text{pl}\,(SBC)$.

b). $AS \perp \text{pl}\,(SBC) \Rightarrow AS \perp SD$; $SD = BD = a/2$.

Deci $DE = \sqrt{SE^2 + SD^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

$$\sin\beta = \frac{SD}{DE} = \frac{a}{2}\cdot\frac{4}{a\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}};\ \beta = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Din $AS \perp \text{pl}\,(SBC) \Rightarrow AS \perp BC$ și cum $SD \perp BC$ rezultă $BC \perp \text{pl}\,(ESD)$ deci $BC \perp ED$ și $\alpha = 90°$.

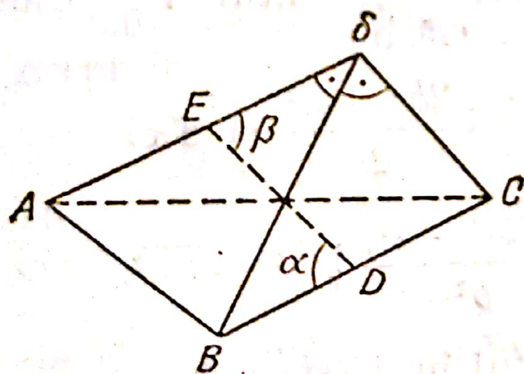


Fig. 8.64

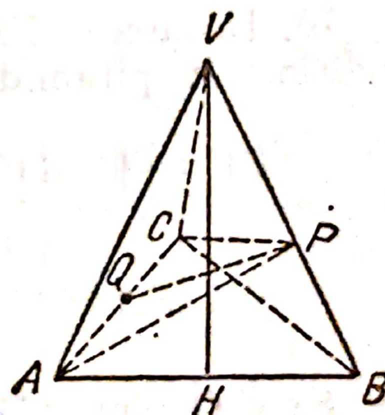


Fig. 8.65

8.65. Se consideră piramida regulată $VABC$ avînd $AB = BC = CA = a$ și $VA = VB = VC = b$ $(b > a)$. Se notează cu P proiecția vîrfului A pe muchia VB. Să se calculeze:

a). Aria triunghiului PAC.

b). Volumul tetraedrului $PAVC$.

(Institutul Politehnic, București, 1974).

Soluție. a). Triunghiurile isoscele VAB și VBC sînt egale. De aceea $CP \perp BV$; $CP = AP$. Rezultă că muchia VB este perpendiculară pe planul APC. Fie VH înălțimea triunghiului VAB. Găsim:

$$VH = \sqrt{VA^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Scriind aria triunghiului VAB în două moduri diferite deducem

$$AP = \frac{AB \cdot VH}{VB} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Fie PQ înălțimea triunghiului isoscel PAC. Obținem

$$PQ = \sqrt{AP^2 - AQ^2} = \frac{a}{2b}\sqrt{3b^2 - a^2}$$

și deci

$$\text{Aria }(PAC) = \frac{1}{2} AC \cdot PQ = \frac{a^2}{4b}\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

b). Deoarece $VB \perp (APC)$, segmentul VP este înălțime în piramida $PAVC$. Găsim

$$PV = \sqrt{AV^2 - AP^2} = \frac{2b^2 - a^2}{2b} \text{ și deci}$$

$$\text{Vol }(PAVC) = \frac{1}{24}\,\frac{a^2(2b^2 - a^2)}{b^2}\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

8.66. O piramidă are vîrful în V și ca bază rombul $ABCD$. Știind că diagonalele bazei sînt de 8 cm și 6 cm și că se întîlnesc în punctul O, iar înălțimea piramidei este $VO = 4$ cm, să se calculeze:

a). Volumul piramidei.

b). Lungimile muchiilor.

c). A și C fiind capetele diagonalei mari ale bazei să se arate că dreptele AV și CV sînt perpendiculare între ele.

(Institutul Politehnic, București).

Soluție. a). $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot VO = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot 4 =$
$= 32 \text{ cm}^2$.

b). Din triunghiul dreptunghic VOC deducem:

$VC = \sqrt{VO^2 + OC^2} = \sqrt{32} =$
$= 4\sqrt{2}$.

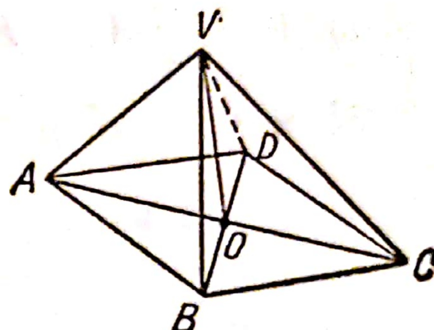


Fig. 8.66

La fel din triunghiul dreptunghic VOB deducem:

$VB = \sqrt{OV^2 + OB^2} =$
$= \sqrt{25} = 5$ cm.

Deci, $AV = VC = 4\sqrt{2}$ cm și $VB = VD = 5$ cm.

c). Avînd în vedere că laturile VO și OC sînt egale ($VO = OC = 4$ cm) și cum unghiul VOC este drept, urmează că $\sphericalangle OVC = \sphericalangle VCO = 45°$.

La fel, $\sphericalangle OAV = \sphericalangle AVO = 45°$. Deci: $\sphericalangle AVO + \sphericalangle CVO = 45° + 45° = 90°$, adică AV și CV sînt perpendiculare între ele.

8.67. Se dă triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul drept în C.

a). Să se demonstreze că suma catetelor $AC + BC$ este egală cu $2R + 2r$ unde R este raza cercului circumscris iar r este raza cercului înscris triunghiului ABC.

b). Să se calculeze aria triunghiului ABC în funcție de R, r și volumul născut prin rotația triunghiului ABC în jurul lui $BC = K$ în funcție de R, r, K.

(Institutul Pedagogic din Oradea, 1975)

Soluție. a). Fie triunghiul dreptunghic CAB ($C = 90°$), I centrul cercului înscris în acest triunghi și $M \in AC$, $N \in BC$, $P \in AB$ punctele de tangență. De pe figură rezultă: $AC = AM + r$, $BC = BN + r \Rightarrow$

$$AC + BC = AM + BN + 2r = AP + BP + 2r = AB + 2r = 2R + 2r.$$

b). Aria (CAB) = aria (CIA) + aria (AIB) + + aria $(BIC) = \frac{r}{2}(AC + BC + AB) = \frac{r}{2}(2R + 2r + 2R) = r(2R + r)$.

c). $V = \frac{\pi}{3} AC^2 \cdot K$ și din suma catetelor $AC = 2R + 2r - K$ și deci

$$V = \frac{\pi}{3} K (2R + 2r - K)^2.$$

8.68. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ de laturi $AB = 6$ m și $BC = 8$ m.

a). Să se calculeze distanțele BE și MN de la punctul B și de la mijlocul M al laturii BC, la diagonala AC, precum și distanțele AE și EN.

b). Presupunînd că trapezul isoscel $ABGC$ se rotește în jurul bazei mari AC, să se calculeze aria totală a corpului născut prin această rotație.

c). Să se calculeze volumul aceluiași corp.

(Institutul Politehnic, București, 1975).

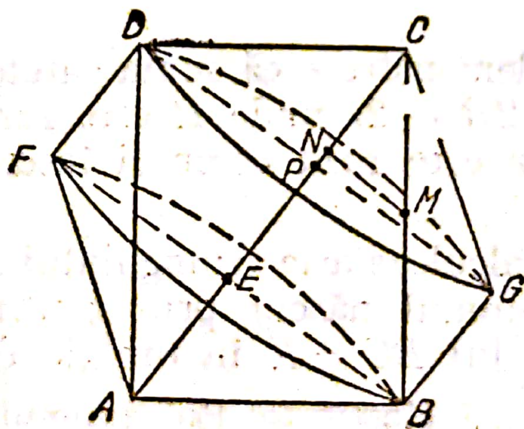


Fig. 8.68

Soluție. a). BE este înălțime în triunghiul dreptunghic ABC și avem $BE = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8$ m; $MN = \frac{BE}{2} = 2{,}4$ m — linie mijlocie în triunghiul BEC. Segmen-

tul AE îl obținem din $AB' = AC \cdot AE \Rightarrow AE = \frac{36}{10} =$ $= 3{,}6$ și $EN = \frac{1}{2} EC = \frac{1}{2}(10 - 3{,}6) = 3{,}2$ m.

b). $DP = BE = 4{,}8$ m (DP perpendiculara din D pe AC). Prin rotație se formează două conuri egale $(ABF) = (CDG)$ cu vîrfurile respectiv în A și C și cilindrul $FBGD$. Deci aria totală a corpului, $A_{tc} \cdot$ $\cdot 2$ aria lat (ABF) + aria $(FBGD)$.

$$A_{tc} = 2\pi\, BE \cdot AB + 2\pi \cdot BE \cdot EP = 2\pi\, 4{,}8 \cdot 6 + \\ + 2\pi \cdot 4{,}8 \cdot EP = 9{,}6\pi(6 + EP).$$

dar $EP = EC - CP = 6{,}4 - 3{,}2 = 2{,}8$.

$$A_{tc} = 9{,}6\pi(8{,}8) = 84{,}48\pi \text{ m}^2.$$

c). $V_c = 2 \text{ vol } (ABF) + \text{vol } (EBGD) = \frac{2\pi\, BE^2}{3} \cdot$ $\cdot AE + \pi\, BE^2 \cdot EP = \frac{2\pi}{3} BE^2(AE + 3\, EP) = \frac{2\pi}{3} \cdot$ $\cdot 23{,}04 \cdot 3{,}6 + \pi \cdot 23{,}04 \cdot 2{,}8 = 55{,}296\,\pi \text{ m}^3 + 64{,}512\,\pi \text{ m}^3 =$

$$= 119{,}808\pi \text{ m}^3.$$

8.69. În triunghiul ABC, cunoaștem $BC = 4$; $AH = \sqrt{3}$, $\sphericalangle B = 30°$, unde AH este înălțimea care pleacă din vîrful A. Se duce paralela DE la BC care este situată la o distanță x față de BC. Punctul D se află pe AB și $E \in AC$.

a). Să se calculeze în funcție de x lungimea segmentelor BD, DE și EC.

b). Să se determine x astfel ca aria corpului rezultat prin rotația trapezului $BDEC$ în jurul lui BC să fie egală cu $3\pi(\sqrt{3} + 1)$.

c). Să se calculeze volumul V al corpului de rotație obținut în condițiile punctului precedent.

d). Să se exprime raportul dintre acest volum V de rotație și volumul V_1 al corpului de rotație obținut prin rotația aceluiași trapez în jurul laturii DE.

(Institutul de Arhitectură, București, 1975).

Soluție. a). $BD=2x$, $\frac{DE}{4}=\frac{\sqrt{3}-x}{3}=\frac{3-x\sqrt{3}}{3}$;

$DE=\frac{4(3-x\sqrt{3})}{3}$; $AB=2\sqrt{3}\cdot\frac{EC}{AC}=\frac{x}{AH}=$ $=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $BC=\frac{AC\cdot x}{\sqrt{3}}$; $BH=\sqrt{12-3}=3$; $HC=$ $=1$; $AC=\sqrt{3+1}=2$ și deci $EC=\frac{2x}{3}=\frac{2\sqrt{3}x}{3}$.

b). Aria corpului este formată din ariile laterale ale conurilor cu vîrfurile în B și C și de generatoare respectiv ED, EC la care trebuie adăugată aria laterală a cilindrului generat de DE.

$$\text{Aria corpului}=\pi xBD+2\pi x\cdot\frac{4(3-x\sqrt{3})}{3}+$$
$$+\pi x\cdot EC=2\pi x^2+\frac{8(3x-x^2\sqrt{3})}{3}+$$
$$+\frac{2\pi\sqrt{3x^2}}{3}=2\pi(1-\sqrt{3})x^2+8\pi x.$$

Deci, x este dat de ecuația $2\pi(1-\sqrt{3})x^2+8\pi x=$ $=3\pi(\sqrt{3}+1)$ sau $2(\sqrt{3}-1)x^2-8x+3(\sqrt{3}+$ $+1)=0$ cu soluția $0<x<\sqrt{3}$.

$$x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

c). $V=\frac{\pi x^2}{3}\cdot BD_1+\pi x^2\cdot\frac{4(3-x\sqrt{3})}{3}+\frac{\pi x^2}{3}\cdot BE_1$,

unde $BD_1=x\sqrt{3}$ și $E_1C=\frac{x\sqrt{3}}{3}$ și înlocuind obținem:

$V=\frac{36\pi x^2-8\pi\sqrt{3}x^3}{9}=\frac{4\pi}{9}(9-2\sqrt{3}x)x^2$ și, în fine,

pentru $x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, obținem: $V=\frac{2\pi}{9}(9+4\sqrt{3})$.

PROBLEME RECAPITULATIVE

9.1. Prin punctul de intersecţie al medianelor unui triunghi se duce o dreaptă oarecare. Să se arate că suma distanţelor a celor două vîrfuri situate de aceeaşi parte a dreptei este egală cu distanţa vîrfului al treilea la aceeaşi dreaptă.

9.2.. Să se arate că dacă un patrulater este circumscris unui cerc, atunci suma a două laturi opuse este egală cu suma celorlalte două laturi şi reciproc.

9.3. Fie două drepte dintr-un plan care nu se intersectează în cadrul hîrtiei pe care desenăm şi un punct M. Să se traseze prin acest punct o dreaptă care să treacă şi prin vîrful inaccesibil al celor două drepte.

9.4. Într-un cerc se duc două raze. Să se ducă o coardă astfel încît această coardă să fie împărţită în trei părţi egale de către cele două raze.

9.5. Care este cel mai mare număr de unghiuri ascuţite pe care îl poate avea un poligon convex cu n laturi?

9.6. Pe o dreaptă se iau în ordine punctele C_1, A, C_2, M, C_3, B, C_4 unde M este mijlocul segmentului AB. Să se arate că:

$$2C_1M = C_1A + C_1B; \quad 2C_2M = C_2B - AC_2;$$
$$2MC_3 = AC_3 - C_3B; \quad 2MC_4 = AC_4 = AC_4 + BC_4.$$

(R.M.F., E: 274, 1952, *C. Ionescu-Ţiu*).

9.7. Să se arate că înălţimile unui triunghi ABC sînt bisectoarele triunghiului ortic (format de picioarele înălţimilor).

9.8. Să se arate că simetricele ortocentrului faţă de laturile unui triunghi sînt pe cercul circumscris triunghiului.

9.9. Bisectoarele unghiurilor unui patrulater oarecare formează un patrulater inscriptibil, excepție făcînd pătratul cînd bisectoarele sînt concurente.

9.10. Prin două puncte date ale unei circumferințe să se ducă două coarde paralele între ele, astfel încît suma lor să fie egală cu un segment dat. Discuție.

9.11. Fie un triunghi oarecare ABC și punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ astfel încît $AB_1 = 2B_1C$; $CA_1 = 2A_1B$ și $BC_1 = 2C_1A$. Să se arate că aria $ABC = 7$ aria triunghiului format de intersecția segmentelor AA_1, BB_1CC_1.

9.12. a). Să se arate cum se poate construi cu rigla și compasul un triunghi ABC știind că latura $BC = 10$ cm, aria triunghiului ABC este $S = 45$ cm² iar mediana $AD = 11$ cm.

b). Să se calculeze $(AB + AC)(AB - AC)$.

(G.M.B., E: 4505, *C. Ionescu-Țiu*).

9.13. Să se arate că dacă prin punctul M de pe diagonala paralelogramului $ABCD$ ducem paralelele NP, QR, la laturi, $N \in AB$, $P \in CD$, $Q \in BC$, $R \in AD$, atunci paralelogramele $MNBQ$, $MRDP$ sînt echivalente.

9.14. Să se arate că laturile neparalele și diagonalele unui trapez determină pe o paralelă la baze trei segmente consecutive, dintre care cele extreme sînt egale.

9.15. a). A și B fiind două puncte de aceeași parte a unui plan P, să se găsească în planul P un punct astfel ca suma $MA + MB$ să fie minimă.

b). Să se afle un punct N din planul P astfel încît diferența $MA - MB$ să fie maximă? Dar minimă?

9.16. Să se construiască o dreaptă paralelă cu o dreaptă dată și care să determine în două cercuri date coarde egale.

9.17. Să se construiască cu rigla și compasul un triunghi dreptunghic cunoscînd mediana și înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.

9.18. Într-un cerc ducem diametrul AB. Pe cerc de o parte și de alta a diametrului AB se iau punctele C și D. Tangenta dusă în C la cerc taie tangentele duse în A și B respectiv în punctele M și N; iar tangenta dusă în D la cerc taie tangentele din A și B respectiv în punctele M și N; iar tangenta dusă în D la cerc taie tangentele din A și B respectiv în punctele P și R. Să se arate că $CN : CM = DP \cdot DR$ și

$$\frac{AM}{AP} = \frac{BR}{BN}.$$

(G.M.B., E: 4553, *C.I.Ț.*).

9.19. Să se construiască un triunghi căruia îi cunoaștem unghiurile și perimetrul său.

9.20. Să se construiască un triunghi cunoscînd o latură, unghiul opus și înălțimea corespunzătoare laturii date.

9.21. Într-un triunghi, să se înscrie un dreptunghi asemenea cu un dreptunghi dat.

9.22. Fiind date 3 segmente de lungimi a, b, c să se construiască grafic segmentele x și y știind că

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}.$$

9.23. Se dau triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ astfel că $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ sau $\sphericalangle A = 180° - A_1$. Să se arate că:

$$\frac{\text{aria } ABC}{\text{aria } A_1B_1C_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

9.24. Un triunghi isoscel ABC are $\sphericalangle A = 10°$, $AB = AC$. Cercul cu centrul în B și de rază BC taie latura AC în D și latura AB în E. Să se arate că $DE = \sqrt{2(1 - \sin 15°)} \cdot BC$.

(G.M.B., E: 4521, *C.I.Ț.*).

9.25. Pe bisectoarea unui unghi drept xOy se ia un punct fix A. O dreaptă oarecare ce trece prin A, intersectează pe Ox și Oy respectiv în M și N.



Să se arate că

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{k},$$

unde k este o constantă.

9.26. Printr-un punct O situat pe diagonala BD a unui paralelogram $ABCD$ ducem o dreaptă care taie laturile AB, AD respectiv în F și G, iar celelalte două laturi le taie în F_1 și G_1. Să se arate că $OF \cdot OG = OF_1 \cdot OG_1$.

9.27. Cercul înscris în triunghiul ABC de laturi a, b, c și semiperimetru p atinge laturile în D, E, F.

Să se arate că $AE = AF = p - a$, $BD = BF = p - b$; $CA = CD = p - c$.

9.28. Să se construiască două segmente de dreaptă cunoscînd diferența lor și produsul lor.

9.29. Să se arate că raportul dintre aria unui triunghi ascuțitunghic ABC și aria triunghiului său ortic este $1 : 2 \cos A \cos B \cos C$.

9.30. Pe un cerc fix se iau punctele mobile ABC. Știind că suma razelor cercurilor exînscrise triunghiului ABC este constantă să se găsească locul geometric al centrului cercului înscris.

9.31. Fie un triunghi oarecare ABC, D mijlocul laturii BC, E intersecția medianelor triunghiului ABC și F un punct din plan. Prelungim segmentul DF cu $FH = DF$ și fie I intersecția dreptelor AH și EF.

Să se arate că: a). $AH = HI$ și $EI = 4EF$.

b). Mijloacele segmentelor AB, HD și CI sînt coliniare.

(G.M., 15623, *C. Ionescu-Țiu*).

9.32. Să se arate că lungimea tangentei exterioare comune a două cercuri tangente exterior este dublul mediei geometrice a razelor celor două cercuri.

9.33. Să se arate că într-un triunghi, mijloacele laturilor, picioarele înălțimilor și mijloacele distanțelor dintre vîrfuri și ortocentru sînt nouă puncte situate pe un cerc *(cercul lui Euler)*.

9.34. Să se arate că proiecțiile unui punct M de pe cercul circumscris unui triunghi ABC pe laturile triunghiului situate pe o dreaptă. *(Dreapta lui Simson)*.

9.35. Într-un triunghi echilateral ABC se ia un punct D situat pe latura BC. Bisectoarea unghiului BAD întîlnește latura BD în E, iar bisectoarea unghiului ADB întîlnește latura AB în F și intersectoarea unghiului DAB în punctul I.

a). Să se arate că dreptele BI și AC sînt perpendiculare.

b). Patrulaterul $BEIF$ este inscriptibil.

c). Să se calculeze unghiul ascuțit format de dreapta DF și de bisectoarea unghiului CAD.

(G.M., E: 5013, *C. Ionescu-Țiu*).

9.36. Să se găsească două puncte egal depărtate de două drepte din același plan care nu sînt paralele și care nu se intersectează în cadrul hîrtiei pe care desenăm.

9.37. Să se arate că dreapta care unește un vîrf al unui paralelogram cu mijlocul unei laturi opuse, taie una din diagonalele paralelogramului la o treime din lungimea ei.

9.38. Într-un cerc cu centrul O ducem doi diametri oarecare AA_1 și BB_1. Perpendiculara în O pe AA^1 taie cercul în C. Din C ducem perpendiculara CD pe BB_1. Bisectoarea unghiului DCO taie pe AA_1 în E, să se arate că:

$$\frac{A_1E^2}{EA_1} = \frac{BD}{DB_1}; \quad \frac{OD}{OE} = 1 + \frac{OE^2 - OC^2}{CE^2}.$$

(S.G.M. 9, 1949 *C. Ionescu-Țiu*).

9.39. Se dă un triunghi ABC și un punct A_1 pe BC. O paralelă la BC taie pe AB și AC respectiv în B_1 și C_1. Care poate fi maximumul ariei triunghiului $A_1B_1C_1$?

Răspuns. Un sfert din aria triunghiului dat ABC.

9.40. Fie un triunghi oarecare ABC. Pe laturile AB, BC, CA construim în afara triunghiului dat, segmente de cerc capabile de cîte 60° fiecare. Dreptele

A_1B și A_1C mai intersectează celelalte două arce respetiv în C_1 și B_1.

a). Să se arate că punctele B_1AC_1 sînt coliniare.

b). Care este poziția punctului A_1 astfel ca triunghiul echilateral $A_1B_1C_1$ să fie maxim?

R. Trebuie ca A_1B_1 să fie paralelă cu linia centrelor cercurilor care au drept coarde pe AB și AC.

9.41. Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct mobil pe BC. Ducem $MP \perp AB$ și $MQ \perp AC$. Care poate fi poziția punctului M astfel ca aria triunghiului MPQ să fie maximă?

R. Cînd M este la mijlocul laturii BC.

9.42. Se dă un unghi AOB și un punct M în interiorul unghiului. Să se construiască un cerc care să treacă prin punctul M și să fie tangent laturilor unghiului dat.

9.43. În triunghiul dreptunghic în A avînd unghiul $B = \frac{\pi}{8}$ avem relația

$$BC^2 \cdot AB + 4AC^3 = 3BC^2 \cdot AC.$$

(S.G.M.7, 1949 *C. Ionescu-Țiu*).

9.44. a). Într-un sector circular să se înscrie un pătrat în așa fel încît două vîrfuri să fie pe razele ce mărginesc sectorul, iar celelalte două pe arcul de cerc.

b). Într-un triunghi dat să se înscrie un alt triunghi în așa fel încît laturile lui să fie paralele cu trei direcții date.

9.45. Să se construiască un cerc care trece prin două puncte date și este tangent la un cerc dat.

9.46. Să se construiască un cerc care să treacă prin două puncte date și să fie tangent la o dreaptă dată.

9.47. Să se arate că două tangente la un cerc și coarda lor de contact intersectează în două părți egale segmentul de pe perpendiculara dusă dintr-un punct oarecare al coardei pe dreapta care unește acest punct cu centrul cercului.

9.48. Fie un triunghi ascuțitunghic, unde $\sphericalangle A > \sphericalangle B > \sphericalangle C$. Notăm cu A_1, B_1, C_1, proiecțiile lui

A, B, C pe dreapta OH, unde H este ortocentrul, iar O centrul cercului circumscris. Să se arate că $AA_1 + CC_1 = BB_1$.

(G.M., 15199, *C. Ionescu-Ţiu*).

9.49. În plan se dau n cercuri care se intersectează cîte trei. Să se arate că există cel puţin un punct care aparţine tuturor cercurilor date. Se foloseşte metoda inducţiei.

9.50. Care este locul geometric al punctelor din care vedem două cercuri date sub acelaşi unghi. *Discuţie.*

9.51. Pe laturile unui paralelogram construim în afara lui pătrate. Folosind metoda rotaţiei, cu o rotaţie de 90° în jurul centrului paralelogramului, să se arate că centrele celor patru pătrate formează un alt pătrat.

9.52. Într-un cerc oarecare, avînd centrul în O, se consideră AB, un diametru al său. Prin B ducem tangentă la cerc pe care se ia un punct oarecare C. Din C ducem o a doua tangentă CT, T fiind punctul de contact cu cercul. Notăm cu D punctul de intersecţie al dreptei TA cu perpendiculara dusă în O pe diametrul AP. Să se arate că $OCDT$ este un trapez isoscel.

9.53. Dîndu-se un poligon convex să se construiască un pătrat de aceeaşi arie cu poligonul.

9.54. Într-un cerc cu centrul O se duce un diametru AB, apoi unghiul ABC de 30° şi unghiul BCD de 45°. Punctele C şi D fiind pe cerc să se calculeze mărimea unghiului AOD şi a unghiului ODC.

(G.M.F.B., E: 216, *C.I.Ţ.*).

9.55. Fie un triunghi ABC în planul P şi A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA, AB.

a). Să se arate că pentru orice punct M al planului avem:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AA_1} = 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BB_1} = 3\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CC_1}.$$

b). Dacă G este centrul de greutate atunci

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GG_1} = 0.$$

c). $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$

9.56. Fie un triunghi ABC din planul P, G centrul său de greutate, iar A_1, B_1, C_1 îndeplinesc condițiile:

$$\overrightarrow{A_1B} = k\overrightarrow{A_1C};\ \overrightarrow{B_1C} = k\overrightarrow{B_1A},\ \overrightarrow{C_1A} = k\overrightarrow{C_1B}$$

unde $k \in R$, $k \neq 1$.

a). Să se arate că $\overrightarrow{GB} - k\overrightarrow{GC} = (1 - k)\overrightarrow{GA_1}$.

b). Să se arate că G este și centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$.

9.57. Să se arate că $ABCD$ fiind un patrulater plan avem: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

9.58. Fie trapezul $ABCD$ cu laturile paralele AB și CD; E și F intersecțiile dreptei AD cu cercul ce trece prin punctele B, C, D și paralela dusă din C la BE.

Să se arate că BC este medie geometrică între AD și EF.

(S.G.M. 2, 1948, *C. Ionescu-Țiu*).

9.59. Într-un cerc ducem diametrul AB și coarda CD. Notăm cu A_1 și B_1 proiecțiile punctelor A și B pe dreapta CD.

Să se arate că $A_1C = B_1D$.

9.60. Două cercuri secante de centre O_1 și O_2 se intersectează în punctele A, B. Prin O_1 se duce diametrul $A_1B_1 \perp O_1A$ și prin O_2 se duce diametrul $A_2B_2 \perp O_2A$, unde A_1 și A_2 sînt de aceeași parte a dreptei O_1O_2. Notăm cu M și N mijloacele segmentelor A_1A_2 respectiv B_1B_2.

Să se arate că $MN = \| O_1O_2$.

9.61. Prelungim o coardă AB a unui cerc de centru O, cu $BC = OA$. Dreapta CO taie cercul în D și E unde $CD < CE$. Să se arate că $\sphericalangle AOE = 3\sphericalangle BOC$.

9.62. Să se arate că dacă A, B, C, D sînt patru puncte coliniare atunci avem relațiile

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0;$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}^2 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

9.63. Notăm cu O centrul cercului circumscris unui triunghi oarecare ABC și cu H intersecția înălțimilor și G centrul de greutate.

Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

9.64. Fie în același plan triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ de centre de greutate respectiv G și G_1. Să se arate că

a). $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{GG_1}$.

b). Să se deducă apoi o condiție necesară și suficientă ca cele două triunghiuri ABC și $A_1B_1C_1$ să aibă același centru de greutate.

9.65. Într-un triunghi oarecare ABC ducem mediana AA_1 și fie un punct D în interiorul triunghiului AA_1C.

Să se arate că: aria ABD = aria ADC + 2 aria AA_1D.

(G.M., E: 5063, *C. Ionescu-Țiu*).

9.66. Se dau două cercuri secante în A și B și o secantă MAN. Tangentele în M și N la fiecare din cele două cercuri se taie în C. Să se arate că cele patru puncte M, C, N, B sînt pe același cerc.

9.67. Două coarde perpendiculare AB și CD din cerc se taie în P. Să se arate că media triunghiului PBC este înălțimea triunghiului PAD.

9.68. Proiecțiile vîrfului A al unui triunghi oarecare ABC pe bisectoarele unghiurilor B și C sînt situate pe linia mijlocie corespunzătoare laturii BC.

9.69. Două cercuri (O) și (O_1) se taie în A și B. Ducem secantele MAM_1 și NBN_1 unde M și N sînt pe cercul (O) iar M_1 și N_1 sînt pe cercul (O_1). Să se arate că MN și M_1N_1 sînt paralele.

9.70. Să se arate că dacă o dreaptă înjumătățește atît perimetrul cît și aria unui triunghi, atunci ea trece prin centrul cercului înscris triunghiului.

9.71. Fie M și N mijloacele laturilor opuse AB și CD ale unui patrulater convex $ABCD$. Să se arate că

$$\text{aria } ABN + \text{aria } CDM = \text{aria } ABCD.$$

(G.M., E: 5163, *C. Ionescu-Țiu*).

9.72. Un punct mobil M, descrie cercul circumscris triunghiului ABC, isoscel în A $(AB = AC)$. Notăm cu P punctul unde AM taie BC. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor BMP și CMP sînt respectiv tangente în B la AB și C la AC.

9.73. Se dau punctele M, N, P pe laturile BC, CA, AB, sau prelungirile lor, ale unui triunghi ABC. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor MCN, NAP, PBM trec prin același punct.

9.74. Fie triunghiul ABC și un punct oarecare M. Notăm cu P un al doilea punct comun la cele două cercuri ce trec prin M și sînt tangente respectiv în B la AB și C la AC. Să se arate că punctul P se află pe cercul circumscris triunghiului ABC, dacă și numai dacă punctul M este situat pe dreapta BC.

9.75. În cercul de rază R ducem coardele AB, AC egale respectiv cu latura triunghiului echilateral înscris și cu latura pătratului înscris în același cerc. Tangentele la cerc în punctele A, B, C formează triunghiul $A_1B_1C_1$, iar înălțimile AD și BE ale triunghiului ABC mai taie cercul în punctele D_1 și E_1. Să se arate că

a). Triunghiul $A_1B_1C_1$ este dreptunghic.

b). Triunghiul ABE_1 este isoscel.

c). Să se calculeze lungimile segmentelor BC, AD, AD_1 în funcție de R.

9.76. Să se construiască un triunghi cunoscînd laturile triunghiului ortic.

9.77. Fie patrulaterul convex $A_1A_2A_3A_4$, iar I_{12} și I_{34} mijloacele segmentelor A_1A_2 și A_3A_4. Să se arate că aria $A_1A_2A_3A_4$ este egală cu suma ariilor $(A_1A_2I_{34} + A_3A_4I_{12})$.

(G.M., E: 5076, *C. Ionescu-Țiu*).

9.78. Într-un triunghi oarecare ABC prelungim înălțimea BD cu $BB_1 = AC$ și înălțimea CE cu $CC_1 = AB$. Să se arate că triunghiurile ABB_1 și ACC_1 sînt egale și $\sphericalangle B_1AC_1 = 90°$.

9.79. Să se arate că dreptele care unesc vîrfurile unui triunghi cu contactele cercului înscris cu laturile opuse sînt concurente.

9.80. Într-un patrulater circumscris unui cerc, diagonalele și dreptele care unesc punctele de contact ale laturilor opuse sînt concurente.

9.81. Se consideră un segment de dreaptă AB, o perpendiculară (Δ) în B la AB, un punct C fix pe AB, un punct M mobil pe (Δ) și punctul M mobil pe (Δ) astfel ca dreapta CN să fie perpendiculară pe AM.

a). Să se arate că CM este perpendiculară pe AN.

b). Să se deducă relația $BC \cdot BA = MB \cdot BN$.

9.82. Se dă triunghiul ABC și fie O centrul cercului circumscris. Ducem diametrul AD și perpendiculara din B pe acest diametru care intersectează pe AC în E.

a). Să se arate că $AB^2 = AC \cdot AE$.

b). Să se calculeze segmentul DE cunoscînd laturile $AB = c$, $AC = b$ și R raza cercului circumscris.

9.83. Într-un paralelogram $ABCD$ perpendiculara dusă pe AB prin mijlocul ei E, taie diagonalele BD, CA în M și N. Din punctul O de intersecție al diagonalelor ducem o perpendiculară pe AB. Să se arate că

$$\frac{1}{EM} + \frac{1}{EN} = \frac{2}{OP}.$$

9.84. Fie cinci puncte oarecare A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, apoi B_1, B_2, B_3, B_4 și C_1, C_2 respectiv mijloacele segmentelor A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 și B_2B_4, B_1B_3.

Să se arate că $A_1A_5 = 4C_1C_2$ și $A_1A_5 \parallel C_1C_2$.

(G.M.B., 15265, *C. Ionescu-Țiu*).

9.85. Prin vîrful A al unui paralelogram $ABCD$ ducem o secantă care intersectează diagonala BD în E și laturile BC, CD respectiv în F și G. Să se arate că $EA^2 = EF \cdot EG$.

9.86. În triunghiul ABC ducem MP paralelă la AC, $M \in AB$, $P \in BC$. Fie $MN \parallel BC$; $N \in AC$; $PQ \parallel AB$, $Q \in AC$.

Să se arate că:

a). Punctele N și Q sînt, respectiv, egal depărtate de punctele A și C.

b). Dacă $MA = k \cdot MB$ să se calculeze segmentul NQ cu ajutorul laturii AC și al lui k.

c). În ce caz punctele N și Q se confundă?

9.87. Să se arate că cercul care trece prin vîrfurile B, C ale unui triunghi ABC și prin ortocentrul H este simetricul cercului circumscris în raport cu latura BC.

9.88. Două drepte paralele duse prin vîrfurile B și C ale unui triunghi ABC, taie o dreaptă (Δ) care trece prin vîrful A, respectiv în M și N. Să se arate că paralelele din M la AC și din N la AB se taie într-un punct situat pe latura BC.

9.89. Fie un patrulater $ABCD$. Să se afle un punct I prin care să putem duce o dreaptă d_1 care să intersecteze laturile opuse AB și CD respectiv în punctele A_1 și C_1, precum și o altă dreaptă d_2 care să intersecteze laturile BC și DA respectiv în punctele B_1 și D_1 astfel încît $IA_1 = IC_1$ și $IB_1 = ID_1$.

(G.M., E: 5064, *C. Ionescu-Țiu*).

9.90. Se consideră un triunghi ABC înscris în cerc și M un punct de pe cerc. MB și CM întîlnesc AC și AB respectiv în D și E. Să se arate că DE trece printr-un punct fix.

9.91. Un triunghi ABC este înscris în cercul fix de centru O. Punctele B și C sînt fixe pe cerc, iar A descrie cercul. Să se găsească locul geometric al centrelor cercurilor înscrise triunghiului ABC.

9.92. Într-un cerc cu centrul O se consideră doi diametri perpendiculari AB și CD. Fie P un punct oarecare situat pe AB. Ducem dreapta CP care intersectează cercul într-un punct S. Se consideră tangenta la cerc în punctul S care taie dreapta AB în punctul R. Să se arate că triunghiul SPQ este isoscel și să se determine poziția punctului S astfel încît, triunghiul SPQ să fie echilateral.

9.93. Prin centrul O_1 al unui cerc de rază R_1 trece un alt cerc cu centrul O_2 și de rază R_2 ($R_1 < R_2$).

a). Să se arate că tangentele la cercul O_1 în punctele de intersecție E și F ale celor două cercuri se taie pe cercul O_2.

b). Ducînd tangentele comune la cele două cercuri, AB și CD să se arate că BD este tangentă la cercul O_1.

9.94. Se dă un unghi de 60°, care se rotește în planul determinat de laturile sale în jurul vîrfului său fix A. Din punctul fix B situat la distanța $2l$ de punctul A ducem perpendicularele BC și BD pe laturile acestui unghi. Unim mijlocul O al segmentului AB cu punctele C și D.

a). Să se arate că unghiurile OCD și ODC sînt de cîte 30°.

b). Să se determine locul geometric al punctului de concurență al medianelor triunghiului OCD.

9.95. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu laturile AB și AC egale. Perpendiculara dusă din B pe AB și perpendiculara dusă din C pe AC se întîlnesc în punctul D.

a). Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil unui cerc și circumscriptibil altui cerc.

b). Să se arate că perpendiculara dusă prin intersecția diagonalelor patrulaterului $ABCD$ pe AB trece prin mijlocul laturii CD, iar perpendiculara dusă din același punct pe CD trece prin mijlocul laturii AB.

c). Să se arate că bisectoarea unghiului format de cele două perpendiculare duse prin intersecția diagonalelor respectiv pe AB și CD este perpendiculară pe bisectoarea unghiului format de dreptele AB și CD.

(G.M.B., 2686, *C. Ionescu-Țiu*).

9.96. Se rotește triunghiul dreptunghic ABC', $AB < AC$ în jurul vîrfului unghiului drept A, pînă ce ipotenuza, în noua ei poziție B_1C_1 trece prin extremitatea catetei AB.

Să se arate că dacă AC_1 intersectează pe BC în D atunci $\sphericalangle ADB = 3 \sphericalangle ACB$.

9.97. Fie A_1, B_1, C_1 simetricele unui punct P din planul unui triunghi ABC în raport cu mijloacele laturilor BC, CA, AB.

a). Să se afle locul geometric descris de punctul I cînd P descrie cercul circumscris triunghiului ABC;

b). Cum trebuie să varieze P pentru ca I să descrie cercul înscris triunghiului ABC?

(G.M.F.B., 1352, *C. Ionescu-Țiu*).

9.98. Dacă un punct P este situat pe arcul BC al unui cerc circumscris triunghiului echilateral ABC, să se arate că $PA = PB + PC$.

9.99. Să se arate că perpendicularele duse din mijlocul fiecărei laturi ale unui patrulater inscriptibil pe latura opusă sînt concurente.

9.100. O paralelă la laturile opuse AB și CD ale unui paralelogram $ABCD$ taie laturile AD, BC în M, N; iar o paralelă la laturile AD, BC taie laturile AB, CD respectiv în P și Q. Să se arate că dreptele AC, NP și MQ sînt concurente.

9.101. Tangentele în B și C la cercul circumscris triunghiului ABC se intersectează în D. Prin D ducem o paralelă la tangenta în A, care intersectează pe AB în A_1 și pe AC în D_1.

Să se arate că $A_1D = DD_1$.

9.102. Într-un triunghi dreptunghic ABC, perpendiculara în D pe mediana BD taie ipotenuza BC în punctul E.

Să se arate că:

$$DE = \frac{AC \cdot AB \cdot BD}{AC^2 + 2AB^2}.$$

(S.G.M. 7, 1949, *C. Ionescu-Țiu*).

9.103. Să se arate că locul geometric al centrelor dreptunghiurilor înscrise unui triunghi ABC este o dreaptă care unește mijlocul laturii BC și mijlocul înălțimii din A.

9.104. Fiind date două cercuri concentrice să se ducă o dreaptă pe care aceste cercuri determină două coarde dintre care una este dublul celeilalte.

9.105. Un plan este acoperit cu o rețea de pătrate cu latura egală cu unitatea. Se poate construi un triunghi echilateral cu vîrfurile în nodurile rețelei?

9.106. Un punct P de pe cercul circumscris triunghiului ABC se proiectează pe BC, CA, AB respectiv în L, M, N.

Să se arate că $PA \cdot PL = PB \cdot PM = PC \cdot PN$.

9.107. Fie D_1 și D_2 două drepte paralele și A, B două puncte situate de o parte și de alta a celor două paralele. Să se determine punctul $M \in D_1$ și $N \in D_2$ astfel ca segmentul MN să aibă o direcție dată iar drumul $AMNB$ să fie minim. Se va considera că distanța de la punctul A la dreapta D_1 este mai mică decît distanța A la dreapta D_2.

9.108. Într-un triunghi isoscel ABC, $AB = AC$, înălțimea din A întîlnește perpendiculara din B pe AB în punctul D, iar E este piciorul perpendicularei din C pe BD. Să se arate că

$$\frac{DE}{DB} = \frac{AB^2 - DE^2}{AD^2}; \quad \frac{(AB - BD)^2}{(AB + BD)^2} = \frac{AB - BE}{AB + BE}.$$

(S.G.M. 6, 1948, *C. Ionescu-Țiu*).

9.109. Într-un triunghi ABC ducem înălțimile AA_1 și BB_1. Să se arate că dreapta A_1B_1 este paralelă cu tangenta dusă în C la cercul circumscris triunghiului.

9.110. Pe laturile triunghiului ABC se iau punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, BC_1A, CA_1B_1 trec prin același punct M.

9.111. Fie un patrulater inscriptibil $ABCD$ și $E = AB \cap CD$; $F = AD \cap BC$. Să se arate că bisectoarele unghiurilor AED și AFB intersectează laturile patrulaterului $ABCD$ în patru puncte care sînt vîrfurile unui romb.

9.112. Să se arate că bisectoarea interioară a unui unghi dintr-un triunghi oarecare este și bisectoarea unghiului format de diametrul cercului circumscris triunghiului și înălțimea dusă din vîrful considerat.

9.113. Fie un triunghi oarecare ABC și o dreaptă (d) care nu traversează triunghiul. Notăm cu E, F, G mijloacele respective ale segmentelor AB, CD, EF unde D este un punct pe dreapta (d). Prin punctele A, B, C, G ducem patru drepte paralele între ele care intersectează dreapta (d) respectiv în punctele A_1, B_1, C_1, D_1. Să se arate că:

a). $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 4GG_1$.

b). Oricare ar fi punctul D pe dreapta (d) avem inegalitatea

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 \leqslant 4GD.$$

(G.M., 15234, *C. Ionescu-Țiu*).

9.114. Pe un cerc se iau două puncte oarecare A, B. Din A ducem perpendiculara AC pe tangenta în B la cerc și fie A_1 diametrul opus lui A.

Să se arate că $\sphericalangle A_1AB = \sphericalangle BAC$ și $AB^2 = 2R \cdot AC$.

9.115. Să se construiască un patrulater convex cunoscîndu-i unghiurile și diagonalele lui.

9.116. Fie H ortocentrul triunghiului ABC iar AD, BE, CF înălțimile triunghiului.

Să se arate că $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$.

9.117. Fiind dat pătratul $ABCD$ și A_1, A_2, A_3, A_4 mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA să se arate că dreptele DA_1, AB_1, BC_1, CD_1 determină un pătrat a cărui arie este o cincime din aria pătratului dat.

9.118. Pe laturile unui triunghi ABC construim triunghiurile echilaterale ABC_1, BCA_1, CAB_1, în exterior (sau toate în interior). Să se arate că AA_1, BB_1, CC_1 sînt egale și concurente într-un punct M din care laturile triunghiului ABC se văd sub unghiuri egale. Centrele triunghiurilor echilaterale construite sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

9.119. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc. Perpendiculara în B pe AB taie cercul în P iar pe AC în M. Dreapta CP taie pe AB în N.

a). Să se arate că $AP \perp MN$.

b). Se cere locul geometric al lui M cînd BC este fixă și punctul A descrie cercul.

9.120. Proiectăm punctul G de intersecție al medianelor triunghiului dreptunghic ABC pe laturi în A_1, B_1, C_1.

Să se arate că aria $A_1B_1C_1$ este 2/9 din aria ABC.

9.121. Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Paralelele duse prin A și B respectiv la BC și AD taie dreapta CD în punctele E și F. Să se arate că:

a). $AB^2 = CE \cdot FD$.

b). Patrulaterul $ABFE$ este inscriptibil.

c). Trapezele $ABCD$ și $ABFD$ sînt asemenea.

(R.M.F. 91, 1950, *C. Ionescu-Țiu*).

9.122. Dacă notăm cu p_n, q_n perimetrele poligoanelor regulate cu n laturi înscris și circumscris unui cerc să se arate că

$$ap_nq_n = q_{2n}(p_n + q_n);\ p_{2n}^2 = p_nq_{2n}.$$

9.123. Prin vîrful C al unui triunghi oarecare ABC ducem o dreaptă (d) care nu traversează triunghiul și notăm cu A_1, B_1, G_1 proiecțiile pe dreapta (d) respectiv ale punctelor A, B, G unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se arate că:

a). $AA_1 + BB_1 = 3GG_1$.

b). Dacă (d_2) este o dreaptă oarecare dar care nu traversează triunghiul, iar A_2, B_2, C_2, G_2 sînt proiecțiile pe (d) respectiv ale punctelor A, B, C, G, atunci $AA_2 + BB_2 + CC_2 = 3GG_2$.

c). Ce relație există dacă dreapta (d) trece prin centrul de greutate G.

(G.M., 1975, p. 148).

9.124. Să se construiască un romb cunoscîndu-se unghiul dintre o diagonală cu latura și suma diagonalelor.

9.125. Se consideră un triunghi ABC și o dreaptă mobilă (d) care trece prin C. Fie A_1 și B_1 proiecțiile lui A și B pe dreapta (d). Care este maximumul sumei $AA_1 + BB_1$?

Indicație. Se duce mediana CI și $II' \perp (d)$; $2II' = AA_1 + BB_1$.

9.126. Să se arate că forțele aplicate în mijloacele laturilor unui poligon plan convex proporționale cu lungimile laturilor, perpendiculare pe aceste laturi și îndreptate toate în afara poligonului sau în interior, sînt în echilibru.

Indicație. Se poate lua mai întîi cazul unui triunghi, apoi se descompune poligonul în triunghiuri, prin diagonalele duse din același vîrf, forțele de pe mijloacele diagonalelor se reduc.

9.127. Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Fie $E = AD \cap BC$. Perpendicularele în C și D, respectiv pe CB și DA se intersectează în I. Să se arate că $EI \perp AB$.

9.128. Notăm cu O intersecția diagonalelor unui paralelogram $ABCD$ cu M un punct oarecare. Să se arate că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ și

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AO}.$$

(G.M., 15466, *C. Ionescu-Țiu*).

9.129. Să se arate că dreptele care unesc vîrfurile unui patrulater oarecare cu centrele de greutate ale triunghiurilor formate de celelalte vîrfuri, sînt concurente.

9.130. Fie un patrulater $ABCD$. Să se arate că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{MN}$, unde M și N sînt mijloacele diagonalelor AC respectiv BD, iar $AC > BD$.

9.131. Fie M un punct oarecare pe latura BC a unui triunghi oarecare ABC. Să se arate că vectorul $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$ rămîne constant ca mărime și direcție cînd punctul M se mișcă pe latura BC.

9.132. Într-un triunghi oarecare ABC notăm cu A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor, cu O centrul cercului circumscris, cu I centrul cercului înscris, cu H ortocentrul, iar cu G centrul de greutate al triunghiului. Să se arate vectorial că:

a). $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$; $AH = 2R\cos A$ și analoagele

b). $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$; $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}=0$.

c). $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}$; $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=$
$=2\overrightarrow{OG}$.

(G.M., 1975, p. 149, *C. Ionescu-Țiu*).

9.133. Să se arate că perpendicularele din vîrfurile unui triunghi ABC pe laturile triunghiului ortic sînt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

9.134. Latura AD a unui paralelogram $ABCD$ este împărțită în n părți egale. Primul punct de diviziune P se unește cu vîrful B. Să se arate că dreapta BP taie diagonala AC în punctul Q astfel că $(n+1)AQ = AC$.

9.135. Fie un triunghi oarecare ABC și un punct D pe AB astfel că $3AD = DB$. Notăm cu E mijlocul segmentului CD, iar $F = AE \cap BC$.

a). Să se arate că $5CF = BC$.

b). Dacă $(n-1)AD = DB$, atunci $(n+1)CF = BC$.

(G.M., 15490, *C. Ionescu-Țiu*).

9.136. Să se arate că cele patru drepte care trec prin mijloacele laturilor opuse ale celor două patrulatere, care au ca vîrfuri mijloacele laturilor unui octogon oarecare luate două cîte două, sînt concurente.

(G.M., 15339, *C. Ionescu-Țiu*)

9.137. Să se demonstreze că dintre toate patrulaterele care au diagonalele respectiv egale, aria cea mai mare este aceea a patrulaterului cu diagonalele perpendiculare între ele.

(R.M.F., E: 551, *C.I.Ț.*).

9.138. Fie un triunghi oarecare ABC, un punct O în planul triunghiului, G intersecția medianelor, iar M, D, E, N respectiv mijloacele segmentelor OC, AM, BM, DE. Să se arate că $4ON = 3OG$.

(G.M.p. 188, 1975, *C. Ionescu-Țiu*).

9.139. Într-un triunghi oarecare ABC notăm cu A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor; H este ortocentrul, O

este centrul cercului circumscris, G este centrul de greutate, iar A_2, B_2, C_2 sînt mijloacele segmentelor cuprinse între vîrfuri și ortocentru. Să se arate că:

a). $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = R$, unde R este raza cercului circumscris.

b). $GH = 2OG$; $\sphericalangle OAH = |\sphericalangle B - \sphericalangle C|$;

c). Mijloacele segmentelor A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sînt situate în același punct O_1 aflat la mijlocul segmentului OH. (Se pot folosi relații vectoriale).

(G.M., 1975, p. 149, *C. Ionescu-Țiu*).

9.140. Într-un patrulater $ABCD$ notăm cu E, F, G, H, L, M, N, P, R respectiv mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA, DB, AC, HF, LM, EG.

a). Să se arate că punctele N, P, R coincid.

b). Dacă patrulaterul $ABCD$ este convex atunci aria $ABCD = 2$ aria $EFGH$.

c). Patrulaterele $EFGH$, $HLFM$, $MELG$ sînt paralelograme.

d). Patrulaterele $ELMH$ și $FGML$ sînt egale.

(G.M., E:5153, *C. Ionescu-Țiu*).

9.141. Se consideră trapezul $ABCD$ cu bazele AB și CD, iar M și N mijloacele laturilor neparalele AD și BC. Fie M_1 proiecția lui M pe dreapta BC, iar N_1 proiecția lui N pe dreapta AD. Să se arate că:

a). aria ACD + aria ADB = aria BDC + aria ABC = aria $ABCD$.

b). $\dfrac{MD}{NC} = \dfrac{MM_1}{NN_1}$

(G.M.B., E: 4167, *C. Ionescu-Țiu*).

9.142. Fie un trapez cu bazele AD și BC. Notăm cu E, F, H respectiv mijloacele segmentelor AB, DC, EF iar $G = DI \cap CE$ unde I este intersecția cu BC a paralelei dusă din E la CD.

a). Să se arate că punctele D, H, G, I sînt coliniare.

b). $2DI = 3DG = 4DH$.

(G.M. 1975, p. 150, *C. Ionescu-Țiu*).

9.143. Într-un trapez $A_1A_2A_3A_4$ notăm cu I_{12} și I_{34} mijloacele laturilor paralele A_1A_2 și A_3A_4.

a). Să se arate că aria S a trapezului $A_1A_2A_3A_4$ este:

$$S = \text{aria } A_1A_2I_{34} + \text{aria } A_3A_4I_{12}.$$

b). Se mai păstrează relația precedentă dacă $A_1A_2A_3A_4$ este un patrulater convex oarecare?

(G.M., 1975, p. 151, C. *Ionescu-Țiu*).

9.144. Fie O un punct oarecare și $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater convex. Notăm cu B_1, B_2, B_3, B_4 respectiv mijloacele segmentelor A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1, iar cu I intersecția dreptelor B_1B_3 cu B_2B_4. Să se arate că:

$$\text{aria } (OA_1A_2+OA_1A_3+OA_1A_4+OA_2A_3+OA_2A_4+$$
$$+OA_3A_4)=2 \text{ aria } (OIA_1+OIA_2+OIA_3+OIA_4).$$

(G.M. 1975, p. 151, C. *Ionescu-Țiu*).

9.145. Într-un patrulater oarecare convex $ABCD$ notăm cu E și F respectiv mijloacele laturilor BC și AB, iar cu G mijlocul segmentului EF. Notăm cu A_1, B_1, C_1, D_1 proiecțiile pe dreapta EF respectiv ale punctelor A, B, C, D.

a). Să se arate că $AA_1 + BB_1 = CC_1 + DD_1$.

b). Fie o dreaptă (d) din plan care nu traversează patrulaterul $ABCD$, iar A_2, B_2, C_2, D_2, G_2 proiecțiile pe (d) respectiv ale punctelor A, B, C, D, G. Să se arate că $AA_2 + BB_2 + CC_2 + DD_2 = 4GG_2$.

(G.M. 1975, p. 149, C. *Ionescu-Țiu*).

9.146. Într-un patrulater plan convex $ABCD$ notăm cu E, F, G, H respectiv mijloacele segmentelor AB, BC, CD, GE, iar $I = AF \cap CE$.

Să se afle raportul $DI : HI$.

(G.M. 1975, p. 148, C. *Ionescu-Țiu*).

9.147. Fie poligonul convex $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Notăm cu I_{ij} mijlocul laturii A_jA_i cu B_i proiecția punctu-

lui A_i pe dreapta A_0A_6, iar cu B_{ij} proiecția punctului I_{ij} pe dreapta A_0A_6. Să se arate că

$$A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+A_4B_4+A_5B_5=2(I_{12}B_{12}+I_{34}B_{34}+I_{56}B_{56})=2(I_{61}B_{61}+I_{23}B_{23}+I_{45}B_{45})=6\cdot GG_1$$

unde G este centrul de greutate al triunghiului $I_{12}I_{34}I_{56}$, iar G_1 proiecția lui G pe A_0A_6. Să se dea și o generalizare.

(G.M., 15263, *C. Ionescu-Țiu*).

9.148. În patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ notăm cu B_1, B_2, B_3, B_4, respectiv mijloacele segmentelor A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1, iar $I = B_1B_3 \cap B_2B_4$ și fie M un punct exterior din plan.

Să se arate că aria MA_1A_4 + aria MA_2A_4 + aria MA_3A_4 = aria MB_1A_4 + aria MB_2A_4 + aria MB_3A_4+ + aria MB_4A_4 = 4 aria MIA_4.

(G.M., 15206, *C. Ionescu-Țiu*).

9.149. Fie un patrulater convex $A_1A_2A_3A_4$, iar G intersecția segmentelor care unesc mijloacele laturilor opuse ale acestui patrulater. O dreaptă (d) care trece prin G lasă de o parte punctele A_1 și A_2 și de cealaltă parte punctele A_3 și A_4. Notăm cu B_1, B_2, B_3, B_4 proiecțiile punctelor A_1, A_2, A_3, A_4 pe dreapta (d). Să se arate că

$$A_1B_1 + A_2B_2 = A_3B_3 + A_4B_4.$$

(G.M., 15235, *C. Ionescu-Țiu*).

9.150. În triunghiul ABC ducem mediana AM. Pe laturile AB și AC luăm respectiv punctele D și E astfel că $AB = m \cdot AD$ și $AC = n \cdot AE$; iar $F = AM \cap DE$. Să se arate că:

$$(m+n)\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \text{ și } m \cdot DF = n \cdot EF.$$

(G.M., 1976, *C. Ionescu-Țiu*).

9.151. Se consideră pentagonul $OABCD$, iar E, F, G, M respectiv mijloacele segmentelor AB, DC, EF, OG. Notăm cu A_1, B_1, C_1, M_1 proiecțiile respective ale punctelor A, B, C, M pe dreapta OD. Să se arate că AA_1 + + $BB_1 + CC_1 = 8MM_1$.

(G.M., 15400, *C. Ionescu-Țiu*).

9.152. Se consideră pentagonul convex $A_1A_2A_3A_4A_5$. Notăm cu B, C, D respectiv mijloacele segmentelor A_1A_2; A_4A_5, BC, cu E un punct pe A_2A_3 astfel că $A_2E = 3EA_3$, cu F mijlocul segmentului DE, iar $G = DA_3 \cap A_2F$. Să se arate că:

a). $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} + \overrightarrow{MA_5} = 5\overrightarrow{MG}$ unde M este un punct oarecare din spațiu.

b). aria A_1DA_3 + aria A_2DA_3 = aria A_3DA_4 + aria A_3DA_5, știind că dreapta A_3G intersectează latura A_1A_5.

(G.M., 1975, p. 149, *C. Ionescu-Țiu*).

9.153. Fie un pentagon $ABCDE$. Notăm cu M mijlocul segmentului care unește mijloacele laturilor AB și CD, iar cu N un punct pe segmentul DE astfel că $DE = 4DN$.

Notăm cu P mijlocul segmentului MN iar $R = ME \cap DP$. Să se arate vectorial că $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD} + \overrightarrow{RE} = 0$.

(G.M., 1975, p. 149, *C. Ionescu-Țiu*).

9.154. Fie un unghi xOy. Pe Ox se iau în ordine punctele A, B, C, iar pe Oy se iau în ordine punctele A_1, B_1, C_1. Notăm cu M mijlocul segmentului BB_1, iar $N = OM \cap AA_1$ și $P = OM \cap CC_1$. Să se arate că:

$$OB \cdot OA_1 \cdot AN = OB_1 \cdot OA_1 \cdot NA_1;$$

$$OB \cdot OC_1 \cdot CP = OB_1 \cdot OC \cdot PC_1;$$

$$OC \cdot NA \cdot OA_1 \cdot PC_1 = OA \cdot PC \cdot OC_1 \cdot NA_1.$$

(G. M. 15803, *C. Ionescu Țiu*).

9.155. Trei semidrepte Ox, Oy, Oz, fac între ele, două cîte două, cîte un unghi de 60°. O semidreaptă OM face cu Ox, Oy, Oz, respectiv unghiurile α, β, γ.

a). Să se arate că $1{,}5 \leqslant \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \leqslant 2$.

b). Dacă X, Y, Z, sînt mărimile a trei vectori situații respectiv pe Ox, Oy, Oz, iar $\vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z} = \vec{R}$, atunci

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + XY + YZ + ZX.$$

c). Să se stabilească relații analoage în cazul cînd semidreptele Ox, Oy, Oz fac între ele cîte un unghi de $45°$.

(G.M., 1976, *C. Ionescu-Țiu*).

9.156. Notăm cu B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 mijloacele laturilor A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1, ale exagonului convex $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Să se arate că:

a). Centrele de greutate ale triunghiurilor $B_1B_3B_5$ și $B_2B_4B_6$ coincid în același punct G.

b). $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\overrightarrow{GA_4}+\overrightarrow{GA_5}+\overrightarrow{GA_6}=0.$

c). $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}+\overrightarrow{MA_5}+\overrightarrow{MA_6}=6\overrightarrow{MG}$ unde M este un punct oarecare.

d). $\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_3}+\overrightarrow{MB_5}=\overrightarrow{MB_2}+\overrightarrow{MB_4}+\overrightarrow{MB_6}=$
$=3\overrightarrow{MG}.$

e). Dacă dreapta A_6G intersectează latura A_3A_4 atunci:

$$\text{aria }(A_6GA_5)+\text{aria }(A_6GA_4)=\text{aria }(A_6GA_3)+$$
$$+\text{aria }(A_6GA_2)+\text{aria }(A_6GA_1).$$

(G.M., 1975, p. 148, *C. Ionescu-Țiu*).

9.157. Fie poligonul convex $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Notăm cu B, C, D, respectiv mijloacele segmentelor A_1A_2, A_3A_4, BC, iar cu E centrul de greutate al triunghiului $A_5A_6A_7$ și G un punct pe DE astfel încît $3EG=4GD$.

a). Să se arate că $\sum_{i=1}^{7}\overrightarrow{GA_1}=0$; $\sum_{i=1}^{7}\overrightarrow{MA_i}=7\overrightarrow{MG}$ unde M este un punct oarecare.

b). Să se arate că oricare ar fi ordinea notațiilor vîrfurilor poligonului considerat $A_1A_2\ldots A_7$, punctul G rămîne același punct fix.

(G.M., 15525, *C. Ionescu-Țiu*).

9.158. Fie un poligon $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ cu 8 laturi. Notăm cu B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 și B_7 respectiv mijloacele laturilor A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_7 și A_7A_0 cu C_0, C_1, C_2 mijloacele segmentelor

B_0B_2, B_4B_6, C_0C_1; cu D_0, D_1, D_2, D_3 mijloacele segmentelor B_1B_3, B_1B_7, B_7B_5, B_5B_3 iar cu E_1 și E_2 mijloacele segmentelor B_0B_6 și B_2B_4.

Să se arate că segmentele C_0C_1, D_0D_2, D_1D_3 și E_1E_2 sînt concurente în punctul C_2 care este centru de simetrie al octogonului $C_0D_0E_2D_3C_1D_2F_1D_1$. Generalizare.

(G.M., 15524, *C. Ionescu-Țiu*).

9.159. a) Se dau două drepte oarecare D_1 și D_2. Să se ducă o dreaptă care să le întîlnească și să fie paralelă cu o altă dreaptă dată Δ. *Discuție.*

b). Se dau trei plane paralele P_1, P_2, P_3. Punctele A și B în planul P_1 și C, D în P_2. Dreptele AD, AC, BD, BC înțeapă planul P_3 în punctele H, E, G, F.

a). Să se arate că patrulaterul $EHGF$ este paralelogram.

b). În ce caz acest paralelogram este romb.

9.160. Să se arate că locul geometric al punctului de concurență al diagonalelor paralelogramelor înscrise într-un patrulater strîmb $ABCD$ este segmentul MN care unește mijloacele diagonalelor AC și BD.

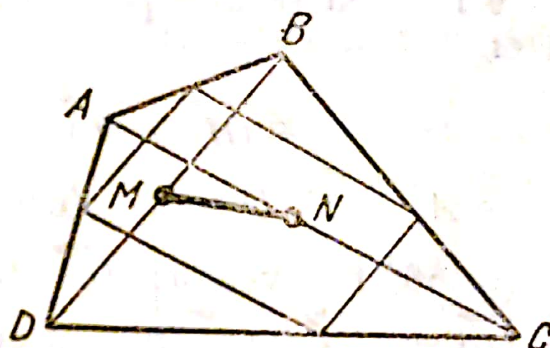


Fig. 9.160

9.161. Fie OH înălțimea unui tetraedru $OABC$ tridreptunghic în O. Să se arate că $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}$.

9.162. a) Două cercuri O_1 și O_2 situate în două plane diferite, sînt tangente în punctul T. a). Să se arate că există o sferă care conține cele două cercuri. b). Notînd cu d distanța dintre centrele celor două cercuri și cu α unghiul diedru dintre planele celor două cercuri să se determine raza R a sferei de mai sus în funcție de d și α.

9.163. Fie un paralelipiped $ABCDA_1B_1C_1D_1$, iar M și N centrele de greutate respectiv ale triunghiurilor A_1BD și CB_1D_1.

a). Să se arate că $AM = MN = NC_1 = AC_1 : 3$; iar centrul de simetrie al paralelipipedului este același cu al poliedrului cu 8 fețe triunghiuri, rezultat din înlăturarea piramidelor A_1BDA și CB_1D_1C.

b). Volumul acestui poliedru este 2/3 din volumul paralelipipedului.

c). Dacă paralelipipedul este dreptunghic de dimensiuni, a, b, c atunci aria poliedrului rezultat este

$$S = ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

(G.M., 15545, 1976, *C. Ionescu-Țiu*).

9.164. Să se arate că într-un tetraedru $ABCD$ avem

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0.$$

Caz particular: A, B, C, D sînt în același plan.

9.165. Să se afle poziția unui punct O astfel ca să avem

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

unde A, B, C, D sînt vîrfurile unui tetraedru.

9.166. Fie vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ din spațiu $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, notăm cu $\alpha = \sphericalangle BOC$, $\beta = \sphericalangle AOC$ și $\gamma = \sphericalangle AOB$. Să se arate că:

$$OM^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2OB \cdot OC\cos\alpha + 2OA \cdot OC \cdot \cos\beta + 2OA \cdot OB\cos\gamma.$$

9.167. O dreaptă D se rotește într-un plan P în jurul unui punct A. Să se afle locul proiecției unui punct fix O din spațiu pe dreapta D.

9.168. Un plan se intersectează cu muchiile unui triedru tridreptunghic în punctele A, B, C. Să se arate că:

a). Vîrful O al triedrului se proiectează pe planul (ABC) în ortocentrul triunghiului ABC.

b). Pătratul ariei triunghiului ABC este egal cu suma pătratelor ariilor triunghiurilor OAB, OBC, OCA.

9.169. a). Să se arate că mijloacele muchiilor unui tetraedru cu toate fețele egale, sînt vîrfurile unui poliedru cu 8 fețe triunghiuri egale (octaedru).

b). Cele trei diagonale ale acestui octaedru sînt concurente și perpendiculare două cîte două, punctul lor de concurență fiind mijlocul fiecăreia din aceste diagonale.

c). Să se exprime volumul acestui octaedru în funcție de laturile a, b, c ale triunghiului ABC.

(G.M., E: 5019, *C. Ionescu-Țiu*).

9.170. Să se arate că planul determinat de mijloacele a trei laturi neparalele și care nu au extremități comune ale unui cub, secționează cubul după un exagon regulat și îl împarte în două părți egale.

9.171. Într-un paralelipiped $ABCDA_1B_1C_1D_1$ diagonala AC_1 se intersectează cu planele (B, D, A_1) și (D_1B_1C) respectiv în punctele G_1 și G_2. Să se arate că:

a). Punctele G_1 și G_2 sînt centrele de greutate ale triunghiurilor BDA_1 și D_1B_1C;

b). Punctele G_1 și G_2 împart diagonala în trei părți egale;

c). Patrulaterul $A_1G_1CG_2$ este un paralelogram.

9.172. Să se arate că o piramidă patrulateră poate fi secționată după paralelogram.

9.173. Să se arate că dacă într-un tetraedru două înălțimi se întîlnesc, atunci se întîlnesc și celelalte două înălțimi.

9.174. Fie patru patrulatere strîmbe $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$, $D_1D_2D_3D_4$. Notăm cu A, B, C, D punctele care sînt mijloacele segmentelor care unesc mijloacele a două laturi opuse respectiv ale fiecăruia din cele patru patrulatere, iar cu G notăm mijlocul segmentului care unește mijloacele laturilor AB și CD.

a). Să se arate că rezultanta forțelor ce pleacă dintr-un punct O din spațiu și cu extremitățile în vîrfurile celor patru patrulatere inițiale este egală cu $16 \cdot \overrightarrow{OG}$.

b). Un plan oarecare π trece prin G și lasă o parte din vîrfurile celor patru patrulatere de o parte și restul de cealaltă parte. Să se arate că suma distanțelor la planul π ale vîrfurilor lăsate de o parte este egală cu suma distanțelor vîrfurilor lăsate de cealaltă parte a planului π.

(G.M.. 1976, *C. Ionescu-Țiu*).

9.175. Fiind date în spațiu segmentele egale AB și A_1B_1 să se găsească o axă astfel încît printr-o rotație în jurul ei segmentele AB, A_1B_1 să se suprapună în ordinea $A \equiv A_1$, $B \equiv B_1$.

9.176. Fie n vectori $\overrightarrow{OA_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și G centrul de greutate al forțelor egale și paralele aplicate în punctele A_i.

Să se arate că $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = n\overrightarrow{OG}$.

9.177. Să se demonstreze că se pot construi drepte care să se sprijine pe trei drepte oarecare date. *Discuție.*

9.178. Printr-un punct M să se ducă o dreaptă care să întîlnească două drepte D_1 și D_2 oarecare. *Discuție.*

9.179. Să se arate că distanța de la centrul unui paralelipiped la un plan exterior paralelipipedului este o optime din suma distanțelor vîrfurilor paralelipipedului la același plan.

9.180. O piramidă $VABC$ are toate fețele egale cu un triunghi ascuțitunghic ABC ca bază. Notăm cu α, β, γ unghiurile diedre formate de baza ABC respectiv cu fețele VBC, VCA, VAB.

Să se arate că:

a). $\dfrac{\sin\alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$.

b). $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$; $\sec\alpha + \sec\beta + \sec\gamma \geqslant 9$.

c). Să se arate că piramida cu toate fețele egale nu poate avea ca fețe triunghiuri dreptunghice; dar obtuzunghice?

d). În cazul cînd $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ să se exprime volumul piramidei și raza sferei înscrise în piramidă.

(G.M., 14904, *C. Ionescu-Țiu*).

9.181. Proiecția unui unghi pe un plan care nu este paralel cu niciuna din laturile unghiului este un unghi obtuz dacă planul taie laturile unghiului sau taie prelungirile lor, iar în caz contrar unghiul de proiecție este ascuțit.

Să se studieze și cazul cînd o latură este paralelă cu planul.

9.182. Mediana unui tetraedru este segmentul care unește un vîrf cu centrul de greutate al feței opuse. Planul care trece printr-o muchie și prin mijlocul muchiei opuse se numește plan median. Bimediana unui tetraedru este segmentul care unește mijloacele a două muchii opuse. Să se arate că:

a). Medianele unui tetraedru sînt concurente într-un punct G, situat pe fiecare din ele la trei pătrimi din vîrf și o pătrime de fața corespunzătoare.

b). Cele 4 plane mediane sînt concurente în G.

c). Bimedianele sînt concurente tot în punctul G care este situat la mijlocul fiecăreia din ele.

d). Perpendicularele duse pe fiecare față a tetraedrului în centrul cercului circumscris sînt concurente în centrul sferei circumscrise tetraedrului.

9.183. Fie tetraedrul $ABCD$, h_a, h_b, h_c, h_d înălțimile și a, b, c, d distanțele de la un punct M interior la fețele tetraedrului.

Să se arate că

$$\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}+\frac{d}{h_d}=1.$$

9.184. Fie un hexagon convex $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$; iar I_{23}, I_{45}, I_{61} mijloacele laturilor A_2A_3, A_4A_5, A_6A_1, iar G centrul de greutate al triunghiului $I_{23}I_{45}I_{61}$. O dreaptă (d) care trece prin G lasă de o parte a ei punctele A_1, A_2, A_3, iar de cealaltă parte punctele A_4, A_5, A_6.

Fie B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 proiecțiile punctelor A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 pe dreapta (d). Să se arate că

$$A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=A_4B_4+A_5B_5+A_6B_6.$$

(G.M., 15247, *C. Ionescu-Țiu*).

9.185. Fie poligonul convex $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Notăm cu I_{ij} mijlocul laturii A_jA_i, cu B_i proiecția punctului A_i pe dreapta A_0A_6, iar cu B_{ij} proiecția punctului I_{ij} pe dreapta A_0A_6. Să se arate că

$$A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+A_4B_4+A_5B_5=2(I_{12}B_{12}+I_{34}B_{34}+I_{56}B_{56})=2(I_{61}B_{61}+I_{23}B_{23}+I_{45}B_{45})=6GG_1,$$

unde G este centrul de greutate al triunghiului $I_{12}I_{34}I_{56}$, iar G_1 proiecția lui G pe A_0A_6. Să se dea și o generalizare.

(G.M., 15263, *C. Ionescu-Țiu*).

9.186. Fie octogonul convex $A_1A_2...A_8$ și I_{ij} mijlocul laturii A_iA_j. Să se arate că dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului $I_{12}I_{34}I_{56}I_{78}$ și dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului $I_{23}I_{45}I_{67}I_{81}$ trec prin același punct G.

(G.M., 15248, *C. Ionescu-Țiu*).

9.187. Să se găsească locul geometric al punctelor egal depărtate:

a). de muchiile unui unghi triedru,

b). de fețele unui unghi triedru.

9.188. Într-un tetraedru $ABCD$, dacă două din următoarele condiții sînt satisfăcute să se arate că a treia rezultă:

a). Muchiile opuse sînt egale;

b). Fețele sînt echivalente;

c). Suma unghiurilor plane ale fiecărui unghi triedru este egală cu 180°.

9.189. Să se arate că forțele aplicate în centrele de greutate ale fețelor unui poliedru convex, proporționale cu ariile fețelor și normale acestora, îndreptate în afara poliedrului, sînt în echilibru.

Indicație. Se descompune poliedrul în tetraedre.

9.190. Un tetraedru $ABCD$ are centrul de greutate G, iar A_1, B_1, C_1, D_1 sînt centrele de greutate respectiv ale fețelor BCD, ACD, ABD, ABC. Să se arate că:

a). Tetraedrul $A_1B_1C_1D_1$ are același centru de greutate G.

b). Tetraedrele $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$ sînt asemenea și să se afle raportul lor de asemănare.

c). $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0$.

9.191. Fie punctele oarecare A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, iar $B_1, B_2, ..., B_{10}$ și $C_1, C_2, ..., C_{10}$ respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor: $A_1A_2A_3$; $A_1A_2A_4$; $A_1A_2A_5$; $A_1A_2A_6$; $A_1A_3A_4$; $A_1A_3A_5$; $A_1A_3A_6$; $A_2A_3A_4$; $A_2A_3A_5$; $A_2A_3A_6$ și $A_4A_5A_6$; $A_3A_5A_6$; $A_3A_4A_6$; $A_3A_4A_5$; $A_2A_5A_6$; $A_2A_4A_6$; $A_2A_4A_5$; $A_1A_5A_6$; $A_1A_4A_6$; $A_1A_4A_5$. Să se arate că cele 10 segmente B_iC_i, unde $i \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$ sînt concurente și se înjumătățesc în punctul lor de concurență.

(G.M., 15645, *C. Ionescu-Țiu*).

9.192. Să se arate că dacă ducem două plane paralele cu baza unui con și care împart înălțimea conului în trei părți egale atunci volumele celor trei corpuri obținute sînt proporționale cu numerele 1, 7, 19.

9.193. Să se arate că volumul trunchiului de con circular, cu generatoarea G, circumscris sferei de rază R este

$$V = \frac{2}{3}\pi R(G^2 - R^2).$$

9.194. Să se arate că aria unui cilindru circumscris unei sfere este media aritmetică între aria sferei înscrise și aria sferei circumscrise aceluiași cilindru (circular).

9.195. Să se arate că cele șase plane perpendiculare pe mijloacele fiecărei muchii ale unui tetraedru se întîlnesc în centrul sferei circumscrise tetraedrului.

9.196. Să se arate că volumul unei prisme drepte triunghiulare are ca măsură produsul dintre aria unei fețe laterale și jumătatea distanței muchiei opuse la acea față.

9.197. Pe muchiile unei prisme drepte triunghiulare de bază ABC se iau în același sens lungimile $AA_1=a$, $BB_1=b$, $CC_1=c$. Să se stabilească formula măsurii volumului $ABCA_1B_1C_1$.

Indicație. Se va considera $a \leqslant b \leqslant c$. Notăm cu H_1 depărtarea muchiei AA_1 la fața BBC_1C, iar cu h_1 distanța între paralelele BB_1 și CC_1.

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}h_1 \cdot H_1.$$

9.198. Fie tetraedrul $OABC$ și punctele A_1, B_1, C_1 respectiv pe OA, OB, OC. Notăm cu V și V_1 volumele tetraedrelor $OABC$ și $OA_1B_1C_1$ să se arate că

$$\frac{V}{V_1} = \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1}.$$

9.199. Să se afle raportul între volumele generate de un paralelogram $ABCD$ dat, prin rotiri succesive în jurul laturilor adiacente AB și AC.

9.200. Să se taie un triedru tridreptunghic printr-un plan așa încît secțiunea să fie un triunghi egal cu un triunghi dat.

9.201. Să se arate că într-un tetraedru cu muchiile opuse pe direcții perpendiculare, înălțimile tetraedrului și perpendicularele comune muchiilor opuse trec prin același punct.

9.202. Se dau în spațiu un plan P și două puncte A și B de aceeași parte a planului. Să se găsească locul geometric al punctelor din planul P astfel ca dreptele care le unesc cu cele două puncte fixe date A și B să fie egal înclinate pe plan.

9.203. Într-un tetraedru $VABC$ avem $VA = a$, $PB = VC = a\cos\frac{\pi}{6}$; $AH = VH$ unde AH este înălțimea tetraedrului.

Notăm cu M și N mijloacele muchiilor VA, BC.

a). Să se arate că $ABHC$ este un pătrat.

b). $BC \perp VA$, $BC \perp MN$.

c). Triunghiurile VBH și VHC sînt dreptunghice egale.

9.204. Fie un poliedru mărginit de două poligoane $ABCDE$ și $KLMN$ situate în plane paralele și de fețele laterale ABK, $BCLK$, $CDML$, $EDMN$ și $AENK$.

Să se arate că volumul V al poliedrului este

$$V = \frac{1}{6}h(B + B_1 + 4B_2),$$

unde h este distanța între cele două poligoane situate în plane paralele, B și B_1 ariile acestor poligoane iar B_2 aria secțiunii făcute printr-un plan paralel cu planele poligoanelor și egal depărtate de ele.

9.205. Fie în spațiu punctele $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots$ $\dots, n$. Să se arate că

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = n\overrightarrow{OG}$$

unde G are coordonatele $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$.

Cazuri particulare:

a). Linia poligonală $A_1A_2...A_n$ admite un centru de simetrie.

b). $A_1A_2 ... A_n$ este un poligon regulat (sau poliedru regulat).

c). Punctele $A_1, A_2, ..., A_n$ sînt așezate pe aceeași linie.

d). Punctele $A_1, A_2, ..., A_n$ sînt coliniare și $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = ... = A_{n-1}A_n$.

9.206. Să se arate că pătratul diametrului sferei este odată și jumătate pătratul laturii tetraedrului regulat înscris; este și dublul pătratului octaedrului regulat înscris în sferă.

9.207. Să se arate că dacă un patrulater strîmb este circumscris unei sfere, atunci cele patru puncte de contact sînt în același plan.

9.208. Să se înscrie într-o sferă conul de volum maxim și cilindrul de volum maxim.

9.209. Fie nouă puncte în spațiu așezate oricum. Se formează 3 triunghiuri ale căror vîrfuri sînt 3 cîte 3 luate la întîmplare din cele 9 puncte.

a). Să se arate că centrul de greutate G al triunghiului cu vîrfurile în centrele de greutate al celor 3 triunghiuri formate este unic, adică nu depinde de modul cum am grupat cele trei triunghiuri.

b). În cazul particular, cînd cele 9 puncte sînt situate în același plan, iar prin G ducem în plan o dreaptă oarecare (d), suma distanțelor de la punctele situate de o parte a dreptei (d) la dreapta (d) este egală cu suma distanțelor celorlalte puncte situate în cealaltă parte a dreptei la dreapta (d). *Generalizare.*

(G.M. 15207, *C. Ionescu-Țiu*).

9.210. Să se arate că dacă trei sfere se taie două cîte două, planele de intersecție se taie după aceeași dreaptă perpendiculară pe planul celor trei centre ale sferelor.

9.211. Să se arate că locul geometric al punctelor din care putem duce la o sferă trei plane tangente care să formeze un triedru tridreptunghic este o sferă concentrică cu sfera dată și de rază $R\sqrt{3}$ unde R este raza sferei date.

9.212. Fie un triunghi oarecare ABC. Notăm cu A_1, B_1, C_1 proiecţiile centrului înscris I respectiv pe laturile BC, CA, AB.

Dreptele IA_1, IB_1, IC_1 întîlnesc un cerc de centru I şi de rază $R > 2r$ respectiv în A_2, B_2, C_2 iar IA_1, IB, IC întîlnesc acelaşi cerc de rază R în prelungirea lor în punctele A_3, B_3, C_3, unde r este raza cercului înscris.

a). Să se arate că dreptele A_2A_3, B_2B_3 şi C_2C_3 sînt concurente.

b). Cunoscînd $AB = 4$ m, $AC = 3$ m şi $BC = 5$ m iar $R = 3$ m să se calculeze volumul sferei înscrise în piramida considerată.

(G.M., 14983, *C. Ionescu-Ţiu*).

9.213. a). Se dă un triunghi ABC dreptunghic în A. Fie D piciorul înălţimii din A. Să se arate că $AD > AB + AC - BC$.

b). Se dă un triunghi echilateral ABC de latură a. Cercul tangent în B la AB şi în C la AC intersectează înălţimea AA' a triunghiului în două puncte: M interior triunghiului şi N exterior triunghiului. Să se calculeze aria părţii de suprafaţă plană mărginită de laturile AB şi AC şi de arcul de cerc BNC.

(Institutul Politehnic, Bucureşti, 1975).

9.214. Într-un cub cu lungimea muchiei egală cu a, $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ sînt două feţe opuse. Dacă M este mijlocul muchiei $A'B'$, să se calculeze distanţa de la vîrful C' la dreapta BM.

(Institutul Politehnic Bucureşti, 1975).

9.215. Într-un con circular drept este înscrisă o sferă. Ştiind că raportul dintre volumul conului şi volumul sferei este m să se găsească raportul dintre aria totală a conului şi aria sferei, în funcţie de m.

(Institutul Politehnic, Bucureşti, octombrie 1975).

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar 10.VI.1976. Apărut 1976. Comanda nr. 1 065. Tiraj : 108 000 broşate. Coli de tipar : 40.



Comanda nr. 60 182
Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii"
Bucureşti — Piaţa Scînteii nr. 1,
Republica Socialistă România

Aplicarea metodelor geometriei euclidiene reclamă o ingeniozitate deosebită care se obține numai prin studii și exerciții îndelungate. Problemele de geometrie constituie antrenamentul necesar însușirii disciplinei în gîndire, a spiritului de rigoare... ...lucrarea cuprinde probleme interesante, variate și de dificultate gradată, privind părțile geometriei euclidiene care se predau în școlile noastre...
Se pune astfel la dispoziția elevilor liceelor noastre un material bogat și deosebit de util, de natură să consolideze pregătirea lor matematică...

Acad. CAIUS IACOB